

# Sur quelques jouabilités

(pour s'exercer à établir des caractères tautologiques)

Les pièces ludique et ennuyeuse seront resp. notées  $\top$  et  $\perp$  (imaginer un "J" à l'endroit ou l'envers dont on a retiré le bout arrondi).

Les pièces creuses seront dénotées par des lettres latines minuscules  $a, b, c, \dots$

*Rappeler les tables de jouabilité des six connecteurs d'implication, équivalence, absurdité, conjonction, disjonction et incompatibilité.*

*Pour chacune des quatorze pièces-implications suivantes, proposer une interprétation, un "guide intuitif", qui rende manifeste sa jouabilité, puis établir cette dernière :*

- deux pièces pour l'implication :

$$a \implies (p \implies a)$$

$$[a \implies (p \implies q)] \implies [(a \implies p) \implies (a \implies q)] \quad ;$$

- trois pièces pour l'équivalence :

$$(a \iff b) \implies (a \implies b)$$

$$(a \iff b) \implies (b \implies a) \quad ;$$

$$(a \implies b) \implies [(b \implies a) \implies (a \iff b)]$$

- trois pièces pour l'absurdité :

$$a \implies \neg\neg a$$

$$\neg\neg a \implies a \quad ;$$

$$(a \implies b) \implies (\neg b \implies \neg a)$$

- trois pièces pour la conjonction :

$$a \wedge b \implies a$$

$$a \wedge b \implies b \quad ;$$

$$a \implies (b \implies a \wedge b)$$

- trois pièces pour la disjonction :

$$a \implies a \vee b$$

$$b \implies a \vee b \quad .$$

$$\neg a \implies (a \vee b \implies b)$$

**Remarque.** Ces quatorze pièces-implications sont historiquement celles choisies par David HILBERT comme base du jeu de preuve des propositions (aussi appelé *calcul propositionnel*). Leur intérêt est le suivant : on peut montrer que chaque pièce jouable est la dernière d'une liste<sup>1</sup> de pièces jouables dont chacune

- ou bien est l'un de ces 14 axiomes – où l'on a éventuellement rempli certaines pièces creuses par d'autres pièces ;
- ou bien est conclusion d'une pièce implication qui apparaît – ainsi que sa pièce-prémisse – avant dans la liste.

---

<sup>1</sup>une telle liste est alors appelé une *preuve* de la pièce-jouable considérée, laquelle est aussi appelée un *théorème*