TD 5 Algèbre linéaire
solutions proposées

Marc SAGE

janvier-mai 2020

Table des matières

Il pourra nous arriver d'écrire des vecteurs colonnes en ligne (et réciproquement) lorsque cela permet une économie d'espace sans nuire à la clarté.

1 rang de familles de vecteurs & de matrices

1.

(a) Notons $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $d := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Afin de mettre plein de zéros et voir ainsi le rang se dégager, effectuons des opérations sur ces vecteurs qui n'en changent pas le Vect. Remplacer $\begin{matrix} a \leftarrow a+c \\ b \leftarrow b+2c \\ d \leftarrow d+c \end{matrix}$ transforme la famille (a,b,c,d) en

la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ dont les premier, deuxième et quatrième vecteurs sont colinéaires.

La liberté des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ étant par ailleurs immédiate[1], le rang de cette famille vaut sa longueur, à savoir 2.

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$, abrégeons $a := \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $c := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$. Déjà, si $t = 1$, la famille (a,b,c) contient alors trois fois un même vecteur non nul, donc est de rang 1. On supposera donc $t \neq 1$. Cherchons alors à montrer la liberté de la famille (a,b,c) (peut-être d'autres valeurs singulières de t sortiront-elles des calculs). Soient λ, μ, ν des réels tels que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$, çàd tels que $\begin{cases} \lambda + t\mu + \nu = 0 \\ t\lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda + t\mu + t\nu = 0 \end{cases}$. Soustraire la première ligne à la troisième livre l'égalité $(t-1)\,\nu = 0$, d'où la nullité de ν (on peut bien simplifier par $t-1$ qui a été supposé non nul 0). Il en résulte les égalités $\begin{cases} \lambda + t\mu = 0 \\ t\lambda + \mu = 0 \end{cases}$: soustraire t fois la première ligne à la seconde donne alors $\left(t^2 - 1\right)\mu = 0$, d'où la nullité de μ (si l'on suppose de plus $t \neq -1$) et celle de λ en lisant la première égalité. Le rang cherché vaut donc 3 dès que $t \notin \{-1, 1\}$. Reste à regarder le cas $t = 1$: la relation de liaison précédente se réécrit alors $\lambda = \mu$, ce qui montre d'une part que a et b sont opposés (ce que l'on pouvait le voir directement !) d'autre part la liberté de (a,c), d'où le rang cherché $\operatorname{rg}\{a,b,c\} = \operatorname{rg}\{a,-a,c\} = \operatorname{rg}\{a,c\} = 2$.

Conclusion : on a l'égalité $\operatorname{rg}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \right\} = \begin{cases} 3 \text{ si } t^2 \neq 1 \\ 2 \text{ si } t = -1 \\ 1 \text{ si } t = 1 \end{cases}$.

2. Pour ces questions, nous noterons les opérations sur les rangées en précisant tout d'abord le *type de rangée* (ligne ou colonne) puis en numérotant ces rangées par ordre alphabétique – sans indice donc – pour y voir plus clair[2]. De même, au lieu d'écrire "$A \leftarrow A - 2C$" pour dire "dans A on met $A - 2C$", on allégera en "$A : -2C$" pour dire "sur A on effectue l'opération $-2C$". De telles conventions (inhabituelles) sont évidemment à redéfinir si l'on souhaite les utiliser[3].

(a) Effectuons des opérations élémentaires sur les *colonnes* pour obtenir une forme échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A : -E \\ B : +D \\ C : -2D \\ \text{puis } D : +E \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[1] dans une relation de liaison, lire les abscisses (resp. ordonnées) fournit la nullité du premier (resp. second) coefficient

[2] nous évitons ainsi de reporter la lecture des symboles $C_?$ ou $L_?$ à distinguer à celle de leurs *indices* (qui sont tout petits !), la lettre identique C ou L ne servant par ailleurs à rien (une fois le type de rangée précisé) sinon à créer du "bruit" visuel

[3] et ne doivent pas interférer avec d'autres notations, si par exemple E dénote un espace vectoriel, B une base, ou encore A un scalaire...

Nous avons trois "marches", donc la matrice de départ a pour rang 3.

Autre solution en agissant toujours sur les *colonnes* afin d'échelonner "par en haut à droite" :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} E : +A \\ D : +B \\ C : +2B \\ \text{puis } B : -2A \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & -2 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & 2 \end{pmatrix}$$

(on obtient une forme échelonnée "à l'envers", ce qui reste tout aussi efficace pour lire le rang).

Encore plus court (échelonner "par en bas à droite"), toujours sur les *colonnes* :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} E : -A \\ D : +A \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Autre solution en agissant sur les *lignes* :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} C : -A \\ B : \times\frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C : -B \quad \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? & ? \\ 0 & -1 & ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ forme échelonnée à trois "marches".}$$

(b) Effectuons des opérations élémentaires sur les *lignes* (pour changer de colonnes) afin d'échelonner :

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B : +2A \\ C : +A \\ D : -A \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 15 & 5 & 15 \\ 0 & 9 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B : \times\frac{1}{5} \\ C : \times\frac{1}{3} \\ D : \times(-1) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} C : -B \\ D : -B \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 3 & ? & ? \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voici une forme échelonnée avec deux "marches", d'où le rang cherché : 2

Et avec les *colonnes* :

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} D : -C \\ \text{(pour mettre un 1} \\ \text{en bas à droite)} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A : -D \\ B : -4D \\ C : -D \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ -6 & -15 & -3 & 4 \\ -4 & -10 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A : \times\frac{1}{-2} \\ B : \times\frac{1}{-5} \\ C : \times(-1) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A : -C \\ B : -C \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ forme échelonnée à deux "marches".}$$

Autre façon de procéder avec les *colonnes* (en échelonnant "à l'envers") :.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B : -7A \\ C : -2A \\ D : -5A \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 15 & 5 & 15 \\ ? & 9 & 3 & 9 \\ ? & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B : \times\frac{1}{3} \\ D : \times\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 5 & 5 & 5 \\ ? & 3 & 3 & 3 \\ ? & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} C : -B \\ D : -B \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ ? & 5 & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 \\ ? & ? & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{(on retrouve} \\ \text{deux "marches").} \end{array}$$

3. L'énoncé ne donne aucun sens à a ni à b. Nous les invoquerons donc dans $\mathbf{C}$: soient a, b deux complexes. Effectuons alors des opérations élémentaires sur les *colonnes* afin d'échelonner "par en bas à droite"[4] :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B : -aA \\ C : +2A \\ D : -bA \end{array} \quad \begin{pmatrix} ? & 4-2a & -1 & -7-2b \\ ? & 3+a & -1 & 2+b \\ 1 & {\scriptscriptstyle 0} & {\scriptscriptstyle 0} & {\scriptscriptstyle 0} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} D : +(2+b)\,C \\ C_2 : +(3+a)\,C \\ \text{puis } B \leftrightarrow C \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} ? & ? & 1-3a & -9-3b \\ ? & -1 & 0 & {\scriptscriptstyle 0} \\ 1 & 0 & {\scriptscriptstyle 0} & {\scriptscriptstyle 0} \end{pmatrix}.$$

Il y a deux "marches" si $\binom{1-3a}{-3-3b} = \binom{0}{0}$, çàd ssi$\binom{a}{b} = \binom{\frac{1}{3}}{-3}$, et trois "marches" sinon. Le rang cherché vaut donc 2 ou 3 selon ces cas.

Par les *lignes* :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 & -7 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & a & -2 & b \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A : +2B \\ C : +B \\ \text{puis } A \leftrightarrow B \end{array} \quad \begin{pmatrix} -1 & ? & ? & ? \\ 0 & 10 & -3 & -3 \\ 0 & a+3 & -1 & b+2 \end{pmatrix} \quad C : \times 10 \text{ puis } -(a+3)\,B$$

$$\begin{pmatrix} -1 & ? & ? & ? \\ 0 & 10 & ? & ? \\ 0 & 0 & 3a-1 & 3a+10b+29 \end{pmatrix}.$$

Il y a deux "marches" si $\binom{3a-1}{3a+10b+29} = \binom{0}{0}$, çàd ssi $\binom{a}{10b+30} = \binom{\frac{1}{3}}{0}$, çàd ssi ssi $\binom{a}{b} = \binom{\frac{1}{3}}{-3}$.

4. L'énoncé est ambigu, il y a beaucoup de "rangs précédents"... Dans le doute, traitons-le tous. Il ne reste en fait que les deux premières questions.

(a) (question 1a) Le rang de la famille (a, b, c, d) est celui de la matrice concaténée de ces quatre vecteurs. Effectuons-y des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A : -C \\ B : -2C \\ \text{puis } C \leftrightarrow B \\ \text{puis } B \leftrightarrow A \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & , \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui a deux "marches". On retrouve le rang 2.

(b) (question 1b) Soit $t \in \mathbf{R}$. Effectuons des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice concaténée des vecteurs colonnes a, b, c :

$$\begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & t \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B : -tA \\ C : -A \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & 1-t^2 & 1-t \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} B : \times \frac{1}{1-t} \\ C : \times \frac{1}{1-t} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 0 & 1+t & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Évidemment, les deux dilatations ne font sens que si $t \neq 1$: dans ce cas on obtient deux "marches" si $1 + t = 0$, çàd si $t = -1$, et trois "marches" sinon. Dans le cas $t = 1$, la matrice du milieu est déjà échelonnée avec une seule "marches". On retrouve (heureusement !) les rangs trouvés précédemment.

2 matrices d'applications linéaires

Suggestion de notation : chaque « : » dans le sujet est en fait une *définition*, on gagnerait à les remplacer par des « := » afin d'indiquer ce caractère *définitoire*.

L'application g a une tête quadratique, montrons qu'elle n'est pas homogène (*a fortiori* pas linéaire) : cela découle des égalités (et distinction)

$$\begin{aligned} g\left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= g\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1) \times 2 \cdot (-1) = 6 \\ -g\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= -(3 \cdot 1 \times 2 \cdot 1) = -6 \neq 6. \end{aligned}$$

[4] Le but est d'éviter de trop "prendre" les paramètres a et b dans les opérations car on peut pas "simplifier" un polynôme en (a, b) sans donner à ces derniers des valeurs numériques. C'est pourquoi on n'a pas chercher un échelonnage classique "par en bas à gauche".

L'application h est linéaire de l'abscisse mais son ordonnée a une tête quadratique, elle n'est de fait pas homogène vu les égalités (et distinction)

$$\begin{aligned} h\left(-1\binom{1}{0}\right) &= h\binom{-1}{0} = \binom{?}{(-1)^2-0^2} = \binom{?}{1} \\ -h\binom{1}{0} &= -\binom{?}{1^2-0^2} = \binom{?}{-1} \neq \binom{?}{1}. \end{aligned}$$

L'application $\varphi = \cos$ est tout sauf linéaire, par exemple elle n'est pas additive (sinon on n'apprendrait pas de formules d'addition en trigonométrie !), elle n'est pas homogène (sinon les formules de duplication n'existeraient pas), le plus simple étant de dire qu'elle envoie 0 sur autre chose que 0 (en l'occurrence : sur 1).

L'exemple de ψ_a est flou. Pourquoi indexer par a ? Si oui dire clairement "pour chaque a on notera ψ_a l'application blabla...". En l'occurrence, cela ne servirait à rien. Invoquons donc un réel a et notons simplement ψ la multiplication par a dans $\mathbb{R}$: cette dernière est additive (par distributivité de l'addition sur la multiplication) et homogène (par associativité de la multiplication), donc linéaire.

Rappelons enfin que, pour chaque naturels p et q, pour chaque matrice $M \in M_{p,q}(\mathbf{C})$, la multiplication à-gauche[5]-par[6] M est linéaire de $\mathbf{C}^p$ vers $\mathbf{C}^q$, induit quand M est réelle une application linéaire $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^p & \longrightarrow & \mathbf{R}^q \\ X & \longmapsto & MX \end{array}\right.$, et dans les deux cas a pour matrices M dans les bases canoniques resp. source et but[7]. En remarquant que l'application f agit comme $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, çàd comme la multiplication à-gauche-par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$, le rappel nous livre la linéarité de f et la matrice demandée. De même, l'application h agit comme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donc est la multiplication à-gauche-par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 autour du théorème du rang

À chaque fois dans cet exercice que l'énoncé écrit « soit », il s'agit bien sûr d'une *définition* et non d'une invocation. Nous demandons donc à nos lectrices de distinguer ces deux actes, en précisant une définition par "définissons", "abrégeons" ou (plus court) "notons".[8]

1. Le cours est censé donner sens à l'application f. Renommons u, v, w les vecteurs resp. de la base canonique de $\mathbf{R}^3$. On a alors pour chaques[9] réels a, b, c les égalités

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= f\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f(au+bv+cw) = af(u)+bf(v)+cf(w) \\ &= a(-u) + b\cdot 0 + c(u+v+w) = (c-a)u + cv + cw = \begin{pmatrix} c-a \\ c \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. On a pour chaque réels a, b, c les égalités

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b-3c \\ 2b+3c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2b+3c)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ce qui montre que la famille $\left(\binom{1}{0}, \binom{-1}{1}\right)$ engendre l'image $\operatorname{Im} f$; cette famille étant par ailleurs libre (car échelonnée), elle est une base de $\operatorname{Im} f$, d'où l'égalité $\operatorname{rg} f = 2$. On a par ailleurs à $T =: (a,b,c) \in \mathbf{R}^3$ fixé[10]

[5] on aurait bien sûr un résultat analogue à droite

[6] il est bon de lier le côté de multiplication/composition avec le "par" pour éviter les ambigüités

[7] Il y a deux base pour décrire "la" matrice d'une application linéaire : une au départ, une à l'arrivée. L'énoncé est un peu vague en parlant « des bases canoniques ».

[8] éviter "posons" qui créé des confusions avec l'acte de *supposer*

[9] cette incorrection de français se construit comme "pour toutes fonctions f et g" signifie "pour toute fonction f, pour toute fonction g"

[10] T pour "**T**riplet". L'expression "à $T \in \mathbf{R}^3$ fixé" est synonyme de "pour chaque $T \in \mathbf{R}^3$", ce qui revient à invoquer "soit $T \in \mathbf{R}^3$" le temps de la phrase (de même qu'un "si" est un supposition le temps d'une phrase). Une fois T invoqué, on définit a, b, c comme étant ses coordonnées respectives : c'est le sens de la définition "$T =: (a,b,c)$".

les équivalences[11]

$$T\in\operatorname{Ker} f \iff f(x)=0 \iff f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{c}a-2b-3c=0\\2b+3c=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}a-(0)=0\\2b+3c=0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c}a=0\\b=3\frac{-c}{2}\end{array}\right. \stackrel{?}{\iff}\exists\lambda\in\mathbf{R},\left\{\begin{array}{c}a=0\\b=3\lambda\\c=-2\lambda\end{array}\right.\iff\exists\lambda\in\mathbf{R},\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\iff T\in\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}\right\}, \text{ d'où l'égalité ensembliste } \operatorname{Ker} f=\mathbf{R}\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}.$$

On en déduit les égalités

$$\operatorname{rg} f+\dim\operatorname{Ker} f=2+1=3=\dim\mathbf{R}^3,$$

ce qui est bien l'identité[12] du rang (l'espace vectoriel source est $\mathbf{R}^3$).

Sanity check : vérifier que le vecteur trouvé $(0,3?-2)$ dans $\operatorname{Ker} f$ annule bien f !

3. On a pour chaque réels a,b,c les égalités[13]

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}c-b\\a+c\\a+b\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\\ &= (a+b)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+(a+c)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

ce qui montre que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ engendre l'image $\operatorname{Im} f$; cette famille étant par ailleurs libre (car échelonnée), elle est une base de $\operatorname{Im} f$, d'où l'égalité $\operatorname{rg} f=2$. On a par ailleurs à $T=:(a,b,c)\in\mathbf{R}^3$ fixé les équivalences[14]

$$T\in\operatorname{Ker} f \iff f(x)=0\iff f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\left\{\begin{array}{c}c-b=0\\a+c=0\\a+b=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{c}b=c\\a=-c\end{array}\right.$$

$$\stackrel{?}{\iff}\exists\lambda\in\mathbf{R},\left\{\begin{array}{c}a=-\lambda\\b=\lambda\\c=\lambda\end{array}\right.\iff\exists\lambda\in\mathbf{R},\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff T\in\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \text{ d'où l'égalité ensembliste } \operatorname{Ker} f=\mathbf{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

On retrouve la même identité du rang (même espace vectoriel source, bien que celui but ait changé).

Sanity check : vérifier que le vecteur trouvé $(-1,1,1)$ dans $\operatorname{Ker} f$ annule bien f !

4. L'énoncé ne donne pas clairement sens à f : précisons les choses.

   (a) Soit $f:\mathbf{R}^7\longrightarrow\mathbf{R}^4$ linéaire surjective. La surjectivité de f revient à l'égalité de son rang avec la dimension de son espace but, çàd à $\operatorname{rg} f=\dim\mathbf{R}^4$, ou encore à $\operatorname{rg} f=4$. On en déduit la dimension du noyau

   $$\dim\operatorname{Ker} f=\dim(\text{ev source})-\operatorname{rg} f=\dim\mathbf{R^7}-4=7-4=3.$$

   La non-nullité du noyau revient à la non-injectivité de f.

   On généraliserait aisément : pour chaques naturels $p\geq q$, chaque application linéaire surjective $\mathbf{R}^p\longrightarrow\mathbf{R}^q$ vérifie les égalités $\left\{\begin{array}{c}\operatorname{rg} f=q\\\dim\operatorname{Ker} f=p-q\end{array}\right.$ et est injective ssi $p=q$.

---

[11] on va choisir comme "paramètre" $\frac{c}{-2}$ (en fait on vise plutôt c mais les calculs nous suggèrent de normaliser par -2 afin d'éviter les fractions à la fin) (bien prendre le temps de comprendre les deux sens de l'équivalence $\stackrel{?}{\iff}$)

[12] Nous préférons réserver le terme "théorème du rang" à un résultat plus fort dont découle l'identité du rang, à savoir qu'*est un isomorphisme d'espaces vectoriels la restriction de chaque application linéaire à chaque supplémentaire de son noyau.*

[13] *réflexe* : écrire l'abscisse sous la forme $c-b$ plutôt que $-b+c$ (comme dans l'énoncé) permet d'écrire deux fois moins de symboles d'opération

[14] on va choisir comme "paramètre" c

(b) Soit $f : \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}^8$ linéaire injective. L'injectivité de f revient à la nullité de noyau, çàd à la nullité de cette dimension. On en déduit le rang

$$\operatorname{rg} f = \dim(\text{ev source}) - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbf{R}^5 - 0 = 5.$$

Puisque $\operatorname{rg} f < \dim(\text{ev but})$, l'application f n'est pas surjective.

On généraliserait aisément : pour chaques naturels $p \leq q$, chaque application linéaire injective $\mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}^q$ vérifie les égalités $\left\{ \begin{array}{c} \operatorname{rg} f = p \\ \dim \operatorname{Ker} f = 0 \end{array} \right.$ et est surjective ssi $p = q$.

(c) Soit $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ linéaire surjective. En utilisant la généralisation de la question 4a dans le cas $p = q$, on obtient $\operatorname{rg} f = p$ et $\dim \operatorname{Ker} f = p - p = 0$ ainsi que l'injectivité de f, d'où sa bijectivité.

(d) Soit $f : \mathbf{R}^6 \longrightarrow \mathbf{R}^6$ linéaire injective. En utilisant la généralisation de la question 4b dans le cas $p = q$, on obtient $\operatorname{rg} f = p$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ ainsi que la surjectivité de f, d'où sa bijectivité.

4 application linéaire canoniquement associée à une matrice rectangulaire

L'égalité « $A = [...]$ » n'est pas une affirmation, c'est une *définition*. De même, « Soit f [...] » est une définition. En revanche, l'énoncé ne donne aucun sens à p et q !

Soient donc p, q des naturels, imposition suffisante et nécessaire que les puissances $\mathbf{R}^p$ et $\mathbf{R}^q$ fassent sens.

1. L'application f est la multiplication à-gauche-par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, laquelle est de taille 2×3, donc agit sur $\mathbf{R}^3$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, d'où l'égalité $\binom{p}{q} = \binom{3}{2}$.

2. L'énoncé ne donne aucun sens à x, y, z ! Et pour répondre à la question : l'image par f de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ce qui n'est guère intéressant. Il vaut mieux comprendre "donner une expression simple et pertinente de l'image...", cette simplicité-pertinence laissant toute marge de liberté.

   Soient a, b, c des réels. On a alors les égalités[15]

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b + 2c \\ 3a + 2b + c \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ d'où en particulier} \\ f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 - 2 + 2(-1) \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[15] observer comment chaque colonne de la matrice A se retrouve devant un coefficient a, b ou c

3. On a à $T =: (a,b,c)$ fixé dans $\mathbf{R}^3$ les équivalences[16]

$$T \in f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} 2a-b+2c \\ 3a+2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2a-b+2c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$$

$$\overset{L_1 \,:\, -2L_2}{\iff} \begin{cases} -4a-5b=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} -b=\frac{4}{5}a \\ c=-3a-2b \end{cases} \iff \begin{cases} -b=\frac{4}{5}a \\ c=-15\frac{a}{5}+8\frac{a}{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b=4\frac{a}{-5} \\ c=7\frac{a}{-5} \end{cases} \overset{?}{\iff} \exists\lambda\in\mathbf{R}, \begin{cases} a=-5\lambda \\ b=4\lambda \\ c=7\lambda \end{cases} \iff \exists\lambda\in\mathbf{R},\ T=\lambda\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\iff T \in \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right\}, \text{ d'où l'égalité ensembliste } \operatorname{Ker} f = \mathbf{R}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de f n'étant pas réduit à $\{0\}$, cette application n'est pas injective, donc admet plein de vecteurs distincts ayant même image, par exemple n'importe quels vecteurs du noyau, par exemple $(-5,4,7)$ et le vecteur nul.

4. Vu pour chaques réels a,b,c les égalités

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

la famille $\left(\binom{2}{3},\binom{-1}{2},\binom{2}{1}\right)$ engendre[17] l'image $\operatorname{Im} f$.Vu le calcul du noyau ci-dessus, cette famille n'est pas libre et possède une unique relation de liaison (à un scalaire près), à savoir $5\binom{2}{3} = 4\binom{-1}{2}+7\binom{2}{1}$. L'image de f est donc engendré par $\binom{-1}{2}$ et $\binom{2}{1}$, lesquels sont libres (toujours d'après le calcul de $\operatorname{Ker} f$) et constituent donc une base de $\operatorname{Im} f$. Cette dernière $\mathbf{R}^2$ valant par ailleurs tout l'espace but, elle n'admet aucun "système d'équations" intéressant : $0=0$ fera par exemple l'affaire.

Remarque. Retenir que l'image de l'application linéaire canoniquement associée à chaque matrice est le Vect des vecteurs colonnes de cette matrice.

5. Vu la non-nullité du noyau de f, cette dernière n'est pas injective, *a fortiori* pas bijective. En revanche, l'égalité de $\operatorname{Im} f$ avec tout l'espace but montre sa surjectivité.

Sanity check : l'identité du rang $\operatorname{rg} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim(\text{ev source})$ équivaut ici à $2+1=3$, ce qu'on a bien.

5 application linéaire canoniquement associée à une matrice carrée

L'égalité « $M = [...]$ » n'est pas une affirmation, c'est une *définition*. En revanche, « On considère » est une invitation à regarder[18] l'application f qui est définie par l'énoncé.

1. On a les égalités

$$f\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-7)(-2)+2\cdot 1-4\cdot 3 \\ 3(-2)-1\cdot 1+2\cdot 3 \\ 8(-2)-2\cdot 1+4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

[16] on va choisir pour paramètre $\frac{a}{-5}$ (en fait on on vise plutôt a mais les calculs nous suggèrent de normaliser par -5 afin d'éviter les fractions à la fin)

[17] cette famille est formée des vecteurs colonnes de la matrice A

[18] *cum sideris* = avec astres = contempler les étoiles

2. On a à $T =: (a,b,c)$ fixé dans $\mathbf{R}^3$ les équivalences[19]

$$T \in f\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{L_3\,:\,\times\frac{1}{2}}{\iff} \begin{cases} -7a+2b-4c=0 \\ 3a-b+2c=0 \\ 4a-b+2c=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\,:\,-L_2}{\overset{L_1\,:\,+2L_2}{\iff}} \begin{cases} -a=0 \\ b=3a+2c \\ a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=0 \\ b=2c \end{cases} \overset{?}{\iff} \exists\lambda\in\mathbf{R},\ \begin{cases} a=0 \\ b=2\lambda \\ c=\lambda \end{cases}$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbf{R},\ T=\lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff T\in\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\text{d'où l'égalité ensembliste } \operatorname{Ker} f = \mathbf{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de f est donc de dimension 1 : c'est une droite.

3. L'image de f est engendrée par les colonnes de M. Puisque la troisième est l'opposée du double de la deuxième, cette image se réduit à $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$, ou encore (remplacer $C_1 \leftarrow C_1 + 4C_2$) à $\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$. Les deux derniers vecteurs écrits forment une famille libre car échelonnée, donc une base de $\operatorname{Im} f$, laquelle image est de dimension 2 : c'est un plan.

(*Sanity check* : l'identité du rang s'écrit ici $2+1=3$.)

Afin de mettre un zéro de plus, remplaçons les deux dernier vecteurs (*via* $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$) par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a en déduit pour chaques réels a,b,c les équivalences

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} f \iff \exists\lambda,\mu\in\mathbf{R},\ T=\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \exists\lambda,\mu\in\mathbf{R},\ \begin{cases} a=\lambda+\mu \\ b=-\lambda \\ c=-2\mu \end{cases}$$

$$\iff \exists\lambda,\mu\in\mathbf{R},\ \begin{cases} a=(-b)-\frac{c}{2} \\ \lambda=-b \\ \mu=-\frac{c}{2} \end{cases} \iff 2a+2b+c=0.$$

Sanity check : la forme de l'équation trouvée est bien (dans $\mathbf{R}^3$) celle d'un plan.

Pour exhiber une vecteur de $\mathbf{R}^3$ hors de $\operatorname{Im} f$, il suffit de rajouter à une base (v,w) de $\operatorname{Im} f$ un vecteur u vérifiant la liberté de la famille (u,v,w) : alors le vecteur rajouté u ne peut être dans $\operatorname{Im} f$ sinon il serait engendré par v et w, ce qui nierait la liberté de (u,v,w). Partant des vecteurs de base $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, on peut par exemple rajouter devant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ afin de former une famille échelonnée (donc libre).

Remarque. On a en fait une base de $\mathbf{R}^3$, obtenue en complétant la base de $\operatorname{Im} f$ ci-dessus à l'aide de vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ (en l'occurrence : le premier), ce qui est cohérent avec le théorème de la base incomplète.

4. L'application f n'est ni injective (car de noyau non nul), ni surjective (car n'atteint pas le vecteur $(1,0,0)$), donc encore moins bijective.

Remarque. Soit A une matrice carrée et notons f l'application linéaire canoniquement associée. L'identité du rang montre alors l'équivalence entre les injectivité, surjectivité et bijectivité de f.

[19] on va choisir pour "paramètre" c

6 conjonction d'équations et matrices

L'énoncé définit très bien E mais ne donne aucun sens à x, y, z, t. On supposera donc que ce sont *les* inconnues de l'équation considérée, vues dans $\mathbf{R}$ pour éviter les discutions dans les complexes[20].

1. L'ensemble E est le noyau de l'application linéaire $\mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ canoniquement associée à la matrice réelle $\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 & -12 \\ -2 & 6 & -2 & -6 \\ -3 & -9 & -3 & 9 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.
2. *Cf.* question 1.
3. Effectuons les opérations élémentaires sur les lignes (notée A, B, C, D) de la matrice précédente, opérations correspondant à des manipulations sur l'équation à résoudre :

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 & -12 \\ -2 & 6 & -2 & -6 \\ -3 & -9 & -3 & 9 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A : \times\frac{1}{4} \\ B : \times\frac{1}{2} \\ C : \times\frac{-1}{3} \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} A : -C \\ B : +C \text{ puis } \times\frac{1}{6} \\ D : +2C \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} C : -3B \\ D : +2B \end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B : -\frac{1}{9}D \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi pour chaque quadruplet $Q =: (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$ les équivalences[21]

$$Q \in E \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -d = 0 \\ a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} d = 0 \\ a = -c \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\iff \exists\lambda \in \mathbf{R}, \begin{cases} a = -\lambda \\ b = 0 \\ c = \lambda \\ d = 0 \end{cases} \iff \exists\lambda \in \mathbf{R},\ Q = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d'où } E = \mathbf{R} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. L'énoncé ne donne aucun sens à l'exposant p. On interprétera donc : "Déterminer un naturel p et une application...".

   Profitons de cette occasion pour éclairer le terme "paramètre". Si l'on choisit par exemple de décrire de segment $[-1, 1]$ comme l'ensemble des cosinus des réels, çàd sous la forme $\{\cos\theta\}_{\theta\in\mathbf{R}}$, alors θ est ici un paramètre. On peut jouer dessus (comprendre : c'est une lettre muette) et il permet de décrire chaque valeur désirée (comprendre : est surjective l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ \theta & \longmapsto & \cos\theta \end{array} \right.$). De même, si l'on décrit le cercle unité privé de $(-1, 0)$ par l'ensemble des couples $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ lorsque t parcourt $\mathbf{R}$, la lettre t peut alors être vu comme un paramètre[22]. On retiendra donc :

   un paramètre est un argument d'une surjection.

   Pour revenir à notre droite E, dirigée par le vecteur $e := (-1, 0, 1, 0)$, elle est l'image de l'application linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ \lambda & \longmapsto & \lambda e \end{array} \right.$, le λ jouant ici le rôle d'un paramètre (le même que dans le calcul ci-dessus de E).

---

[20] La lectrice est néamoins invitée à se demander pourquoi le système considéré, lorsqu'on en cherche des solutions *complexes*, n'a que des solutions *réelles*.

[21] on va choisir c comme "paramètre"

[22] Ici, on a même bijectivité, la réciproque étant donné par $(a, b) \mapsto \frac{b}{a+1}$, que l'on devine sur un dessin en étudiant les angles dans le triangle formé par les points $O := \binom{0}{0}$, $C := \binom{a}{b}$ et $J := \binom{-1}{0}$. En effet, en appelant θ un argument du complexe $a + ib$, le paramètre t s'interprète comme la tangente $\tan\frac{\theta}{2}$ de l'angle $\widehat{OJC}$.

7 introduction au changement de base

« Soit f [...] » est une *définition*.

1. Légère imprécision de l'énoncé quant au sens de « vecteurs » : il s'agit évidemment d'éléments de l'espace vectoriel sur lequel agit f, à savoir $\mathbf{R}^2$.

   Déterminons une forme générale des vecteurs cherchés. Soient $u =: \binom{a}{A}$ et $v =: \binom{b}{B}$ dans $\mathbf{R}^2$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{c} f(u) = 2u \\ f(v) = u + 2v \end{array}\right.
&\iff \left\{\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ A \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} b \\ B \end{pmatrix} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{c} 4a + 4A = 2a \\ -a = 2A \\ 4b + 4B = a + 2b \\ -b = A + 2B \end{array}\right. \overset{L_1\,:\,\times\frac{1}{4}}{\underset{L_3\,:\,\times\frac{1}{2}}{\iff}} \left\{\begin{array}{c} (-A) + A = 0 \\ -a = 2A \\ 2(A + 2B) + 2B = -A \\ -b = A + 2B \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{c} -a = 2A \\ 3A + 7B = 0 \\ -b = A + 2B \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = -2A \\ B = -\frac{3}{7}A \\ b = -A + \frac{6}{7}A \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = 14\frac{-A}{7} \\ B = 3\frac{-A}{7} \\ b = \frac{-A}{7} \end{array}\right. \\
&\iff \exists\lambda \in \mathbf{R},\ \begin{pmatrix} a & b \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14\lambda & \lambda \\ -7\lambda & 3\lambda \end{pmatrix} \\
&\iff \exists\lambda \in \mathbf{R},\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 7\binom{2}{-1} \\ \binom{1}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Par conséquent, les vecteurs $7\binom{2}{-1}$ et $\binom{1}{3}$ répondent à la questions. (*Sanity check* indispensable !)

2. Notons $\binom{U}{V} := \begin{pmatrix} 7\binom{2}{-1} \\ \binom{1}{3} \end{pmatrix}$. Observer la liberté de la famille échelonnée $(U - 14V, V) = \left(\binom{0}{-49}, \binom{1}{3}\right)$, liberté équivalant à celle de la famille (U, V).

   (a) Soit λ un réel tel que $\binom{u}{v} = \lambda\binom{U}{V}$ (légitime vu ce qui précède). Vu l'imposition $u \neq 0$, le réel λ n'est pas nul. On a alors les équivalences

   $$(u, v) \text{ est une base de } \mathbf{R}^2 \iff (u, v) \text{ est libre} \iff \left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}\right) \text{ est libre} \iff (U, V) \text{ est libre, ce qu'on a établi.}$$

   (b) Les égalités imposées disent précisément que la matrice cherchée est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \underset{(u,v)}{\mathrm{Mat}} f$.

   (c) Imposons rétrospectivement $\lambda = 1$ (ce qui revient à imposer $\binom{U}{V} = \binom{u}{v}$). On a alors les égalités

   $$f(3u - v) = 3f(u) - f(v) = 3(2u) - (u + 2v) = 5u - 2v = 5 \cdot 7\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ -41 \end{pmatrix}.$$

   Autre démonstration :

   $$\underset{(u,v)}{\mathrm{Mat}} f(3u - v) = \underset{(u,v)}{\mathrm{Mat}} f \times \underset{(u,v)}{\mathrm{Mat}}(3u - v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

   d'où l'égalité $f(3u - v) = 5u - 2v$ et l'on termine comme ci-dessus.

   Sanity check : calculer sans passer par la base (u, v) en utilisant la matrice de départ

   $$f(3u - v) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\left(3\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 41 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 \\ -41 \end{pmatrix}.$$

8 projecteur et symétrie

On renommera volontiers $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ quand ces notations apparaîtront.

1. On vérifie aisément que Q contient 0 et est stable par combinaison linéaire. On peut également dire que Q est le noyau de l'application linéaire $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (a,b,c) & \longmapsto & a+b-c \end{array} \right.$ canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. Cherchons une base simple, avec des 0 et des 1. Par exemple[23], les vecteurs $u := (1,0,1)$ et $v := (0,1,1)$ vérifient l'équation donnée définissant Q, donc engendrent un sous-espace vectoriel de Q de dimension $2 = \dim Q$, donc engendrent Q. Cette famille étant par ailleurs libre (car échelonnée), elle est une base de Q.
3. L'équation donnée décrivant Q équivaut à la nullité du produit scalaire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, càd à l'orthogonalité des vecteurs (x,y,z) et $w := (1,1,-1)$. Ce dernier est ainsi orthogonal à chaque vecteur de Q, càd est orthogonal à Q.
   (Coquille : "**o**n notera")
4. Montrons qu'il suffit d'établir la liberté de la famille (u,v,w). Supposons en effet cette liberté. D'une part, la famille (u,v,w) engendrera alors tout $\mathbf{R}^3$, d'où l'égalité

$$Q + D = \text{Vect}\{u,v\} + \text{Vect}\{w\} = (\mathbf{R}u + \mathbf{R}v) + \mathbf{R}w = \mathbf{R}u + \mathbf{R}v + \mathbf{R}w = \text{Vect}\{u,v,w\} = \mathbf{R}^3,$$

   d'autre part, chaque élément dans l'intersection $Q \cap D$ s'écrivant $\alpha u + \beta v = \gamma w$ pour certains scalaire α, β, γ, la liberté supposée établie imposera la nullité de ces scalaires, d'où celle du vecteur invoqué dans $Q \cap D$ et l'égalité $Q \cap D = \{0\}$.

   La matrice concaténée des vecteurs colonnes u, v, w est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et devient échelonnée "par en haut à droite" après l'opération (sur les colonnes) $W : -U - V$, donc est de rang 3, d'où la liberté recherchée.
5. L'application p agit comme l'application linéaire ayant pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base (u,v,w), donc est cette application linéaire.
6. De même, l'application s est l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base (u,v,w).
7. (légère imprécision dans la précision de l'énoncé : "la base canonique $\underline{\underline{\text{de } \mathbf{R}^3}}$")
   (a) Inversons P par opération sur les colonnes (notées ici U, V, W) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} W : -U - V \\ \text{puis } W : \times \frac{-1}{3} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} U : -W \\ V : -W \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \text{ d'où } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) L'énoncé ne donne aucun sens à e_1, e_2, e_3 ! Il s'agit certainement des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Notons-les resp. a, b, c. Puisque P est la matrice de la famille (u,v,w) dans la base (a,b,c),

[23] on essaiera d'abord les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^3$, qui n'appartiennent hélas pas à Q

l'inverse P^{-1} est la matrice de la famille (a, b, c) dans la base (u, v, w), d'où les coordonnées cherchées (lire les colonnes de P^{-1}) :

$$a = \frac{2u - v + w}{3},\ b = \frac{2v - u + w}{3} \text{ et } c = \frac{u + v - w}{3}.$$

(c) On a d'une part les égalités

$$\begin{aligned}
p(a) &= p\left(\frac{2u - v + w}{3}\right) = \frac{2p(u) - p(v) + p(w)}{3} = \frac{2u - v}{3} = \frac{1}{3}(2, -1, 1),\\
p(b) &= p\left(\frac{2v - u + w}{3}\right) = \frac{2p(v) - p(u) + p(w)}{3} = \frac{2v - u}{3} = \frac{1}{3}(-1, 2, 1)\\
\text{et } p(c) &= p\left(\frac{u + v - w}{3}\right) = \frac{p(u) + p(v) - p(w)}{3} = \frac{u + v}{3} = \frac{1}{3}(1, 1, 2),
\end{aligned}$$

d'autre part les égalités

$$\begin{aligned}
s(a) &= s\left(\frac{2u - v + w}{3}\right) = \frac{2s(u) - s(v) + s(w)}{3} = \frac{2u - v - w}{3} = \frac{1}{3}(1, -2, 2),\\
s(b) &= s\left(\frac{2v - u + w}{3}\right) = \frac{2s(v) - s(u) + s(w)}{3} = \frac{2v - u - w}{3} = \frac{1}{3}(-2, 1, 2),\\
s(c) &= s\left(\frac{u + v - w}{3}\right) = \frac{s(u) + s(v) - s(w)}{3} = \frac{u + v + w}{3} = \frac{1}{3}(2, 2, 1).
\end{aligned}$$

8. Les coordonnées de chaque vecteur de $\mathbf{R}^3$ étant précisément celles dans la base canonique (a, b, c) (abrégée ci-après "b. c."), les égalités précédentes se réécrivent directement (mettre les six vecteurs lignes ci-dessus en colonnes)

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Mat}_{\text{b. c.}}(p(a), p(b), p(c)) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\\
\text{et } \operatorname*{Mat}_{\text{b. c.}}(s(a), s(b), s(c)) &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Sanity check : en notant $\mathcal{B}$ la base (u, v, w) de $\mathbf{R}^3$, on a les égalités

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Mat}_{\text{b. c.}}(p(a), p(b), p(c)) &= \operatorname*{Mat}_{\text{b. c.}} p = \operatorname*{Pass}_{\text{b. c.}\to\mathcal{B}} \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} p \operatorname*{Pass}_{\mathcal{B}\to\text{b. c.}} = P \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} p\ P^{-1}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 1 & 1 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 1 & 1 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Commentaires de calcul.

(a) La 3$^{\text{e}}$ ligne de zéros de la matrice du milieu permet de ne pas tenir compte de la 3$^{\text{e}}$ colonne de la matrice de gauche, ou de la 3$^{\text{e}}$ ligne de la matrice de droite.

(b) Pour calculer le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ sans effort, on peut déjà remarquer à $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ fixés que multiplier à-gauche-par $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ revient à effectuer $\begin{matrix} L_1 : \times\lambda \\ L_2 : \times\mu \end{matrix}$, ce qui se généraliserait sans problème à une matrice diagonale de taille quelconque. En particulier, multiplier à-gauche-par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ revient simplement à annuler la 3$^{\text{e}}$ ligne – aucun effort, on vous l'avait dit.

(c) Ensuite, dans le produit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 1 & 1 & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, la nullité de la 3$^{\text{e}}$ ligne (à droite) et la présence de $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ tout à gauche en haut permettent d'utiliser la même propriété : les deux premières lignes sont multipliées par 1, çàd ne bougent pas.

(d) Enfin, pour évaluer la 3$^{\text{e}}$ ligne du dernier produit, la ligne de uns à gauche nous dit qu'il suffit d'ajouter les coefficients des colonnes de droites – seul petit effort.

Sanity check (pour s) : on a les égalités (calculons différemment pour varier les commentaires)

$$\begin{aligned}
\underset{\text{b. c.}}{\mathrm{Mat}}\left(s\left(a\right), s\left(b\right), s\left(c\right)\right) &= \underset{\text{b. c.}}{\mathrm{Mat}} s = \underset{\text{b. c.}\to\mathcal{B}}{\mathrm{Pass}}\ \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, s\ \underset{\mathcal{B}\to\text{b. c.}}{\mathrm{Pass}} = P\ \underset{\mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}\, s\ P^{-1} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Commentaires de calcul.

(a) Remarquer à $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ fixés que multiplier à-droite-par $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ revient à effectuer $\begin{matrix} C_1 : \times\lambda \\ C_2 : \times\mu \end{matrix}$, ce qui se généraliserait sans problème comme pour les lignes et la gauche. En particulier, multiplier à-droite-par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ revient simplement à opposer la 3$^{\text{e}}$ colonne.

(b) Comme pour p, la 3$^{\text{e}}$ ligne du dernier produit s'obtient en ajoutant les coefficients des colonnes de droites.

(c) Pour retenir l'adage "multiplier à $\begin{matrix} \text{gauche} \\ \text{droite} \end{matrix}$ agit sur les $\begin{matrix} \text{lignes} \\ \text{colonnes} \end{matrix}$", on peut :

i. faire un test en multipliant à-droite/gauche-par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ une matrice cobbaye $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$;

ii. utiliser les ordre de lecture usuels : de gauche à droite (en français), lignes puis colonnes (pour les double-indices des matrices) ;

iii. prononcer $GL\left(\mathbb{C}\right)$: G-L-De-C ;

iv. regarder les consonnes prononcées de "**g**eu**l**e **d**e **c**on" ;

v. observer que $\begin{matrix} \text{li}\mathbf{G}\text{ne} \\ \mathbf{G}\text{auche} \end{matrix}$ ont un "**G**" en commun et $\begin{matrix} \text{col}\mathbf{O}\text{nne} \\ \text{dr}\mathbf{O}\text{ite} \end{matrix}$ ont un "**O**" en commun ;

vi. utiliser l'ordre alphabétique : C D G L ;

vii. observer la forme d'un produit scalaire $\begin{pmatrix} L & I & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ O \\ L \end{pmatrix}$.

9 identités de passage

L'énoncé ne donne aucun sens à x et y, il a voulu écrire « définie par $(x, y) \mapsto$ (bla bla) » (où les lettres x, y sont ici *muettes*).

Sont *définis* (et non invoqués) l'application f, le vecteur v, la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbf{R}^2$ (laquelle nous noterons $\mathcal{B}$ tout court), ainsi que la base $\mathcal{B}_1$ (que nous noterons $\mathcal{B}'$ ou même plutôt $\mathcal{C}$).

Insistons sur la maladresse de la définition de $\mathcal{C}$: la formulation « Soit [...] une autre base de $\mathbf{R}^2$ » ressemble vraiment à une invocation – or il n'est pas du tout question d'invoquer *n'importe autre* base mais bien de porte notre attention sur celle qui est donnée. D'autre part, même en remplaçant "Soit" par "Notons", cela devient : « Notons $\mathcal{C} :=$ (bla bla) une autre base », définition qui ressemble encore à une invocation suivie d'une définition à l'instar de « Soit $T =: (a, b, c)$ un triplet de réels » (on pourrait en effet comprendre « Soit une autre base, on notera ses coordonnées $\left(\binom{3}{2},\binom{2}{2}\right)$ », ce qui serait insensé[24]). Une définition qui cache par ailleurs deux affirmations (à savoir : $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{C}$ n'est pas $\mathcal{B}$). Afin d'éviter toutes ces confusions tout en respectant l'esprit de l'énoncé, il nous paraît bien plus clair d'écrire

« Notons $\mathcal{C}$ la famille $\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right)$. On admettra qu'il s'agit d'une base de $\mathbf{R}^2$. »

1. L'application f étant l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$, on a directement l'égalité $\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}$.
2. On a les égalités $f(v) = f\binom{3}{-4} = \binom{2\cdot 3-4}{3\cdot 3-2(-4)} = \binom{2}{17}$, d'où les coordonnées demandées :
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f(v) = \begin{pmatrix}2\\17\end{pmatrix}.$$
3. Soit $n \in \mathbf{N}$ (ici $n=2$) et soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ (ici $\mathcal{F}=\mathcal{C}$) : la matrice de passage vers $\mathcal{F}$ depuis la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est alors la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique (de $\mathbf{R}^n$), çàd la matrice dont les colonnes sont précisément les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ (chaque vecteur de $\mathbf{R}^n$ étant *a priori* donné sous forme de liste de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$). *Bref* :

   pour passer (dans un $\mathbf{R}^n$) depuis la base canonique, on concatène.

   Dans le cas présent, on obtient
$$P := \operatorname*{Pass}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{C} = \operatorname*{Mat}_{\text{base canonique}}\left(\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3&2\\2&2\end{pmatrix}.$$
   Son inverse[25] est
$$P^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix}3&2\\2&2\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}2&-2\\-2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$
4. On en déduit[26]
$$\begin{aligned}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} v &= \left[\operatorname*{Pass}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\right]^{-1}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} v = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}\\ \text{et } \operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} f(v) &= \left[\operatorname*{Pass}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\right]^{-1}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f(v) = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\\frac{47}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$
5. On a les égalités
$$\begin{aligned}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} f &= P^{-1}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} f\quad P = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\2&2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&-1\\-1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&6\\5&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4\\-\frac{1}{2}&-3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$
   Sanity check on a les égalités
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} f(v) = \operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} f\ \operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} v = \begin{pmatrix}3&4\\-\frac{1}{2}&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\\frac{47}{2}\end{pmatrix}$$

[24] on peut pas introduire un nouveau nom en utilisant des symboles qui dénotent déjà, sinon une même étiquette renvoie à deux objets distincts et c'est la pagaille

[25] chaque matrice de passage est inversible, d'inverse obtenu en échangeant les deux bases considérées

[26] Si on veut se souvenir s'il faut ou non rajouter un inverse, penser à une relation de Chasles : les deux $\mathcal{B}$ et les deux $\mathcal{C}$ doivent être collés, "donc" la bonne identité est
$$\operatorname*{Mat}_{\mathcal{C}} v = \operatorname*{Pass}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} v = \left[\operatorname*{Pass}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}\right]^{-1}\operatorname*{Mat}_{\mathcal{B}} v.$$