Marc SAGE

25 mars 2020

DS du 5 avril 2018

(langage mathématique)

Solution proposée.

Exercice 1. "Français" prend ici une majuscule, en tant que "personne française".

La proposition P peut se formaliser en la quantification universelle $\forall x,\ F_x \Longrightarrow I_x$ où F et I formalisent les prédicats resp. "être français" et "être francilien d'origine". On pourrait également le mettre sous la forme $\forall x \in F,\ I_x$ où F formalise cette fois l'ensemble des Français.

La proposition Q peut se formaliser en l'implication $D \Longrightarrow L$ où D et L formalisent resp. "aujourd'hui est dimanche" et "demain est lundi" dont les interprétations usuelles en termes de vérité dépendent du contexte (et plus précisément du jour de la semaine).

De même, la proposition R peut se formaliser en l'implication $N \Longrightarrow S$ où N et S formalisent resp. "vous êtes le Père Noël" et "je suis Spider-Man" dont les interprétations usuelles en termes de vérité sont chacune fausses.

1. La négation de P s'écrit $\neg P$ ou $\overline{P}$ voire $\tilde{}P$ (chez Russell et Wittgenstein par exemple). Nous écririons de même les négations de Q et R. Question suivante.

   « Comment ça, ce n'est pas l'esprit de la question ? Il fallait la formuler différemment alors ! » Nous ne saurions être davantage en accord.

   L'attendu est de *reformuler* en français les négations de P, Q, R de façon la plus claire possible, par exemple en vue d'évaluer leur vérité. Pour cela, on demande (mais on ne le dit surtout pas, ce serait trop facile) de *formaliser* ces propositions (évidemment une seule forme est attendue du correcteur, bien que cette formalisation soit complètement libre), puis d'utiliser les règles de négation des logiques propositionnelle & prédicative pour donner aux négations étudiées des formes logiquement équivalentes que l'on traduira (enfin !) de façon pertinente.

   Il importe vraiment de saisir le mélange confus de ce genre de question pour ne pas se laisser happé par le sens de ces énoncés prétendus de la vie de tous les jours. Personne ne formulerait dans la sphère primitive un énoncé comme R dont le sens y est vide ! Il s'agit de tout envoyer dans le formel, y travailler, puis revenir dans le primitif.

   La négation $\neg P$ est $\neg\,(\forall x,\ F_x \Longrightarrow I_x)$, qui équivaut (d'après les lois de De Morgan) à $\exists x,\ \neg\,(F_x \Longrightarrow I_x)$, *i. e.* à $\exists x,\ F_x \wedge \neg\, I_x$, dont une traduction possible est "il y a un Français non francilien d'origine". (Même résultat pour la négation $\neg\,(\forall x \in F,\ I_x)$, équivalente à $\exists x \in F,\ \neg I_x$.)

   La négation $\neg Q$ est $\neg\,(D \Longrightarrow L)$, qui équivaut à $D \wedge \overline{L}$, dont une traduction possible est "aujourd'hui, on est dimanche mais[1] demain n'est pas lundi".

   La négation $\neg R$ est $\neg\,(N \Longrightarrow L)$, qui équivaut à $N \wedge \overline{L}$, dont une traduction possible est "vous être le Père Noël mais je ne suis pas Spiderman"

2. Tiens, le sujet semble à présent considérer ses propositions *primitives* (P, Q et R) comme étant formelles. Idéal pour entretenir la confusion.

   La contraposée de l'implication $D \Longrightarrow L$ est $\overline{L} \Longrightarrow \overline{D}$, dont une traduction possible est "si on n'est pas lundi demain, alors aujourd'hui on n'est pas dimanche".

   La contraposée de l'implication $N \Longrightarrow S$ est $\overline{S} \Longrightarrow \overline{N}$, dont une traduction possible est "si je ne suis pas Spider-Man, alors vous n'êtes pas le Père Noël".

[1] les conjonctions "et" et "mais" sont tout à fait interchangeables du de vue logiques mais "mais" introduit une nuance d'opposition/surprise qui traduit bien la négation de l'implication (on a beau avoir la prémisse, eh bien on n'a pas pour autant la conclusion !)

3. On doit *justifier* nos réponses à présent ? Tiens, peut-être qu'on fait des maths, en fait.

Le mathématicien Jean-Pierre Serre (google is your friend) est français et né à Bages dans les Pyrénées, donc n'est pas originaire d'Île-de-France. Il constitue donc un contre-exemple à l'énoncé universel P, lequel est par conséquent faux.

Supposons la prémisse D, *i. e.* qu'aujourd'hui est un dimanche. À nous de supposer que le contexte est celui de la semaine très répandue de sept jours avec l'ordre qu'on lui connaît : dans ce cas, demain sera bien lundi, d'où la conclusion. Ceci établi l'implication $D \Longrightarrow L$, d'où la vérité de la proposition Q

Voici typiquement l'exemple où il est vain de chercher un sens primitif. Essayons tout de même et supposons la prémisse N. Nous sommes alors en train de rêver et tout peut arriver, en particulier la conclusion S tout comme sa négation $\overline{S}$, mais on ne saura jamais si elles ont lieu vraiment : comment conclure ainsi à S ou à $\overline{S}$? Peut-être les deux – mais alors la réalité de notre rêve serait-elle contradictoire ? Revenons sur la terre ferme. Croire à l'existence Père Noël (qu'il soit vous, moi ou quiconque) conduit assez rapidement à un comportement absurde, en décalage avec les réalités constatées : comment mieux définir la négation[2] dans la sphère primitive ? Formellement, cette fausseté se traduit par l'affirmation de la négation $\neg N$. Supposons à présent la prémisse N : de celle-ci et du fait $\overline{N}$ sus-établi on déduit la contradiction $N \wedge \overline{N}$, de laquelle découle n'importe quoi, en particulier S (mais aussi sa négation $\overline{S}$, sinon ce n'est pas drôle), d'où l'implication $N \Longrightarrow S$ (et celle $N \Longrightarrow \overline{S}$). La proposition R est donc vraie, en dépit de tout bon sens, car elle n'exprime absolument *rien*.

Exercice 2. "Soi**en**t" devrait être au pluriel. Nous proposons à chaque fois systématiquement plusieurs niveaux de lecture, partant d'un premier niveau quasi littéral/mécanique, en allant croissant en fluidité française. Apprécier dans les expressions les plus élaborées la disparition des lettres muettes.

1. pour chaques x et y éléments de $\mathbf{R}$, xy égale 0 équivaut à x égale 0 ou y égale 0 ;
   pour chaques x et y réels, xy est nul équivaut à x est nul ou y est nul ;
   pour chaques réels x et y, le produit xy est nul ssi x ou y est nul ;
   pour chaques réels x et y, la nullité du produit xy équivaut à celle de l'un de ses facteurs ;
   pour chaque paire de réels, la nullité de leur produit équivaut à celle de l'un des facteurs ;
   la nullité d'un produit de réels équivaut à celle de l'un de ses facteurs ;
   l'anneau $\mathbf{R}$ est intègre (c'est la définition de l'intégrité d'un anneau).
2. pour chaque x élément de $\mathbf{R}$, $f(x)$ égale $f(-x)$;
   pour chaque réel x, l'image de x par f égale l'image de $-x$ par f ;
   pour chaque réel x, les images par f de x et de $-x$ sont égales ;
   l'image par f de chaque réel vaut celle de son opposé.
3. Retraduisons pour commencer uniquement la partie $\forall n \in \mathbf{N},\ |u_n| \leq M$:
   pour chaque n élément de $\mathbf{N}$, module de u_n vient avant M ;
   pour chaque naturel n, le réel u_n a un module venant avant M ;
   pour chaque naturel n, le n-ième terme de la suite u a un module plus petit que M ;
   chaque terme de la suite u a un module plus petit que M.

   Rajoutons $\exists M > 0$ devant, que nous *devons* préciser en le transformant en $\exists M \in \mathbf{R}_+^*$ (on aurait pu tout aussi bien choisir $\exists M \in \mathbf{N}^*$). Il se traduit alors par "il y a un M strictement positif tel que" et permet de traduire en entier la proposition étudiée :
   il y a un réel M strictement positif tel que chaque terme de la suite u a un module plus petit que M ;
   chaque terme de la suite u a un module plus petit qu'un certain réel strictement positif (indépendant du terme considéré) ;
   la suite u est bornée (c'est la définition du caractère borné).
4. il y a un n_0 élément de $\mathbf{N}$ tel que, pour chaque n venant après n_0, u_n vient strictement avant u_{n+1} ;
   il y a un naturel n_0 tel que, pour chaque **naturel**[3] n venant après n_0, u_n vient strictement avant u_{n+1} ;
   il y a un naturel n_0 tel que, la suite u croît à partir du rang n_0 ;
   la suite u croît à partir d'un certain rang.

[2] à ce sujet, la lectrice pourra consulter à profit *L'évolution créatrice* d'Henri Bergson, aux pages 287-298 de l'édition critique 2007 publiée aux PUF (ou bien les extraits choisi de la p. 15 de ce texte : http ://www.normalesup.org/~sage/Reflexions/Sciences/HBevolCreat.pdf)

[3] Comme n apparaît plus loin dans la proposition en indice de u, *i. e.* comme élément source de la suite u, on peut reconstituer l'appartenance $n \in \mathbf{N}$. En pratique cet oubli est monnaie courante et est tout à fait acceptable – à condition d'être maîtrisé !

Exercice 3. "Soi**en**t" devrait être au pluriel. On ignore si les négations à donner doivent l'être en langage courant ou formalisé – dans le doute, nous ferons les deux.

1. La surjectivité de f s'écrit $\forall b \in \mathbf{R},\ \exists a \in \mathbf{R},\ b = f(a)$, dont la négation équivaut à $\exists b \in \mathbf{R},\ \forall a \in \mathbf{R},\ b \neq f(a)$ et peut se traduire par "il y a un réel non atteint par f".
2. Partons plutôt de la négation "f est à valeurs négatives", reformulée en "chaque valeur de f est négative", puis "chaque image par f est négative" et "l'image par f de chaque réel est négative", ce qui se formalise en $\forall a \in \mathbf{R},\ f(a) \leq 0$, dont la négation équivaut à $\exists a \in \mathbf{R},\ f(a) > 0$ et peut se traduire par "f prend une valeur strictement positive".
3. L'énoncé ne donne aucun sens à q ! Soit donc q un réel[4]/ Alors le caractère "géométrique de raison q" de la suite u peut se reformuler en "chaque terme de u vaut le produit par q de son précédent" ou encore "pour chaque naturel n, le $(n+1)$-ième terme de u vaut le produit par q du n-ième terme (de u)", ce qui peut se formaliser en $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = qu_n$, dont la négation équivaut à $\exists n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} \neq qu_n$ et peut se traduire par "il y un terme qui ne vaut pas q fois le précédent".
4. Évitons de parler de "tous les termes de la suite u" : quelqu'un a-t-il jamais conçu ou utilisé d'un seul trait *tous* les naturels ? Remplaçons-le par "chaque" aux moindres prétentions – et surtout dont le sens est bien plus juste. L'appartenance au segment $[0,1]$ de chaque terme de la suite u se reformule alors en l'appartenance, pour chaque naturel n, du n-ième terme de la suite au segment $[0,1]$, ce qui peut se formaliser en $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \in [0,1]$, dont la négation équivaut à $\exists n \in \mathbf{N},\ u_n \in [0,1]$ et peut se traduire par "l'un des termes de la suite u tombe en dehors du segment $[0,1]$".
5. (coquillle : distin**C**ts) Chaque nombre non rationnel est-il réel ? Ce n'est pas le cas du complexe i... L'énoncé devrait donc préciser de quels *nombres* irrationnels il parle au juste. Nous sommes guidés par l'encadrement "entre deux nombres rationnels" : plus de doute possible, tout se passe sur la droite réelle.

   Une quantification universelle sur les paires de rationnels considérés doit ici être sous-entendue, d'où une formalisation possible : $\forall a, b \in \mathbf{Q},\ a \neq b \Longrightarrow \exists i \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}\ ,\ i \in [a,b]$, dont la négation équivaut à $\exists a, b \in \mathbf{Q},\ (a \neq b) \wedge (\forall i \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}\ ,\ i \notin [a,b])$ ou encore[5] à $\exists a, b \in \mathbf{Q},\ \begin{cases} a \neq b \\ [a,b] \subset \mathbf{Q} \end{cases}$, ce qui peut se traduire par "il y a deux rationnels distincts dont l'intervalle les reliant ne contient que des rationnels".

Exercice 4. Les " :" après chacune des lettres P, Q, R sont certainement à comprendre comme des *définitions*.

1. Les négations de P, Q, R s'écrivent resp. $\overline{P}$, $\overline{Q}$ et $\overline{R}$. Question suivante ? Ah, non, zut : il fallait *donner des propositions simples équivalentes* à ces négations !

   On a les équivalences suivantes :

$$\neg P \Longleftrightarrow \exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ xy < 0$$

(en français : il y a un réel dont le produit par chaque autre réel est strictement négatif),

$$\neg Q \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ xy < 0$$

(en français : pour chaque réel, il y a un réel dont le produit avec le premier est strictement négatif) et

$$\neg R \Longleftrightarrow \exists x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ xy < 0$$

(en français : il y a deux réels de produit strictement négatif).

[4] réel parce que la suite u est à valeurs réelles

[5] Observer (à a, b réels fixés) les équivalences

$$\begin{aligned} & \forall i \in \mathbf{R} \backslash \mathbf{Q}\ ,\ i \notin [a,b] \\ \Longleftrightarrow\ & (\forall i \in \mathbf{R},\ i \notin \mathbf{Q} \Longrightarrow i \notin [a,b]) \\ \Longleftrightarrow\ & (\forall i \in \mathbf{R},\ i \in [a,b] \Longrightarrow i \in \mathbf{Q}) \\ \Longleftrightarrow\ & [a,b] \cap \mathbf{R} \subset \mathbf{Q} \\ \Longleftrightarrow\ & [a,b] \subset \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

2. Ce sujet est très exigeant : il nous demande de justifier nos affirmations ! On n'est pas en maths, quoi !... Ah ben si, en fait.

L'énoncé ne précise pas de "quelles propositions" il parle : certainement P, Q et R, mais peut-être aussi les négations demandée juste auparavant ? Traitons les trois premières, leurs négations devenant alors très simples à évaluer.

Prouvons P. Soit $a \in \mathbf{R}$: alors le produit $a \cdot a$ est positif (d'après la "règle des signes"), d'où l'existence $\exists b \in \mathbf{R},\ ab \geq 0$. Il en résulte les existences $\forall a \in \mathbf{R},\ \exists b \in \mathbf{R},\ ab \geq 0$, *i. e.* la proposition P. Cette dernière est donc prouvable (puisque prouvée !).

Établissons Q en montrant que remplacer x par 0 fonctionne. Pour chaque réel a, le produit $0a = 0$ est positif, d'où les positivités $\forall y \in \mathbf{R},\ 0y \geq 0$ et la conclusion $\exists x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ xy \geq 0$. La proposition est donc prouvable.

Montrons $\neg R$ à l'aide de son "écriture" obtenue à la question 1. Remplacer $\binom{x}{y}$ par $\binom{1}{-2}$ donne un produit $1 \cdot (-2) = -2$ strictement négatif, d'où les existences $\exists x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ xy < 0$ et la négation de R. La proposition R est donc réfutable.

Remarque. Nul besoin ici de prononcer les mots "vrai" ou "faux" : nous suffisent "prouvable" et "réfutable".

Exercice 5. Ce "Soient" doit ici être compris comme une *définition* et non une invocation. C'est dommage, pour une fois qu'il était bien au pluriel !

1. La partie A est le "disque réel" ouvert de centre 1 et de rayon 2, à savoir l'intervalle $]-1, 3[$.

Pour mieux comprendre B, factorisons le membre de gauche de la négativité pour mieux en comprendre le signe : on a pour chaque réel a les égalités

$$\begin{aligned} a^2 - a - 6 &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \overbrace{-\frac{1}{4} - \frac{24}{4}}^{-\frac{25}{4} = -\frac{5^2}{2^2} = -\left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \left[\left(a - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)\right]\left[\left(a - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2}\right)\right] \\ &= \left(a - \frac{6}{2}\right)\left(a + \frac{5-1}{2}\right) = (a-3)(a+2), \end{aligned}$$

d'où (toujours à a fixé) les équivalences

$$a \in B \iff a^2 - a - 6 \leq 0 \iff (a+2)(a-3) \leq 0 \iff a \in]-2, 3[,$$

lesquelles montrent l'égalité ensembliste $B =]-2, 3[$. Ce dernier intervalle se réécrivant $A \cup]-2, 0[$, il contient A, d'où l'inclusion souhaitée.

2. On doit tout d'abord se demander à quoi se réfère l'énoncé quand il parle du "même résultat". Nous venons d'établir une inclusion, laquelle est ainsi le *résultat* de notre preuve. – gageons dessus. Or l'inclusion $A \subset B$ équivaut par définition aux implications $\forall r \in \mathbf{R},\ r \in A \implies r \in B$, énoncé dont il semble peu commode de trouver une implication équivalente.

Faisons preuve d'imagination. L'inclusion montrée est un théorème, donc équivaut à la tautologie $P \implies P$ où P dénote n'importe quelle proposition – c'est plié. *Autre idée* : remplacer la tautologie $P \implies P$ par le théorème $P \implies (A \subset B)$. Ces traits d'esprit ne sont cependant peut-être pas dans l'esprit de ce qu'attendait le concepteur du sujet[6].

Exercice 6. Heureusement que l'énoncé nous rappelle qu'il faut justifier ses affirmations et qu'un contre-exemple suffit à justifier une négation – car je n'avais pas révisé mon cours de langage mathématique !

1. Si oui, les images par f de 0 et 2π devraient alors coïncider, or quand la (plus petite) période de f dépasse strictement 2π cette application peut faire n'importe quoi sur $[0, 2\pi]$ et n'a aucun raison de réaliser l'égalité $f(0) = f(2\pi)$. Réalisons un tel contre-exemple.

[6] Une collègue nous a signalé qu'il y a simplement une coquille (au lieu de "$P \implies Q$" il fallait lire "$\forall x,\ P_x \implies Q_x$") et qu'on attendait simplement la définition de l'inclusion (notre première idée).

Si f est la fonction $t \mapsto \cos \frac{t}{2}$, elle est alors 4π-périodique vu à $t \in \mathbf{R}$ fixé les égalités

$$f(t+4\pi) = \cos \frac{t+4\pi}{2} = \cos\left(\frac{t}{2} + 2\pi\right) \underset{\text{périodique}}{\overset{\cos \text{ est } 2\pi\text{-}}{=}} \cos \frac{t}{2} = f(t)$$

mais n'est pas 2π-périodique vu les égalités $\left\{ \begin{array}{r} f(2\pi) = \cos \frac{2\pi}{2} = \cos \pi = -1 \\ f(0) = \cos \frac{0}{2} = \cos 0 = 1 \end{array} \right.$ établissant la distinction des images de 0 et 2π.

2. La prémisse exprime la 2π-périodicité de f, donc implique en particulier sa périodicité.
3. L'ensemble but de f est imposé égal à $\mathbf{R}$: quand $f = \exp$, elle croît strictement mais reste strictement positive et n'atteint donc aucun réel négatif, d'où sa non-surjectivité.
4. Supposons que f croît strictement et montrons son injectivité. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ distincts : on a alors la disjonction $\left\{ \text{ou} \begin{array}{c} a < b \\ b < a \end{array} \right.$. Si $a < b$ (resp. $a > b$), la stricte croissante de f livre la comparaison stricte $f(a) < f(b)$ (resp. $f(a) > f(b)$), d'où la distinction $f(a) \neq f(b)$.

Exercice 7. Pour chaque symbole $\square$ notons $D_\square$ la divisibilité $\exists d \in \mathbf{N},\ 4^\square - 1 = 3d$ et montrons $\forall n \in \mathbf{N},\ D_n$ par récurrence.

(*sanity check* : avant de foncer dans le mur, vérifier quand les petites valeurs ! On a les égalités

$$\begin{array}{rcl} 4^1 - 1 & = & 4 - 1 = 3, \\ 4^2 - 1 & = & 16 - 1 = 15 = 3 \cdot 5, \\ 4^3 - 1 & = & 64 - 1 = 63 = 3 \cdot 21, \\ 4^4 - 1 & = & 256 - 1 = 255 = 3 \cdot 85, \end{array}$$

ce qui est rassurant)

Vu les égalités $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \cdot 0$, on a l'existence $\exists d \in \mathbf{N},\ 4^0 - 1 = 3d$ (avec par exemple d nul), *i. e.* la divisibilité D_0.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que D_n, soit $d \in \mathbf{N}$ tel que $4^n - 1 = 3d$. On a alors les égalités

$$\begin{array}{rcl} 4^{n+1} - 1 & = & 4^n 4 - 1 = [(4^n - 1) + 1] 4 - 1 = [3d + 1] 4 - 1 \\ & = & 12d + 4 - 1 = 12d + 3 = 3(4d + 1), \end{array}$$

d'où l'existence $\exists \delta \in \mathbf{N},\ 4^{n+1} - 1 = 3\delta$ (avec par exemple $\delta = 4d + 1$), *i. e.* la divisibilité D_{n+1}.

Nous venons d'établir la conjonction de D_0 et des implications $\forall n \in \mathbf{N},\ D_n \Longrightarrow D_{n+1}$, de laquelle découlent (par le théorème/axiome de récurrence) les divisibilités $\forall N \in \mathbf{N},\ D_N$.

Remarque. Le résultat est immédiat sans récurrence vu pour chaque naturel n la factorisation

$$4^n - 1 = 4^n - 1^n = (4 - 1) \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ p,q \in \mathbf{N}}} 4^p 1^q = 3 \underbrace{\sum_{p=0}^{n-1} 4^p}_{\text{entier}}.$$

Il y a des portes, et on nous force à passer à travers les murs...