Solution proposée.

1. La table de jouabilité de l'implication donne "jouable" dès que la prémisse ne l'est pas ; la pièce ennuyeuse $\perp$ n'étant pas jouable, la pièce-implication $\perp \Longrightarrow A$ l'est.

   Cette preuve ressort de la sphère primitive : on a établi la jouabilité en en vérifiant simplement les critères définitoires.

2. Selon le guide intuitif donné par la sphère idéale, cette jouabilité devient une vérité qui s'énonce "du faux implique n'importe quoi".

3. Le jeu du mathématicien consiste (entre autres...) à faire le tri, parmi tous les énoncés pertinents auxquels il s'intéresse, entre ceux qui sont prouvables (çàd les théorèmes) et ceux qui sont réfutables (çàd les négations de théorèmes). Rien n'interdit *a priori* qu'un énoncé donné ne soit ni prouvable ni réfutable[1], ou encore qu'il soit prouvable *et* réfutable. Dans ce dernier cas, un tel énoncé équivaut (ludiquement) à l'absurde $\perp$ et est appelé une *contradiction* : on peut en déduire, *via* la tautologie $\perp \Longrightarrow C$ établie (à la question 1) où C est une pièce creuse, n'importe quel énoncé que l'on mettrait dans la pièce creuse C. En particulier, chaque énoncé est prouvable *ainsi que sa négation*, ce qui ruine le jeu mathématique : tout et son contraire est théorème, l'édifice mathématique s'écroule dans une mare d'indifférencié et perd sa consistance.

4. La pièce $P \Longrightarrow Q$ est injouable uniquement dans le cas où P est jouable et pas Q, cas précisément exclu par l'hypothèse de l'énoncé.

   Réciproquement, si les pièces P et $P \Longrightarrow Q$ sont jouables, alors la pièce Q l'est aussi : c'est la règle du *modus ponens* vue en cours.

5. Supposons E jouable. Alors la pièce-implication $E \Longrightarrow F$ est jouable si F l'est et pas jouable sinon, d'où l'équivalence ludique désirée.

   Si P n'est pas jouable, alors la pièce-implication $P \Longrightarrow U \wedge V$ est jouable (car à prémisse injouable), d'où la jouabilité de la pièce-implication $\left\{ \begin{array}{l} P \Longrightarrow U \\ P \Longrightarrow V \end{array} \right. \Longrightarrow (P \Longrightarrow U \wedge V)$ (car à conclusion jouable). Dans le cas contraire, vu l'équivalence ludique de chaque pièce-implication $P \Longrightarrow ?$ avec sa conclusion (*cf.* paragraphe précédent), la grosse pièce-implication équivaut ludiquement à $\left\{ \begin{array}{l} U \\ V \end{array} \right. \Longrightarrow (U \wedge V)$, ce qui une tautologie de la forme $Q \Longrightarrow Q$. On en conclut la jouabilité désirée.

[1] Et il y en a, par exemple la commutativité en théorie des symétries (preuve : il y a des groupes commutatifs et il y a des groupes non commutatifs).