TD6. Déterminants.

Exercice 1. Pour chacune des matrices à coefficients réels 2×2 suivantes, indiquer si elle est inversible en calculant son déterminant. Si oui, donner son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Indiquer par quelle ligne ou colonne développer les déterminants pour que le calcul soit le plus simple possible puis effectuer le calcul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Exercice 3. Pour chacun des déterminants suivants, par des considérations sur les lignes et les colonnes, indiquer s'il semble nul ou non. Vérifier éventuellement par le calcul.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A), \det(B), \det(AB)$

2. A, B, AB sont-elles inversibles ?

3. Le cas échéant, calculer $\det(A^{-1}), \det(B^{-1}), \det((AB)^{-1})$.

Exercice 5.

1. Soient A, B des matrices 3×3 à coefficients réels. Montrer que si A n'est pas inversible, alors ni AB ni BA n'est inversible.

2. Soit A une matrice 3×3 à coefficients réels. On suppose qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que AB ou BA est inversible. Montrer que A et B sont inversibles.

Exercice 6.

1. Montrer que le déterminant d'une matrice diagonale de format 3×3 est le produit des coefficients diagonaux.

2. Montrer que le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure 3×3 est le produit des coefficients diagonaux.

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients diagonaux d'une matrice triangulaire supérieure pour qu'elle soit inversible.

Exercice 7. Pour tout nombre réel m, on considère la matrice

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 2 & m \\ 1 & 0 & -m \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

On note f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ayant A_m comme matrice dans la base canonique.

1. Calculer $\det(A_m)$ en fonction de m.

2. Pour quelles valeurs de m la matrice A_m est-elle inversible ?

3. Quel est le rang de f_1 ?

4. Déterminer une base et un système d'équations de $\mathrm{Im} f_1$.

5. Déterminer une base et un système d'équations de $\ker f_1$.

6. Déterminer le rang de A_m pour chaque valeur de m.

7. Calculer l'inverse de A_{-1}.