Langage mathématique

Marc SAGE

janvier-mai 2020

Table des matières

1 résumé des épisodes précédents

Après avoir rappelé la *polysémie* et la différence *signifiant-signifié*, le début du cours a précisé trois sphères de la connaissance :

1. une sphère ***primitive***, munie de concepts *sommaires*, *efficaces* et *en devenir*, dont la seule fin est de rendre l'action possible : objets, qualités, logique rudimentaire, vérité, causalité, preuve... À ce stade, on ne se demande ni comment ni pourquoi on connaît, cela n'aurait aucun sens : la connaissance se fonde *dans l'action même*, comme l'on démontrerait le mouvement en marchant. Toutefois, on raisonne bien dans cette sphère et c'est sur ce raisonnement (bien qu'imparfait, rudimentaire et mouvant) que repose tout ce qui suit.

   « Car nous savons — non d'une connaissance absolue et toujours infaillible, mais de façon toute pratique et de manière à pouvoir agir en conséquence — *nous savons que nos idées sur le monde des objets physiques méritent d'être crues.* Elles nous trompent rarement si nous n'en forçons pas la portée. »[1]

2. une sphère ***idéale***, obtenue en *idéalisant* les éléments de la sphère primitive : points, droites, plans et relations géométriques, nombres et opérations correspondantes, ensembles, vérité, nécessité... Il n'y a ici plus aucune trace des imperfections, manques et caractères changeant des éléments primitis qui les ont engendrés : ces éléments idéaux sont parfaits, absolus, fixés à jamais.

   Problème : cette idéalisation est propre à chacun (comme l'est notre vision de la réalité), et par conséquent on ne peut moins objective : comment dans ces conditions accéder au "vrai objectif" si l'on n'est pas divinement frappé par la vérité des propriétés considérées ? La notion de preuve peut nous servir (est vrai ce qui est prouvé à partir de vrai antérieur) mais bute sur les vérités premières (appelés axiomes, par définition *improuvables*), de la même façon que la prétention à connaître les objets par une tour de définitions se heurtera aux *indéfinissables* de ses fondations. Or l'histoire a montré à plusieurs reprises[2] le danger à prendre ces axiomes pour vérités acquises, absolues et éternelles : danger pour la connaissance bien sûr mais également danger pour les êtres humains qui voient leur vision du monde voler en éclats.

   Car – oui ! – la sphère idéale est bien affaire de *croyances* :

   (a) croyance en les **objets**,
   (b) croyance en les **propriétés** qu'ils vérifient,
   (c) croyance en la **nécessité logique** établissant ces propriétés.

   Des croyances qui nous animent (c'est vital !) mais qui ne doivent ni être érigées en dogmes ni (ce serait pire) être induites, propagées consciemment ou non aux jeunes apprenants.

3. une sphère ***formelle***, obtenue en ne gardant des preuves et définitions idéales que leur *forme*, leur signifiant, sorte de coquille vide prête à accueillir toute interprétation (en particulier celle idéale qui lui a donné naissance, qui l'a justement *formée*). Chaque langue véhicule du sens, qui demeure *in fine* propre à chacun grâce à son entendement, en s'appuyant sur des formes faisant consensus (graphèmes, phonèmes...) mais qui tolère parfaitement l'ambigüité (polysémie) et dont les règles d'usage (la grammaire) peut parfois sembler arbitraire[3]. De même, la langue mathématique possède une grammaire qui lui est propre et qui est autant arbitraire qu'elle a une histoire (justifiant cet arbitraire), grammaire qui tolère elle aussi la polysémie et respecte l'interprétation-vision de chacun tout en fournissant un moyen consensuel de trancher – là cesse l'analogie avec les langue usuelles – sur d'éventuelles divergences d'opinions. Si "le sens" demeure au fond le plus important, la forme prend en mathématique une part prédominante dans l'apprentissage, reléguant les discussions de fond sur le terrain des visions et croyances[4]. Avant de pouvoir un jour participer pleinement à ce front passionnant, il convient à l'étudiant de *maîtriser les règles du jeu formel* – car il s'agit simplement et bien d'un *jeu* dont les règles sont librement choisies, motivées par les sphères primitives et idéales. Quitte à les adapter par la suite – voire les réformer ! – si de nouvelles formes se relevaient plus adéquates au contexte et aux visions d'alors.

---

[1] Ferdinand Gonseth, *Les mathématiques et la réalité* (1936), §6

[2] trois fois au moins : 1) l'irrationalité de $\sqrt{2}$ a provoqué une crise existentielle chez les Pythagoriciens pour qui tout était nombre rationnel 2) la mise à jour des géométries non euclidiennes a ruiné notre prétention à vouloir démontrer le cinquième postulat d'Euclide 3) enfin l'antinomie de Russell a pulvérisé une des lois fondamentales (la cinquième) de "la" logique telle que la concevait Frege, emportant au passage une majeure partie de son travail (et de sa vision du monde)

[3] ouvrir un manuel de grammaire française pour s'en convaincre

[4] Ce n'est rien retirer de la valeur de ces dernières, bien au contraire : il suffit de lire certains écrits d'Alexandre Grothendieck pour se convaincre de la force avec laquelle sa vision du monde a impacté la mathématique à partir des années 1950.

Nous chercherons à pouvoir formaliser (= rendre formel, mettre en forme) un énoncé du type « les carrés de nombres réels sont les réels positifs » ou encore « l'équation de FERMAT n'a que des solutions triviales quand son exposant dépasse 3 », et réciproquement à interpréter des énoncés formels tels que

$$\forall c,\ [c \geq 0 \Longleftrightarrow \exists r,\ c = r \times r] \qquad \text{ou encore}$$
$$\forall n,\ n \geq 3 \Longrightarrow\ \neg \left[\exists a, b, c,\ \left\{ \begin{array}{l} a\hat{}n + b\hat{}n = c\hat{}n \\ a, b, c \geq 1 \end{array} \right. \right].$$

Nous cherchons par ailleurs à définir clairement ce que veut dire (en mathématique) *prouver* un tel énoncé, ce qui reviendra à décrire le *jeu de preuve* de ces énoncés (appelés ***prédicats***[5]). Les deux exemples ci-dessus ayant par ailleurs une forme indépendante des relations y apparaissant, à savoir

$$\forall c,\ [P \Longleftrightarrow \exists r,\ Q] \text{ et } \forall n,\ A \Longrightarrow\ \neg \left[\exists a, b, c,\ \left\{ \begin{array}{l} E \\ F \end{array} \right. \right],$$

il conviendra d'explorer d'abord le jeu avec ces formes-propositions indépendantes de leur contenus.

2 jeu de preuve avec les propositions

2.1 création du matériel

Le matériel du jeu est constitué de pièces de bases (appelées ***atomes***) et de sacs (appelés ***assembleurs***) permettant de construire de nouvelles pièces (dite ***moléculaires*** ou ***assemblées***) à partir d'autres pièces[6].

Parmi les pièces atomiques, deux pièces singulières se distinguent :

1. la pièce dite ***ludique***[7] et notée J ("J" de "**J**eu") ;
2. la pièce dite ***ennuyeuse***[8] et notée $\perp$ (comme un "J" retourné ayant fait un demi-tour autour de son centre).

Les autres pièces atomiques sont dites ***creuses***[9] et notées alors selon des conventions À PRÉCISER, le plus souvent des lettres latines $A, B, C...P, Q, R...p, q, r...$

Les sacs assembleurs servent à assembler plusieurs pièces pour en former une nouvelle. Leur liste est également À PRÉCISER[10] mais sera le plus souvent extrait de la suivante :

1. l'assembleur ***implication*** ou ***conditionnel*** noté $\Longrightarrow$ ou $\supset$, symboles prononcés "***implique***" ;
   Dans une pièce-implication $p \Longrightarrow q$, les pièces p et q peuvent être appelées resp.
   (a) ***prémisse***[11] et ***conclusion***,
   (b) ***hypothèse***[12] et ***thèse***[13],
   (c) ***antécédent***[14] et ***conséquent***[15].
2. l'assembleur ***conjonction***, noté $\wedge$, & ou encore avec une accolade comme dans $\left\{ \begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right.$, symboles prononcés "***et***" ;
3. l'assembleur ***disjonction***[16] ou ***alternation***, noté[17] $\vee$, symbole prononcé "***ou***" ; il se note également avec une accolade précisée d'un "ou" : $\left\{ \text{ou} \begin{array}{l} p \\ q \end{array} \right.$;

[5] ***Prédiquer***, c'est se donner la possibilité de dire si un sujet se soumet ou non à une condition (appelée justement ***prédicat***). Les prédications généralisent ainsi les équations (cas où le prédicat est l'égalité).
[6] en particuliers à partir des pièces atomiques, d'où par extension le qualificatif "*moléculaire*" (une molécule étant formée d'atomes)
[7] "ludique" est l'adjectif relatif à "jeu"
[8] sa présence dans le jeu de la preuve prédicative ruinera complètement le jeu, le rendant sans aucun intérêt, d'où le qualificatif "*ennuyeux*"
[9] le creux est destiné à être rempli par des pièces-prédicats à venir
[10] les noms, symboles et prononciations utilisés varient selon les auteurs
[11] ce qui est mis avant (du latin *praemittere* « envoyer devant ou préalablement »)
[12] *hypo*-thèse, ce qui est *en dessous de* la thèse
[13] la *thèse* est ce qui est affirmé en fin de compte, c'est la conclusion ! (bien sûr soumise à l'hypothèse)
[14] *anté*cédent = ce qui vient *avant*
[15] con-séquent = avec suite = ce qui suit = ce qui découle de
[16] "disjonction" évoque "disjoint" et ainsi "exclusif", ce qui détourne notre intuition de l'aspect *inclusif* du "ou"
[17] Le symbole $\vee$ est la première lettre v du latin "*vel*" (prononcer "well") signifiant "ou" (dans le sens *inclusif*)

4. l'assembleur ***négation*** ou ***impossibilité*** ou ***absurdité***, noté $\neg$, $\sim$ ou encore avec une barre coiffante comme dans $\overline{p}$, symboles prononcés "***non***" ;
5. l'assembleur ***implication réciproque***, noté $\Longleftarrow$ ou $\subset$, symboles prononcés "***est impliqué par***" ;
6. l'assembleur ***équivalence***, noté $\Longleftrightarrow$ ou $\equiv$, symboles prononcés "***équivaut à***" ;
7. l'assembleur ***incompatibilité***, noté $\uparrow$ ou $|$, symboles prononcés[18] "***nand***" ;
8. l'assembleur ***exclusion***, noté $\downarrow$ ou $|$, symboles prononcés[19] "***nor***" ;

Un exemple. La pièce

$$\left\{\begin{array}{l} p \Longrightarrow q \\ [\neg q \Longrightarrow \bot] \uparrow s \end{array}\right. \Longleftarrow \overline{p}$$

est une pièce-[implication réciproque] dont

1. la prémisse (à droite) est la pièce-négation de la pièce creuse p et
2. la conclusion $(p \Longrightarrow q) \wedge ([\neg q \Longrightarrow \bot] \uparrow s)$ est une pièce-conjonction dont
   (a) la première pièce conjointe $p \Longrightarrow q$ est une pièce-implication assemblant les pièces creuses p et q et
   (b) la seconde pièce conjointe $[\neg q \Longrightarrow \bot] \uparrow s$ est une pièce-incompatibilité dont
      i. la deuxième pièce incompatible est la pièce creuse s et
      ii. la première pièce incompatible $\neg q \Longrightarrow \bot$ est une pièce-implication dont
         A. l'antécédent est la pièce-impossibilité de la pièce creuse q et
         B. le conséquent la pièce ennuyeuse $\bot$.

Chaque assembleur assemble un certain nombre de pièces, nombre appelé l'***arité*** de l'assembleur. Par exemple, les assembleurs $\wedge$ et $\Longleftarrow$ sont ***binaires*** (ou ***dyadiques***) tandis que l'assembleur $\neg$ est ***singulaire*** (ou ***monadique***[20]). On pourrait ainsi imaginer des assembleurs n-aires (ou n-adiques[21]) pour chaque entier primitif n.

L'exemple ci-dessus montre

l'utilisation de parenthèses pour lever les ambigüités d'ordre.

En effet, les symboles $a \Longrightarrow b \Longrightarrow c$ peuvent dénoter deux pièces moléculaires différentes, à savoir $a \Longrightarrow (b \Longrightarrow c)$ et $(a \Longrightarrow b) \Longrightarrow c$. On pensera les parenthèses comme des enveloppes (ou des sac bien fermés) permettant ainsi de manipuler une seule pièce : c'est plus facile pour l'assemblage ! Par exemple, les deux dernières pièces pourraient tout à fait se réécrire $a \Longrightarrow \boxed{b \Longrightarrow c}$ et $\boxed{a \Longrightarrow b} \Longrightarrow c$. De même, la grosse pièce ci-dessus se réécrirait

$$\boxed{\boxed{p \Longrightarrow q} \wedge \boxed{\boxed{\boxed{\boxed{\neg \boxed{q}} \Longrightarrow \bot} \uparrow s}}} \Longleftarrow \boxed{\neg p}.$$

Remplacer les sacs $\boxed{P}$ par des parenthèses (P) permet déjà l'alléger les écritures. On peut encore alléger en usant de **conventions de priorité** :

sont prioritaires par ordre décroissant les assembleurs $\neg \ \wedge \ \vee \ \substack{\Longleftarrow \\ \Longleftrightarrow}$

(dans le doute, laisser les enveloppes pour $\wedge$ et $\vee$).

[18] la flèche $\uparrow$ peut être vue comme un symbole $\wedge$ ("et", en anglais "and") barré par une barre verticale $|$, d'où son interprétation en tant que négation d'une conjonction et sa prononciation "not-and" contractée en "nand"

[19] la flèche $\downarrow$ peut être vue comme un symbole $\vee$ ("ou", en anglais "*or*") barré par une barre verticale $|$, d'où son interprétation en tant que négation d'une alternation et sa prononciation "*not-or*" contractée en "*nor*"

[20] Le grec a donné les qualificatifs "monadique", "dyadique", "triadique", "tétradique", "pentadique"...

[21] Comme le rappelle W. V. O. QUINE dans *Mathematical Logic* (1940, 1983), la série d'adjectifs "binaire", "ternaire", "quaternaire", "quinaire"... laissent les mathématiciens perplexes quand $n = 1$. Il est habituel de balbutier quelque bricolage de fortune comme "unaire" ou "unuaire" ou "unitaire". Mais le mot juste est évident si l'on se souvient que la suite des distributifs latins "*bini*", "*terni*", "*quaterni*", "*quini*"... commence par "*singuli*".

2.2 avec quelles pièces jouer

Sera qualifié de ***jouable*** chaque pièce avec qui l'on pourra jouer. Mais qui choisir ? Sur quels critères ?

Guide intuitif. Une fois remplies, les pièces vont *dire quelque chose*, seront des *propositions*[22], à l'instar de

« d'une part, si l'entier 2 est réel, alors son carré est positif, d'autre part le nombre π est rationnel »,

proposition qui remplit les pièces creuses de la pièce-conjonction $(a \Longrightarrow b) \wedge q$ et interprète les assembleurs $\wedge$ et $\Longrightarrow$.

Pour chaque pièce P, notons $\lceil P \rceil$ ce que[23] dit P Nous pouvons alors nous appuyer sur les interprétations suivantes (où P et Q dénotent des pièces) :

1. $\lceil P \wedge Q \rceil$ est : $\lceil P \rceil$ et $\lceil Q \rceil$, ce dernier "et" faisant partie de notre sphère primitive et ne posant donc aucun problème ;
2. $\lceil P \vee Q \rceil$ est : $\lceil P \rceil$ ou $\lceil Q \rceil$ ou les deux à la fois (de même que pour $\wedge$, les "ou" sont aussi clairs que toute notion de notre sphère primitive) ;
3. $\lceil \neg P \rceil$ est : $\lceil P \rceil$ est impossible, au sens primitif où l'admettre conduirait à des contradictions, où se comporter comme si $\lceil P \rceil$ serait absurde ;
4. $\lceil P \Longleftrightarrow Q \rceil$ est : $\lceil P \rceil$ et $\lceil Q \rceil$ reviennent au même, sont interchangeables dans le discours ;
5. $\lceil P \uparrow Q \rceil$ est : $\lceil P \rceil$ et $\lceil Q \rceil$ sont incompatibles, au sens où l'on ne peut avoir les deux à la fois ,
6. $\lceil P \downarrow Q \rceil$ est : $\lceil P \rceil$ et $\lceil Q \rceil$ sont exclus, au sens où l'on n'a aucun des deux ;
7. $\lceil P \Longrightarrow Q \rceil$ est : si $\lceil P \rceil$ alors $\lceil Q \rceil$.

Ce guide intuitif n'est qu'un *guide* à destination de notre intuition, censé nous aider à mettre du sens dans ce jeu de pièces-propositions, à motiver la terminologie, à comprendre les règles du jeu adoptées par la suite à partir de notre expérience dans la sphère primitive. Il n'a aucune autre prétention à *prouver* quoi que ce soit – il en serait d'ailleurs bien incapable ! – bien qu'il puisse être utilisé dans un premier temps pour idéaliser cette expérience (dans la sphère idéale). Nous passons de suite au deuxième temps : celui de la formalisation (au sein de la sphère du formalisable).

Retour à notre question. Pour déterminer la jouabilité d'une pièce, une démarche possible est se ramener à celle des "sous-pièces" qui la composent afin de reporter la question sur la jouabilité des pièces atomiques.

On décide pour commencer que la pièce ludique J est jouable[24] et que la pièce ennuyeuse $\perp$ ne l'est pas.

Ensuite, on évalue la jouabilité d'une pièce-assemblage en fonction UNIQUEMENT de celles des pièces assemblées et de l'assembleur concerné (notons-le @), ce que l'on peut présenter sous forme d'un tableau appelé ***table de jouabilité*** de l'assembleur @. Le principe d'évaluation ainsi adopté[25] s'appelle *ludo-fonctionnalité*, au sens de "qui est fonction uniquement de la jouabilité".

Voici par exemple la table de jouabilité de l'incompatibilité, où les pièces ludique J et ennuyeuse $\perp$ abrègent resp. "jouable" et "pas jouable" :

$P \diagdown Q$	J	$\perp$
J	$\perp$	J
$\perp$	J	J

.

table de jouabilité de $P \uparrow Q$

Insistons : ce "Voici" *n'est pas* une affirmation à prouver ! C'est une *définition* motivée par le guide intuitif ci-dessus en choisissant pour $\lceil P \rceil$ l'énoncé "la pièce P est jouable".

Comment obtenir les tables de jouabilité des autres assembleurs ? S'aider du guide intuitif précédent conduirait aux tables suivantes :

P	J	$\perp$
$\neg P$	$\perp$	J

table de jouabilité de l'impossibilité $\neg P$

$P \diagdown Q$	J	$\perp$
J	J	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$

table de jouabilité de la conjonction $P \wedge Q$

$P \diagdown Q$	J	$\perp$
J	J	J
$\perp$	J	$\perp$

table de jouabilité de l'alternation $P \vee Q$

$P \diagdown Q$	J	$\perp$
J	J	$\perp$
$\perp$	$\perp$	J

table de jouabilité de l'équivalence $P \Longleftrightarrow Q$

$P \diagdown Q$	J	$\perp$
J	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	J

table de jouabilité de l'exclusion $P \downarrow Q$

.

[22] heureux hasard : P comme "**p**ièce" et comme "**p**roposition" !

[23] Gare à la *polysémie* : "le" sens de $\lceil P \rceil$ dépend hautement de l'interprétation que l'on fait de P et n'est donc absolument pas unique !

[24] ce qui motive rétrospectivement le choix de son nom

[25] il est bien *adopté* et non *vrai par essence divine*, on pourrait tout à fait choisir d'autres façons d'évaluer la jouabilité (et d'autres façons de faire de la logique)

La table de jouabilité de l'implication. Il est clair, d'après notre guide, qu'on ne saurait avoir une implication et sa prémisse sans sa conclusion (case remplie $\perp$). Par ailleurs, le sens primitif *et pragmatique* d'une implication est de s'appliquer sur une prémisse vérifiée pour en déduire la conclusion : si la conclusion est déjà vérifiée, inutile de s'encombrer d'un intermédiaire pour l'établir – et si la prémisse n'est jamais réalisée l'implication devient carrément inutil*isable*. Affirmer une telle implication revient par conséquent à *ne rien dire du tout* (son sens est *vide*), ce que l'on tolérera volontiers, tout comme l'on dirait qu'un mobile qui ne bouge pas est de vitesse *nulle* afin d'harmoniser le discours.

$P \diagdown Q$	J	$\perp$
J	?	$\perp$
$\perp$	?	?

table de jouabilité de l'implication $P \Longrightarrow Q$

$P \diagdown Q$	J	$\perp$
J	J	$\perp$
$\perp$	J	J

Une autre raison de décider jouable une pièce-implication en dehors du cas $J \Longrightarrow \perp$ est la suivante. Dans la sphère primitive, on a fortement envie, à partir d'une conjonction d'énoncés, de pouvoir affirmer le premier énoncé, envie qui se traduit par la jouabilité sans condition de la pièce-implication $a \wedge b \Longrightarrow a$. En particulier, lorsque b n'est pas jouable, la pièce-conjonction $a \wedge b$ ne l'est pas non plus ; par *ludo-fonctionnalité*, la pièce-implication $P \Longrightarrow Q$ doit donc être jouable dès que sa prémisse ne l'est pas. De même, si l'on désire la jouabilité inconditionnelle de la pièce-alternation $a \Longrightarrow a \vee b$, en imposant b jouable, la pièce-implication $P \Longrightarrow Q$ devra être jouable dès que sa conclusion l'est.

Algorithme de décision pour la jouabilité. Dans ce cours, on choisit un seul assembleur, l'incompatibilité $\uparrow$, puis on définit les autres assembleurs à partir de ce dernier[26]. Ainsi, pour chaques pièces P et Q :

1. $\neg P$ et $\overline{P}$ dénoteront-ils $P \uparrow P$;
2. $P \wedge Q$ dénotera-t-il $\overline{P \uparrow Q}$;
3. $P \vee Q$ dénotera-t-il $\overline{P} \uparrow \overline{Q}$;
4. $P \Longrightarrow Q$ dénotera-t-il $P \uparrow \overline{Q}$;
5. $P \Longleftarrow Q$ dénotera-t-il $Q \Longrightarrow P$;
6. $P \Longleftrightarrow Q$ dénotera-t-il $\left\{\begin{smallmatrix} P \Longrightarrow Q \\ P \Longleftarrow Q \end{smallmatrix}\right.$.

La lectrice est encouragée à retrouver les tables de jouabilité ci-dessus.

Remarquer comment le vocabulaire respecte admirablement bien notre définition de l'implication : affirmer une implication, c'est nier la situation où l'on a la prémisse sans la conclusion !

L'algorithme est alors le suivant. Donner une valeur de jouabilité (J ou $\perp$) à chaque pièce creuse puis utiliser les tables de jouabilité des assembleurs pour évaluer la jouabilité globale : si l'on trouve toujours J (resp. $\perp$), la pièce étudiée est dite ***jouable*** (resp. ***injouable***).

Exemples – exercices. Étudier les jouabilités des pièces suivantes :

$$\neg\neg J \qquad a \Longrightarrow J \qquad a \wedge \neg a \qquad a \Longleftrightarrow \neg a \qquad \perp \Longrightarrow a \qquad \neg a \Longleftrightarrow (a \Longrightarrow \perp) \qquad \neg (a \wedge b) \Longleftrightarrow \neg a \vee \neg b.$$

Quatre remarques importantes.

1. (*modus ponens*) si les deux pièces P et $P \Longrightarrow Q$ sont jouables, alors la pièce Q aussi ;
2. (*disjonction des cas*) si la pièce $\left\{\begin{array}{l} P \vee Q \\ P \Longrightarrow C \\ Q \Longrightarrow C \end{array}\right.$ est jouable, alors la pièce C aussi ;
3. (*contraposition*) si la pièce $P \Longrightarrow Q$ est jouable, alors la pièce $\neg Q \Longrightarrow \neg P$ aussi (cette dernière est appelée la ***contraposée*** de la pièce $P \Longrightarrow Q$).
4. (*stabilité de la jouabilité par substitution*) quand une pièce est jouable, remplacer n'importe laquelle de ses pièces creuses par n'importe quelle pièce ne change pas la jouabilité.
   (Par exemple, de la jouabilité de $a \Longrightarrow a$ découle celle de $b \wedge \overline{c} \Longrightarrow b \wedge \overline{c}$)

[26] On pourrait montrer que l'incompatibilité et l'exclusion sont les deux seuls assembleurs qui permettant d'exprimer tous les autres (toujours sous le principe de ludo-fonctionnalité).

2.3 "égalité" des pièces-propositions

Dans un calcul tel $\sqrt{(1+1)^3+1} = \sqrt{2^3+1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$, on a utilisé le fait suivant :

dans une "expression" contenant un "terme",
quand l'on remplace ce dernier par un terme qui l'égale,
on obtient une expression égalant la première.

Voyons la notion analogue à cette "égalité préservée par substitution".

Définition. *Considérons P et Q deux pièces. Elles sont qualifiés de* ***ludiquement équivalentes*** *si l'on peut jouer avec la pièce-équivalence $P \iff Q$. Cette relation sera alors notée*[27] *dans ce cours P éq Q.*

Fait (admis). *Considérons A, B, P trois pièces, avec A et B ludiquement équivalentes, telles que A apparaît dans (l'assemblage de) la pièce P. Alors P équivaut ludiquement à la pièce obtenue à partir de P en y remplaçant n'importe quelle occurrence*[28] *de A par B.*

Cette affirmation sera à démontrer en DM.

Intérêt-Application. Peut-on jouer avec la pièce $(a \Longrightarrow b) \vee (\neg\neg a \Longleftarrow J)$? Il suffit pour répondre d'établir son équivalence ludique avec une pièce dont la jouabilité sera plus claire[29]. Or on a les équivalences ludiques suivantes :

$$
\begin{array}{rl}
 & (a \Longrightarrow b) \vee (\neg\neg a \Longleftarrow J) \\
\text{éq.} & (\overline{a} \vee b) \vee (a \Longleftarrow J) \\
\text{éq.} & (b \vee \overline{a}) \vee (a) \\
\text{éq.} & b \vee (\overline{a} \vee a) \\
\text{éq.} & b \vee (J) \\
\text{éq.} & J, \text{ laquelle pièce est jouable,}
\end{array}
$$

d'où la jouabilité de la pièce de départ. Nous laissons à la lectrice le soin d'établir les sept équivalences ludiques utilisées dans le calcul ci-dessus, ainsi que proposer une interprétation de la pièce de départ qui rende limpide sa jouabilité.

Remarque. Un calcul, c'est un petit caillou (pensez aux calculs rénaux !). Calculer, c'est jouer avec des petits cailloux, et cet acte est également appelé *calcul*. Le calcul peut être utilisé pour compter ou effectuer des opérations numériques plus complexes. En pratique, calculer veut dire simplifier, mettre sous une forme convenable ou du moins plus exploitable. C'est en ce sens que la suite d'équivalences ludiques ci-dessus fait partie du *calcul propositionnel*.

Exercices. Montrer les trois équivalences ludiques suivantes :

$$a \Longrightarrow b \quad \text{éq.} \quad \overline{a \wedge \neg b} \qquad\qquad J \Longrightarrow e \quad \text{éq.} \quad e \qquad\qquad p \wedge (q \wedge r) \quad \text{éq.} \quad (p \wedge q) \wedge r$$

2.4 dictionnaire

Pour se comprendre avec les autres matheux, il convient d'adapter le vocabulaire de ce cours[30]. Pour cela,

il suffit à la place de "jeu" de penser "*jeu de preuve*" et de
remplacer partout le champ lexical du jeu par celui de la preuve.

[27] Encore une fois les usages sont multiples, certains notent par exemple $A \equiv B$ pour rappeler l'égalité numérique $a = b$. Pour notre part, nous préférons ne pas mélanger la langue primitive (dans laquelle a été définie l'équivalence ludique) et le langage formel qui contiendra volontiers des symbole comme $=$ ou $\equiv$.

[28] *i. e.* un endroit où apparaît

[29] *Analogue numérique* : pour déterminer le signe d'un nombre, il suffit d'établir son égalité avec un nombre dont le signe est plus clair à lire.

[30] Signalons un néologisme de notre part : la *ludo*-fonctionnalité (dépendance uniquement en le caractère jouable). Nous n'aurons pas besoin de son homologue *prouval* (la dépendance uniquement en le caractère *prouvable*).

Le tableau qui suit appelle à quelques commentaires :

terminologie de ce cours (jeu)	terminologie juste (preuve)	terminologie courante (à éviter)
jeu de preuve propositionnel		calcul propositionnel
une pièce	une proposition	
une pièce creuse	une proposition instanciable	une variable propositionnelle
un sac assembleur	un connecteur logique	
la pièce ludique (notée J)	le tautologique (noté $\top$)	le vrai (noté $\mathbb{V}$)
la pièce ennuyeuse	l'absurde, le contradictoire, l'impossible (notée $\perp$)	le faux (noté $\mathbb{F}$)
jouable ou injouable	prouvable ou réfutable	valeur de vérité : vrai ou faux
ludo-fonctionnalité		véri-fonctionnalité
table de jouabilité	table de prouvabilité	table de vérité
une pièce jouable	un théorème propositionnel ou une tautologie	une proposition toujours vraie
une pièce injouable	une antilogie	une proposition toujours fausse
ludiquement équivalentes	prouvablement équivalentes	logiquement équivalentes

Commentaires :

1. Dans la colonne du milieu, on devrait parler plutôt de *symbole de* proposition, de *symbole de* connecteur logique, etc., car on ne manipule que des formes, des signifi*ants* ! On tolérera toutefois, *sous réserve d'en avoir pleinement conscience*, l'identification abusive et usuelle du signifiant et du signifié. On dira par exemple "Soient P et Q deux propositions" pour dire "Supposons que les lettres P et Q dénotent deux propositions".
2. L'interprétation en termes de variables / vrai / vérité (troisième colonne) fait partie du langage usuel en logique mais induit des croyances ressortant de la sphère idéale qui n'ont pas leur place dans ce cours qui prétend évacuer tout relent métaphysique. De même, au lieu d'un dualité idéale *vrai-faux* excluant toute tierce alternative, on a un duo *prouvable-réfutable* qui laisse place aux alternatives (ni prouvable ni réfutable, prouvable et réfutable...) au lieu des confusions "vrai mais improuvable" que l'on peut rencontrer.
3. Quant au champ lexical de "variable" : une variable étant destinée à être fixée, on devrait à la rigueur l'appeler "fixable". Or son utilisation en pratique consiste à pouvoir être remplacée par un symbole de proposition, appelé alors *instance*[31]de la "fixable", d'où le nom plus juste d'*instanciable*. On rencontre également le qualificatif *générique*, évoquant la capacité à recevoir n'importe quelle valeur possible.

3 jeu de preuve avec les prédicats

Idée : remplacer les pièces creuses par des pièces-*prédicats*, qui vont prédiquer sur des objets (les *termes* du langage, ce dont il parle), *i. e.* permettre de dire si ces objets vérifient ou non une certaine condition (le *prédicat* en question).

Par exemple, considérer une équation, c'est se donner la possibilité de dire si deux objets sont égaux ou non[32]. Il s'agit d'une prédication associée au prédicat d'égalité.

3.1 création du matériel : termes, prédicats, énoncés

pions-***termes***

1. atomique
   (a) ***individu*** eg $1, 0, 3, 2$ $\emptyset$
   (b) ***évocable*** souvent des lettres du *début* de l'alphabet : a, b, c...

[31]Dans un groupement fini de symboles, remplacer certains de ces symboles chacun par un groupe de symboles est appelé ***instancier***, le résultat de cet acte (l'***instanciation***) est une ***instance***. Pourquoi cette terminologie ? Une instance d'une formule, c'est la *forme* ***instant****anée* que prend celle-ci à un moment du discours, c'est la forme locale qu'elle revêt dans le contexte considéré – moment ou contexte donné par les substitutions.

[32]la résoudre est une autre histoire

(c) ***générique*** (ou ***quantifiable***) souvent des lettres de la *fin* de l'alphabet : x, y, z...

2. moléculaire composé de pions-atomes via un sac de ***composition*** (ou d'***opération***)

EG $(x+1) * 0 + 3\hat{\ }2$ $(\mathfrak{P}(A) \cap E) \backslash (X \cup \emptyset)$

guide intuitif :

1.
   (a) Les (symboles d')*individus* seront comme des *noms propres*, ils renvoient chacun à quelque objet singulier (et à personne d'autre). EG : *le* nombre 0, *l*'ensemble vide $\emptyset$, *le* vecteur nul $\overrightarrow{0}$...
   (b) Les *évocables* sont destinés à être *évoqués* (*via* "soit *a*..."). Une fois évoqués, on peut les voir comme des individus pour le reste du discours. Retenir : *évoqué* $\Longrightarrow$ *fixé !*
   (c) Enfin les *génériques* sont destinés exclusivement à être *quantifiés* (eg $\forall x,\ x \geq 0$) et n'ont aucun sens en dehors d'une quantification, il ne désignent aucun individu, ils sont muets. Retenir : *aucun générique hors d'une quantification !*
2. Les sacs de *composition* codent les *opérations* que l'on aurait envie d'effectuer entre termes afin d'en créer, d'en *composer* de nouveaux : par exemple additionner deux nombres, intersecter trois ensembles, diviser par deux un vecteur...

Remarque importante (matériel réplicable). On peut réutiliser chaque pion atomique et chaque sac de composition autant de fois que l'on veut ! Et, en conséquence, chaque pion-terme également.
EG si a est un évocable, alors $(a+a) \times a$ est un terme qui utilise a trois fois.

pièce-***prédicat***

1. atomique composé de pions-termes *via* un sac de ***relation***.
   EG : $x+1=4$, $7\hat{\ }a \leq a\hat{\ }7$, $\emptyset \subset X \cap \mathfrak{P}(A)$...
2. moléculaire
   (a) ***connectante*** composée de pièces prédicats via un sac-assembleur (du jeu propositionnel)
   (b) ***quantifiante*** composée d'une pièce-prédicat mise dans un sac-quantifiant

$$\Diamond x,\ P$$

   où $\Diamond$ est l'un des symboles $\exists$ ou $\forall$ (appelés ***quantificateurs***[33] resp. ***universel*** et ***existentiel***) et x est un pion générique (qui n'est pas déjà quantifié dans P).

guide intuitif :

1. les sacs de relation codent les *relations* que l'on aurait envie d'établir entre termes : égalité, divisibilité entre nombre, inclusion...
2.
   (a) Un prédicat connectant *connecte* d'autre prédicats avec des connecteurs logiques pour en former d'autres.
   (b) Une quantification *universelle* (*i. e.* avec $\forall$) revient à une *conjonction* portant sur "tous" les objets, par exemple

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n^2 > 3 \text{ \textit{signifiera} } \left(0^2 > 3\right) \wedge \left(1^2 > 3\right) \wedge \left(2^2 > 3\right) \wedge \left(3^2 > 3\right) \wedge \cdots$$

   et de même avec $\exists$ et $\vee$. Évidemment, on ne peut pas expliciter ainsi quand les objets ne sont pas énumérables, eg les réels[34]... Retenir :

$$\forall \text{ est } \wedge \text{ généralisé} \qquad \exists \text{ est } \vee \text{ généralisé.}$$

[33] certains auteurs disent aussi ***quantifieurs*** ou ***quanteurs***, par exemple Jean Largeault dans *Intuition et intuitionisme* (1993)

[34] Rappelons l'argument dit *diagonal* attribué à Georg Cantor (publié en 1891 dans le Rapport annuel de l'Association allemande des mathématiciens). Partons d'une liste infinie de suites $a, b, c, d, ...$, chacune à valeurs dans $\{0,1\}$, par exemple la liste des développements binaires des réels de $[0,1[$ si l'on suppose ces réels énumérables. Abrégeons $\binom{\overline{0}}{\overline{1}} := \binom{1}{0}$. Alors la suite dite *diagonale* $\Delta := \left(\overline{a_1}, \overline{b_2}, \overline{c_3}, \overline{d_4}, ...\right)$ n'est pas dans la liste de départ puisque, pour chaque naturel n, la suite Δ et la n-ème suite de la liste diffèrent sur le n-ième bit.

(La parenthèse évite de quantifier sur x un énoncé comme $(x=2)\wedge(\forall x,\ x\neq x)$ car on ne saurait alors plus dans $\forall x,\ [(x=2)\wedge(\forall x,\ x\neq x)]$ à quel $\forall$ se rapportent les deux derniers x. Ce problème s'évite aisément en changeant de lettre générique, par exemple en remplaçant $(x=2)\wedge(\forall x,\ x\neq x)$ par $(x=2)\wedge(\forall y,\ y\neq y)$ qui peut alors se quantifier sans problème sur x.)

Remarque (langage). La donnée de pions-individus, de sacs-compositions et de sacs-relations constitue précisément un ***langage*** (deux exemples vus en cours : les symétries, les entiers naturels). S'il n'y a pas de relation, il n'y pas de prédicat ! Et le jeu est alors très ennuyeux. (En pratique, on disposera toujours au moins d'une relation d'égalité =.)

Exemples (déjà présentés)

$$\forall c,\ [c\geq 0 \iff \exists r,\ c=r\times r]$$

(*interprétations possibles* : pour chaque objet, être positif équivaut à être le produit d'un objet par lui-même ; la positivité de chaque objet équivaut à ce qu'il soit un carré ; chaque objet est positif ssi il est un carré ; les positifs sont les carrés. Cela est vrai des nombres réels mais pas des complexes ni des rationnels.)

$$\forall n,\ n\geq 3 \Longrightarrow\ \neg\left[\exists a,b,c,\ \left\{\begin{array}{l} a\hat{\ }n+b\hat{\ }n=c\hat{\ }n\\ a,b,c\geq 1\end{array}\right.\right]$$

(*interprétation possible* : pour chaque objet n supérieur à 3, il n'y pas de triplets d'objets chacun supérieurs à 1 vérifiant l'égalité du troisième à la puissance n avec la somme du premier à la puissance n et du deuxième à la puissance n. Chez les naturels, il s'agit de l'énoncé du théorème de Fermat-Wiles prouvé en 1994 après plus de 350 ans de rebondissement mathématiques et d'aventures humaines[35].

Arité, énoncés. Un prédicat possède des lettres génériques non quantifiées : leur nombre définit l'***arité*** du prédicat :

arité	1	2	3	4	5	···
adjectif latin	singulaire	binaire	tertiaire	quaternaire	quinaire	···
adjectif grec	monadique	dydique	triadique	tétradique	pentadique	···

Un prédicat d'arité au moins 1 ne peut rien exprimer car l'un de ses termes est générique : ce dernier ne veut rien dire et n'attend que d'être quantifié pour laisser place au sens.

Un prédicat d'arité nulle s'appelle un ***énoncé***[36]. *guide intuitif* : un énoncé *énonce* quelque chose, *dit* une phrase où tout fait sens pourvu que l'on interprète chaque $\left\{\begin{array}{c}\text{individu}\\ \text{évoqué}\\ \text{opération}\end{array}\right.$ et chaque $\left\{\begin{array}{c}\text{relation}\\ \text{connecteur}\\ \text{quanteur}\end{array}\right.$.

Réplicabilité. Comme pour les termes, chaque pièce est réplicable à souhait.

3.2 conventions d'écriture pour la suite

Afin de distinguer ce qui doit l'être, nous adopterons dans ce cours les conventions suivantes :

1. les lettres enluminées $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C},...$ désigneront des pièces-propositions ;
2. les lettres $E,F,...,L$ désigneront des pièces-énoncés (E comme "**É**noncé") ;
3. les lettres $P,Q,R...$ désigneront des prédicats singulaires (P comme "**P**rédicat") ;
4. la lettre o désignera un pion évocable (o comme "**o**bjet") ;
5. les lettres x,y,z désigneront des pions génériques[37] ;
6. la terme τ dénotera un terme *sans générique*[38] (τ *tau* comme "**t**erme") ;

[35] Nous renvoyons la lectrice à l'excellent livre *Le dernier théorème de Fermat* de Simon Singh (1997) qui brosse une histoire de la mathématique en suivant le fil directeur de ce théorème.

[36] Ou plus rarement une ***proposition***, une ***assertion***, une ***affirmation***, une ***thèse***, une ***allégation***. (On préférera dans ce cours réserver le terme "proposition" au jeu de preuve *propositionnel*.) *Mise en garde sémantique* : par "affirmation" on entend le *résultat* de l'acte d'affirmer et non l'acte lui-même ! *Idem* pour assertion VS asserter, affirmation VS affirmer, allégation VS alléguer.

[37] x comme une croix $\times$ signifiant un problème : impossible d'interpréter un générique comme un certain objet !

[38] *guide intuitif* : *i. e.* un terme que l'on pourrait interpréter

7. pour chaque terme t (avec ou sans générique), on notera P_t le prédicat obtenu en remplaçant par t dans P chaque occurrence non quantifiée[39] de son éventuelle lettre libre.

Par exemple, si P est $\left\{ \begin{array}{c} o+2*x=4\hat{}x \\ \forall x,\ x\geq o \end{array} \right.$, alors P_5 est $\left\{ \begin{array}{c} a+2*5=4\hat{}5 \\ \forall x,\ x\geq o \end{array} \right.$ et P_z est $\left\{ \begin{array}{c} a+2*z=4\hat{}z \\ \forall x,\ x\geq o \end{array} \right.$ (et P_x est... P !).

3.3 jeu de preuve avec les prédicats

Quatre actes du jeu prédicatif.

1. ***affirmation*** "on a E"
2. ***supposition*** "supposons E"
3. ***évocation*** "soit o"
4. ***évocation-imposition***[40] "soit o tel que que P_o"

✠ Règles d'or (sur le sens des évocables). ✠

1. Aucun évocable ne peut être utilisé *sans avoir été évoqué*[41] *au préalable.*
   Guide intuitif : un évocable non évoqué n'a aucun sens !
2. Quand on évoque un objet, on utilisera toujours un évocable *qui n'a pas déjà évoqué auparavant.*
   (C'est comme pour les quantifications : on peut utiliser un générique *qui n'est pas déjà quantifié* dans le prédicat à quantifier.)
   Guide intuitif : on confondrait sinon – en leur donnant le même nom – deux objets qui n'ont *a priori* rien à voir !

Quels que soient le guide intuitif, les croyances, LE SENS DE CES QUATRE ACTES SE FONDERA DANS LEUR USAGE, *i. e. dans les règles qui permettront d'en disposer.*

« Et ceci pour l'excellente raison que la signification [d'un mot] est en définitive fixée par les modalités de son emploi. *C'est parce qu'on l'emploie comme on l'emploie qu'il a la signification qu'il a !* »[42]

« Une signification d'un mot est un mode d'emploi du mot.

Car elle est ce que nous apprenons lorsque le mot est incorporé dans notre langage. »[43]

« Nos paroles acquièrent leur sens du reste de nos actions. »[44]

Règles du jeu / règles d'action (= sens de ces quatre actes !) Ces règles portent une part d'*arbitraire* (on est libre d'en choisir d'autres) mais sont *motivées* par la pratique de la mathématique. Il importe de faire parler chacune d'elle au prisme d'un *guide intuitif* afin de se convaincre qu'il est raisonnable de les adopter.

Convention de présentation : l'application d'une règle sera signifiée par un trait horizontal séparant la situation avant (en haut) de la nouvelle situation :

$$\frac{\text{situation avant application de la règle}}{\text{action permise par la règle}}$$

★ Ce qu'on toujours le droit de faire

1. On peut affirmer chaque pièce-proposition jouable où l'on a remplacé les pièces creuses par des pièces-énoncés (*guide intuitif* : on peut toujours affirmer des énoncés vides de sens ![45])
2. On peut toujours supposer E.

[39] le prédicat P pourrait être de la forme $Q_x \vee (\forall x,\ R_x)$, forme que l'on évitera en pratique au profit de $Q_x \vee (\forall y,\ R_y)$
[40] *guide intuitif* : on évoque un objet en lui *imposant* de vérifier le prédicat P
[41] avec ou sans imposition, peu importe
[42] Ferdinand GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, §7
[43] Ludwig WITTGENSTEIN, *De la certitude*, 61 (1949-51)
[44] *ibidem*, 229
[45] en termes idéaux : chaque tautologie est vraie

3. On peut toujours[46] évoquer o.

$$\frac{\text{[rien]}}{\text{on a } \mathbb{J}_{E,F,G,\ldots,L}}\ {\scriptstyle(\text{si } \mathbb{J} \text{ est une pièce jouable})} \qquad \frac{\text{[rien]}}{\text{supposons } E} \qquad \frac{\text{[rien]}}{\text{soit } o}\ {\scriptstyle(\text{si } o \text{ pas déjà évoqué})}$$

(En revanche, on ne pourra pas évoquer-imposer (le 4[e] acte) sans un contexte particulier.)

★ Règles de l'implication $\Longrightarrow$ (feat : supposition).

1. Quand on a supposé E puis (plus tard) affirmé F, on peut alors affirmer $E \Longrightarrow F$.
2. (*modus ponens*) Quand on a affirmé E et affirmé $E \Longrightarrow F$, on peut alors affirmer F.

$$\frac{\text{supposons } E \qquad \text{on a } F}{\text{on a } E \Longrightarrow F} \qquad \frac{\text{on a } E \qquad \text{on a } E \Longrightarrow F}{\text{on a } F}$$

Ces deux règles concernent le connecteur $\Longrightarrow$: la première permet de l'*établir*/introduire, la seconde de l'*utiliser*/éliminer. *Le sens de $\Longrightarrow$ est entièrement et uniquement capté par ses deux règles.*

De même, la première règle concerne l'acte "supposition" (son *utilisation*/élimination). Avec sa règle d'*introduction* $\frac{\text{[rien]}}{\text{supposons } E}$, elle en constitue tout le sens.

Cas particulier (affirmation d'une négation). Bien garder en tête que *nier E (*i. e. *affirmer $\neg E$) revient à pouvoir déduire de E une contradiction*, ce qui revient à affirmer l'implication $E \Longrightarrow \perp$. Ce guide motive la règle suivante[47] :

$$\frac{\text{supposons } E \qquad \text{on a une absurdité } \perp}{\text{on a } \neg E}.$$

La plupart du temps, la contradiction $\perp$ prendra la forme $C \wedge \overline{C}$ de la conjonction d'un énoncé C et de l'impossibilité de celui-ci[48].

★ Règles de la quantification universelle $\forall$ (feat : évocation).

1. (*généralisation*) Quand on a évoqué un objet o puis affirmé P_o, on peut affirmer $\forall x,\ P_x$.
2. (*spécialisation*[49]) Quand on a affirmé $\forall x,\ P_x$, on peut affirmer P_τ.

$$\frac{\text{soit } o \qquad \text{on a } P_o}{\text{on a } \forall x,\ P_x} \qquad \frac{\text{on a } \forall x,\ P_x}{\text{on a } P_\tau}$$

Ces deux règles concernent l'évocation et le quanteur $\forall$: la première permet de l'*établir*/introduire, la seconde de l'*utiliser*/éliminer. *Le sens de $\forall$ est entièrement et uniquement capté par ses deux règles.*

De même, la première règle concerne l'acte "évocation" (son *utilisation*/élimination). Avec sa règle d'*introduction* $\frac{\text{[rien]}}{\text{soit } o}$, elle en constitue tout le sens.

Remarque (évocation-imposition ?). Pour établir une quantification de la forme $\forall x,\ P_x \Longrightarrow Q_x$, il suffirait d'utiliser les règles précédentes comme suit :

$$\frac{\text{soit } o \qquad \frac{\text{supposons } P_o \qquad \text{on a } Q_o}{\text{on a } P_o \Longrightarrow Q_o}}{\text{on a } \forall x,\ P_x \Longrightarrow Q_x} \quad \left(\begin{array}{c}\text{l'affirmation "on a } Q_o\text{" étant}\\ \text{évidemment à légitimer}\end{array}\right).$$

Il est alors usuel de dire "Soit o tel que P_o" au lieu de "Soit o, supposons P_o" pour simplifier la présentation. Le contexte fera la différence avec une véritable évocation-imposition, pour qui aucune règle d'introduction n'a encore été énoncée ! Cela ne saurait tarder.

★ Règles de la quantification existentielle $\exists$ (feat : évocation-imposition).

1. (*du fait à l'existence*) Quand on a affirmé P_τ, on peut alors affirmer $\exists x,\ P_x$.

[46] bien sûr si o n'a pas déjà été évoqué auparavant

[47] dont la validité est établie en prochaine note de bas de page

[48] Supposons A et admettons que l'on ait établi la contradiction $C \wedge \overline{C}$. On peut alors affirmer $A \Longrightarrow C \wedge \overline{C}$ par la présente règle. Par ailleurs, la pièce-impossibilité $\overline{\mathbb{A}}$ équivaut ludiquement à $\mathbb{A} \Longrightarrow \perp$, *i. e.* à $\mathbb{A} \Longrightarrow \mathbb{C} \wedge \overline{\mathbb{C}}$, donc on peut jouer avec la pièce-proposition $\left(\mathbb{A} \Longrightarrow \mathbb{C} \wedge \overline{\mathbb{C}}\right) \Longrightarrow \overline{\mathbb{A}}$, donc on peut affirmer la pièce-énoncé $\left(A \Longrightarrow C \wedge \overline{C}\right) \Longrightarrow \overline{A}$ d'après la règle d'affirmation inconditionnelle (sur les tautologies). En réutilisant la règle du *modus ponens*, on peut affirmer $\neg A$, ce qu'il fallait affirmer.

[49] on remplace le générique par une valeur *spéciale* (le terme τ)

2. (*effectivité de l'existence*) Quand on a affirmé $\exists x, P_x$, on peut alors évoquer un objet o tel que P_o, puis affirmer P_o.

$$\frac{\text{on a } P_\tau}{\text{on a } \exists x,\ P_x} \qquad \frac{\text{on a } \exists x,\ P_x}{\text{soit } o \text{ tel que } P_o} \qquad \frac{\text{soit } o \text{ tel que } P_o}{\text{on a } P_o}$$

Ces deux règles concernent le quanteur $\exists$: la première permet de l'*établir*/introduire, la deuxième de l'*utiliser*/éliminer. *Le sens de $\exists$ est entièrement et uniquement capté par ses deux règles.*

De même, les deuxième et troisième règles concernent l'acte "évocation-imposition" (c'en sont des règles resp. d'*introduction* et d'*utilisation*) et en constituent tout le sens.

Pause vocabulaire (déduction). Quand on affirme E grâce à une règle, on dit aussi que l'on ***déduit*** ou ***infère*** E des éléments précédant l'utilisation de la règle. Par exemple, le *modus ponens* peut se reformuler :

on peut déduire F à partir (des affirmations) de E et de $E \Longrightarrow F$.

De même, on peut déduire $\neg E$ de la supposition de E et de l'affirmation conséquente d'une absurdité.

Sur les portées.

1. Chaque supposition a une *portée*, qui se termine avec la règle d'introduction de $\Longrightarrow$:

   supposons E

   $$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\ddots \\ \text{on a } F\end{array}}}{\text{d'où } E \Longrightarrow F.}$$

   et les suppositions
   ne servent qu'à cela !

   Bien sûr, l'énoncé supposé est affirmable tout au long de sa portée :

   supposons E

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{tant qu'on reste dans le cadre,} \\ \text{on peut toujours affirmer } E\end{array}}\ .$$

2. De même, chaque évocation a une *portée* qui se termine avec la règle d'introduction de $\forall$:

   soit o

   $$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\ddots \\ \text{on a } P_o\end{array}}}{\text{d'où } \forall x,\ P_x.}$$

   et les évocations
   ne servent qu'à cela !

   (mais il n'y rien d'affirmable *en plus* comme pour la supposition).

3. Les deux autres actes, affirmations et évocations-impositions, ont une portée illimitée, avec la restriction suivante : si elles ont été effectuées *dans un cadre* (supposition ou évocation), *elle ne peuvent en sortir !* En effet, sans cette réserve, nous pourrions supposer E, puis affirmer E dans le cadre de cette supposition, ensuite sortir de ce cadre pour enfin affirmer E sans condition, ce qui légitimerait l'affirmation de tout et de son contraire ! Et le jeu de preuve serait totalement sans intérêt.

Définition (preuve, théorème, prouvabilité). Une ***preuve*** de E est une partie du jeu qui termine par l'affirmation de E en dehors des cadres de supposition et d'évocation. La pièce-énoncé E est alors qualifiée de ***prouvée*** et est appelée un ***théorème***.

3.4 "égalité" des pièces-énoncés

Donnons enfin une dernière définition, analogue de l'équivalence ludique entre pièces-*propositions*, dont l'intérêt sera le même : *pouvoir échanger deux énoncés équivalents sans modifier la prouvabilité.*

Définition. *Les pièces-énoncés E et F sont qualifiés de **prouvablement équivalentes** si on peut affirmer l'équivalence $E \iff F$ en dehors des cadres de supposition*[50]. *Cette relation sera encore notée E éq F.*

Fait (admis, *cf.* DM optionnel[51]). *Considérons A, B deux pièces-énoncés prouvablement équivalentes. En imposant que F soit la pièce obtenue à partir de E après remplacement par B de n'importe quelle occurrence de A, alors E équivaut prouvablement à F.*

3.5 exemples

Exemple 1. *Montrer que $E \Longrightarrow E$ est un théorème, de deux façons.*

Par les tautologies. Si $\mathbb{C}$ est une pièce creuse, alors la pièce $\mathbb{C} \Longrightarrow \mathbb{C}$ est jouable, donc on peut affirmer l'implication $E \Longrightarrow E$ obtenue en remplaçant dans la tautologie $\mathbb{C} \Longrightarrow \mathbb{C}$ la pièce creuse $\mathbb{C}$ par l'énoncé E (c'est la règle sur les tautologies)

Par les suppositions. Supposons E. On peut alors affirmer E dans le cadre de cette supposition. D'après la règle d'introduction de $\Longrightarrow$, on peut affirmer (en refermant le cadre) l'implication $E \Longrightarrow E$.

Exemple 2 (introduction de $\wedge$). *Montrer la validité de la règle suivante :*

$$\frac{\text{on a } E \qquad\qquad \text{on a } F}{\text{on a } E \wedge F}.$$

Partons des affirmations de E et de F et considérons la tautologie $\mathbb{A} \Longrightarrow (\mathbb{B} \Longrightarrow \mathbb{A} \wedge \mathbb{B})$. Elle nous permet d'affirmer (règle sur les tautologies) l'énoncé $E \Longrightarrow (F \Longrightarrow E \wedge F)$ obtenu en remplaçant dans la tautologie[52] précédente $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ par resp. E et F. Avec l'affirmation de E, on en déduit (par *modus ponens*) la conséquence $F \Longrightarrow E \wedge F$, de laquelle – avec l'affirmation de F – on déduit (toujours par *modus ponens*) la conséquence $E \wedge F$.

Nous laissons à la lectrice le soin d'établir les "règles réciproques" (dites d'élimination de $\wedge$) :

$$\frac{\text{on a } E \wedge F}{\text{on a } E} \qquad \frac{\text{on a } E \wedge F}{\text{on a } F}.$$

Exemple 3 (preuve par double-implication). *Montrer la validité de la règle suivante :*

$$\frac{\text{on a } E \Longrightarrow F \qquad\qquad \text{on a } F \Longrightarrow E}{\text{on a } E \iff F}.$$

Partons des affirmations de $E \Longrightarrow F$ et de $F \Longrightarrow E$. On en déduit (*cf.* exemple précédent) la conjonction $\left\{\begin{array}{l} E \Longrightarrow F \\ F \Longrightarrow E \end{array}\right.$. Par ailleurs, de la jouabilité de la pièce-implication $\left\{\begin{array}{l} \mathbb{A} \Longrightarrow \mathbb{B} \\ \mathbb{B} \Longrightarrow \mathbb{A} \end{array}\right. \Longrightarrow (\mathbb{A} \iff \mathbb{B})$, on déduit (*via* la règle sur les tautologies) l'énoncé $\left\{\begin{array}{l} E \Longrightarrow F \\ F \Longrightarrow E \end{array}\right. \Longrightarrow (E \iff F)$. La règle du *modus ponens* permet alors d'affirmer l'équivalence $E \iff F$.

Il est laissé à la lectrice d'établir les "règles réciproques" :

$$\frac{\text{on a } E \iff F}{\text{on a } E \Longrightarrow F} \qquad \frac{\text{on a } E \iff F}{\text{on a } F \Longrightarrow E}.$$

Exemple 4 (substitution de prédicats équivalents). *Considérons un évocable a pour lequel l'implication $P_a \iff Q_a$ est affirmée. Établir alors les énoncés $\Diamond x,\ P_x \iff \Diamond x,\ Q_x$ pour chaque quanteur $\Diamond$.*

(*interprétation* : quand deux prédicats sont équivalents, on peut les échanger dans une quantification sans changer la prouvabilité)

Tout d'abord, on a $P_a \iff Q_a$, d'où l'on déduit (par généralisation) $\forall x,\ P_x \iff Q_x$.

$\boxed{\forall}$ Montrons l'équivalence $\forall x,\ P_x \iff \forall x,\ Q_x$ par double-implication. Supposons $\forall x,\ P_x$, soit o : on a alors (par spécialisation utilisée à deux reprises) d'une part P_o, d'autre part l'équivalence $P_o \iff Q_o$

[50] Si E ou F contient des évocables, l'affirmation de $E \iff F$ se fait bien sûr dans le cadre d'une évocation.

[51] En exemple, nous démontrons ci-après ce fait dans le cas où E est une quantification.

[52] on peut toujours imposer que les pièces-propositions $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ soient creuses

dont découle l'implication $P_o \Longrightarrow Q_o$. Il en résulte (par *modus ponens*) la conclusion Q_o et (par généralisation) l'énoncé $\forall x,\ Q_x$. En échangeant les rôles de P et Q, on montrerait exactement de même l'implication réciproque $\forall x,\ P_x \quad \Longleftarrow \quad \forall x,\ Q_x$.

$\boxed{\exists}$ Montrons l'équivalence $\exists x,\ P_x \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x,\ Q_x$ par double-implication. Comme pour $\forall$, la symétrie des rôles joués par P et Q nous permet de ne montrer *qu'une seule* implication. Supposons $\exists x,\ P_x$, soit o tel que P_o (par effectivité de l'existence), on a alors (par spécialisation) $P_o \Longleftrightarrow Q_o$, d'où (en utilisant P_o et le *modus ponens*) Q_o, d'où l'on déduit l'existence $\exists x,\ Q_x$.

Bonus (réciproque pour $\forall$) : *montrer que l'on peut déduire de* $\forall x,\ P_x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x,\ Q_x$ *l'équivalence* $P_o \Longleftrightarrow Q_o$ *(à vos bons soins).*

Exemple 5 (lois de De Morgan). Établir les équivalences

$$\begin{cases} \neg\left(\exists x,\ P_x\right) \Longleftrightarrow \forall x,\ \neg P_x \\ \neg\left(\forall x,\ P_x\right) \Longleftrightarrow \exists x,\ \neg P_x \end{cases}.$$

Montrons la première équivalence par double-implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $\overline{\exists x,\ P_x}$ et montrons $\forall x, \overline{P_x}$ (règle d'introduction de $\Longrightarrow$). Soit donc o et montrons $\overline{P_o}$ (afin de conclure par généralisation). Supposons pour cela P_o et dérivons une contradiction (règle d'affirmation d'une négation). De l'affirmation P_o (permise dans le cadre de la supposition) on peut affirmer l'existence $\exists x,\ P_x$ (du fait à l'existence), d'où la contradiction avec la non-existence supposée.

Version courte : supposons $\overline{\exists x,\ P_x}$ et soit o : alors de P_o on déduirait l'existence $\exists x,\ P_x$ contredisant l'hypothèse, ce qui montre $\overline{P_o}$ et établit $\forall x,\ \overline{P_x}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\forall x,\ \overline{P_x}$ et montrons $\overline{\exists x,\ P_x}$ (règle d'introduction de $\Longrightarrow$). Supposons donc $\exists x,\ P_x$ (règle d'affirmation d'une négation) et soit o tel que P_o (effectivité de l'existence) : d'une part on peut affirmer P_o (règle d'utilisation de l'évocation-imposition), d'autre part l'hypothèse nous permet d'affirmer $\overline{P_o}$ (par spécialisation), d'où la contradiction $P_o \wedge \overline{P_o}$ (règle d'affirmation de la tautologie $\mathbb{A} \Longrightarrow (\mathbb{B} \Longrightarrow \mathbb{A} \wedge \mathbb{B})$ en remplaçant $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ resp. par P_o et $\overline{P_o}$).

Version courte : supposons $\forall x,\ \overline{P_x}$ et $\exists x,\ P_x$, soit o tel que P_o (permis par l'existence), l'hypothèse livre alors $\overline{P_o}$, ce qui est absurde.

Montrons la seconde équivalence[53] à l'aide de la première. En remplaçant dans la preuve ci-dessus partout P par Q (on va ensuite choisir Q judicieusement), on aboutit à l'affirmation de l'équivalence $\overline{\exists x,\ Q_x} \Longleftrightarrow \forall x,\ \overline{Q_x}$. En remplaçant dans la tautologie $\left(\overline{\mathbb{A}} \Longleftrightarrow \mathbb{B}\right) \Longleftrightarrow \left(\mathbb{A} \Longleftrightarrow \overline{\mathbb{B}}\right)$ les lettres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ par resp. $\exists x,\ Q_x$ et $\forall x,\ \overline{Q_x}$, on e déduit l'équivalence $\overline{\forall x,\ \overline{Q_x}} \Longleftrightarrow \exists x,\ Q_x$. Maintenant, en choisissant pour Q le prédicat $\overline{P}$, on peut affirmer l'équivalence $\overline{\forall x,\ \overline{\overline{P_x}}} \Longleftrightarrow \exists x,\ \overline{P_x}$. Pour conclure, il suffirait de pouvoir remplacer à gauche $\overline{\overline{P_x}}$ par P_x. Or la tautologie $\overline{\overline{\mathbb{A}}} \Longleftrightarrow \mathbb{A}$ nous livre l'équivalence $\overline{\overline{P_a}} \Longleftrightarrow P_a$ et le lemme de substitution permet de terminer la preuve.

Version courte : on a les équivalences[54] "prouvales"

$$\begin{array}{lll} & \overline{\forall x,\ P_x} \Longleftrightarrow \exists x,\ \overline{P_x} & \\ \text{éq.} & \overline{\overline{\forall x,\ P_x}} \Longleftrightarrow \overline{\exists x,\ \overline{P_x}} & \text{(contraposée)} \\ \text{éq.} & \forall x,\ P_x \Longleftrightarrow \overline{\exists x,\ \overline{P_x}} & \text{(tiers exclu)} \\ \text{éq.} & \forall x,\ P_x \Longleftrightarrow \forall x,\ \overline{\overline{P_x}} & \left(\begin{array}{c}\text{première équivalence} \\ \text{en remplaçant } P \text{ par } \overline{P}\end{array}\right) \\ \text{éq.} & \forall x,\ P_x \Longleftrightarrow \forall x,\ P_x & \text{(tiers exclu),} \\ & \text{ce qui est tautologique.} & \end{array}$$

3.6 objets uniques

Quand notre langage possède – ou permet de définir – une relation d'égalité $=$, il est usuel de parler de

"*l'unique objet vérifiant telle propriété*"

[53] L'affirmation d'un contre-exemple (second sens $\Longrightarrow$) *via* la règle $\frac{\text{on a } \neg\forall x,\ P_x}{\text{on a } \exists x,\ \neg P_x}$ ne fait pas l'unanimité parmi les mathématiciens selon le sens attribué à l'existence $\exists$ (sait-on par exemple *exhiber* un tel x ? en *construire* un ?). Suffit ici de signaler que nous avons utilisé l'équivalence prouvale entre chaque implication et sa contraposée, laquelle équivalence repose fortement sur le tiers exclu $\neg\neg\mathbb{A} \Longrightarrow \mathbb{A}$. On peut faire de logique sans tiers exclu (et sans la règle ci-dessus), cela toutefois ne nous concernera pas dans ce cours.

[54] on affirme bien les "éq.", pas les "$\Longrightarrow$" !

quand on a montré existence et unicité d'un tel objet.

Mais comment *désigner* un tel objet dans le jeu prédicatif ? Nous n'avons pas dans nos pions-termes de matériel permettant de formaliser un tel objet. Une possibilité pour cela est d'élargir le matériel des pions-termes (et donc des pièces-prédicats) en rajoutant des sacs-***témoins***[55] $\iota_x P_x$ muni de la règle suivante, visant à capter le sens de "*s'il y a existence et unicité pour le prédicat P, alors ce dernier est vérifié par l'unique objet le vérifiant*" :

$$\frac{\text{on a } \exists! x,\ P_x}{\text{on a } P_{\iota_x P_x}} \qquad \text{où } \exists! x,\ P_x \text{ abrège } (\exists x,\ P_x) \wedge \left(\forall y, z, \begin{cases} P_y \\ P_z \end{cases} \Longrightarrow y = z \right)$$

(*guide intuitif* : l'énoncé $\exists! x,\ P_x$ dit qu'il y a un unique x vérifiant P_x, le conjoint de gauche $\exists x,\ P_x$ codant l'existence et celui de droite l'unicité).

En pratique, tout le monde utilise cette règle mais jamais la notation $\iota_x P_x$, toutes deux attribuées à David Hilbert[56]. Peut-être parce ce dernier aurait montré comment se passer de la notation $\iota_x P_x$? Revenir aux sources permettra de voir qu'il n'en est rien. Quel que soit le besoin de cette notation, on utiliserons le français pour désigner et utiliser un tel objet.

4 ensembles, applications

Tous les prédicats considérés seront *singulaires.*

4.1 guide intuitf

Idéalement, à chaque prédicat correspond la *classe* des objets vérifiant ce prédicat. Réciproquement, étant donnée une classe d'objets, le prédicat "faire partie de cette classe" est vérifié précisément par les objets de la classe considérée. Ainsi penser en termes de prédicats ou en termes de classes revient-il au même (encore une fois : idéalement). Si R dénote la qualité rouge, le prédicat associé[57] est alors "être rouge"

(★★ les deux verbes "être" précédents n'ont *rien à voir !* ★★
★ le premier **identifie** (deux prédicats), le second **qualifie** (un objet) ★)

et l'expression "être rouge" se transforme successivement en[58] :

$$\text{être } R \qquad \varepsilon\sigma\tau\iota\ R \qquad \varepsilon\ R \qquad \in R.$$

Ainsi, "vérifier le prédicat "être rouge"" s'exprime en termes de classes sous la forme

"*appartenir* à la classe des objets rouges".

Les classes se prêtent à diverses opérations qui se traduisent naturellement en termes d'attributs / de prédicats :

1. l'***intersection*** de plusieurs classes est la classe formée des objets possédant *chaque* attribut correspondant – par exemple, l'intersection de la classe R avec celle S formée des objets souples est la classe, notée $R \cap S$ (lire « R ***inter*** S »), constituée des objets rouges *et* souples ;
2. la ***réunion*** de plusieurs classes est la classe formée des objets possédant *au moins un* attribut parmi ceux correspondants – par exemple, la réunion des classes R et S est la classe, notée $R \cup S$ (lire « R ***union*** S »), constituées des objets rouges *ou* souples (au sens inclusif) ;

[55] dont le sens visé est "l'unique objet x tel que P_x" lorsque cela fait sens, n'importe quoi sinon (on ne pourra alors rien en dire de toute façon)

[56] voir par exemple l'ouvrage *Grundlagen der Matematik* de David Hilbert et Paul Bernays édité en 1934

[57] Penser en termes de *qualités* ou de *prédicats* revient au même : à chaque prédicat P associer la qualité "vérifier la prédicat P" et à chaque qualité Q le prédicat "posséder la qualité Q". Bien vérifier qu'on retombe sur ses pieds en "enchaînant" ces "associations" dans un sens comme dans l'autre.

[58] le symbole $\in$ est une variante (dire ***lunaire***) de la lettre ε

3. le ***complémentaire*** d'une classe est la classe formée des objets *ne possédant pas* l'attribut correspondant – par exemple, la (classe)complémentaire[59] de R, notée ${}^{c}R$, est constituée des objets qui ne sont pas rouges (peut-être ses objets sont d'une autre couleur, peut-être la notion même de couleur ne fait pas sens pour certains de ces objets...).

Comme nous avons plus l'habitude – concrètement – de manipuler des sacs d'objets regroupés (parfois) par la pensée, **le langage des classes nous fournira un excellent guide intuitif**. Nous l'utilisons en géométrie quand désirons décrire l'*ensemble* des points soumis à une certain condition (eg l'ensemble formé des centres de gravité d'un triangle quand les sommets de ce dernier varie dans un cercle donné), ou encore en arithmétique quand nous cherchons l'*ensemble* des solutions d'une équation donnée. (À ce stade, "ensemble" et "classe" sont synonymes.)

Une première décision est **de ne pas tenir compte de la répétition des éléments** d'une classe décrite par un prédicat. Pour reprendre l'exemple géométrique précédent, si le centre de gravité variant passe plusieurs fois par le centre du cercle donnée, eh bien il passe par ce centre et l'ensemble cherché contiendra ce centre, point. De même, l'ensemble des complexes c tels que $c^{42}(c-i)=0$ contient 0, peu importe l'exposant qui donnerait l'envie d'introduire quelque multiplicité (la classe des solutions est d'ailleurs ici formée des complexes 0 et i). Les applications seront un moyen ultérieur de coder au besoin de telles multiplicités.

Une deuxième décision est de **ne pas mettre d'ordre** dans une classe. Dans l'exemple géométrique, si l'ensemble cherché est tout le disque donné, il n'y a *a priori* pas de raison de favoriser un point plus qu'un autre pour être le "premier" ou le "dernier" élément de ce disque[60]. De même, dans les complexes, pas plus 1 que i n'a de raison de venir avant l'autre dans la description finale de l'ensemble des solutions, noté indifféremment $\{1,i\}$ ou $\{i,1\}$ où les accolades sont à penser comme l'"enveloppe" du "sac désordonné" dont les éléments sont 1 et i (dans n'importe quelle ordre).

À ce stade, chaque classe étant déterminée par les objets qui la constituent (guide intuitif émanant de la sphère primitive), **deux classes ayant mêmes éléments seront identifiées**. En termes ensemblistes, cela s'exprimera

chaques ensembles ayant mêmes éléments vérifieront les mêmes prédicats.

4.2 deux paradoxes pour revitaliser l'intuition

Certains paradoxes doivent déchoir la correspondance classes-prédicats ci-dessus – aussi plaisante fût-elle pour notre esprit.

Le premier est celui de Berry, décrivant l'absurdité à pouvoir parler du "plus petit entier naturel non définissable en moins de cent mots" : en effet, l'expression entre guillemets définit précisément cet entier en moins de cent mots ! Cela doit attirer notre attention sur le caractère problématique du prédicat "définissable" : le langage fait ici appel à lui-même. Une échappatoire[61] est de séparer complètement la *forme* du langage de son *interprétation* (les guides intuitifs), ce qui nous conduit droit à la sphère du formalisable.

Dans un second temps, une fois acquise l'autonome de la forme (par rapport au fond), le symbole $\in$ n'est plus contraint par le sens primitif qui lui a donné naissance et l'on peut former des prédicats tels que $x\in x$ ou sa négation – sans être arrêté par la bizarrerie d'éventuelles interprétations – et parler de la classe C associée au prédicat $x\notin x$. Faire partie de C s'énonce alors "ne pas être s'appartenir", ce qui se réécrit en termes d'équivalences $\forall x,\ x\in C\iff x\notin x$, d'où en remplaçant x par C l'antilogie $C\in C\iff\overline{C\in C}$ attribuée à Lord Russell[62]. Une échappatoire est de décréter que certaines classes sont trop "grosses" pour que leur appartenance (à quelque classe que ce soit) fasse sens, en particulier la classe "pleine" formée de "tous" les objets (dont C est ici une formalisation). Ce décret conduit à amender l'idyllique correspondance classes-prédicats[63] (trop belle pour être vraie) et à ne garder que certaines classes – appelés ***ensembles*** – dont l'appartenance ne posera aucun problème.

[59] on trouve parfois la notation $\complement R$ au lieu de ${}^{c}R$

[60] à l'exception peut-être du centre ; se poser alors la question pour deux points autre que le centre

[61] Une autre échappatoire serait de renoncer au caractère absolu et éternel de "la classe des entiers non définissables en moins de cent mots", de la considérer *ouverte*, en devenir. Une telle optique ébranlerait toutefois le monde idéal de nombreux mathématiciens et n'a donc pas récolté les faveurs de la communauté mathématique.

[62] si l'on ne distingue pas les sphère idéale et formelle, cette antilogie devient une authentique *antinomie* (dont G. Frege a lourdement fait les frais)

[63] un vestige – plus viable – de cette correspondance sera énoncé dans les axiomes de séparation