Université Paris-Saclay
Algèbre linéaire/EC221

Année 2019-2020
S2 du L1 Mathématique

TD5. Rang d'une famille de vecteurs. Matrices et Applications linéaires. Changement de bases. Matrice de passage.

Exercice 1.

(1) Quel est le rang de la famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right)$?
Même question pour $\left(\begin{pmatrix}1\\t\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}\right)$ en fonction du paramètre $t \in \mathbb{R}$.

(2) Mettre sous forme échelonnée par rapport aux colonnes la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & -4 & -2 & -1\\0 & -2 & 4 & 2 & 0\\1 & 1 & -2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.
Calculer son rang. Idem avec $\begin{pmatrix}1 & 7 & 2 & 5\\-2 & 1 & 1 & 5\\-1 & 2 & 1 & 4\\1 & 4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

(3) Calculer le rang de $\begin{pmatrix}2 & 4 & -5 & -7\\-1 & 3 & 1 & 2\\1 & a & -2 & b\end{pmatrix}$ en fonction de a et b.

(4) Calculer les rangs précédents en utilisant les vecteurs lignes.

Exercice 2. On considère les applications suivantes.

$$f : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & 3y-2x\end{array}\right. \quad g : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & 3x\times 2y\end{array}\right. \quad h : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x-y\\x^2-y^2\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

$$k : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2\\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}x-y+z\\2x+z\end{pmatrix}\end{array}\right. \quad \varphi : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \cos(x)\end{array}\right. \quad \psi_a : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & ax\end{array}\right. \text{ où } a \in \mathbb{R}$$

1. Parmi ces applications, indiquer lesquelles sont linéaires. Justifier vos réponses.
2. Pour chacune des applications linéaires trouvées, donner sa matrice dans les bases canoniques.

Exercice 3.

(1) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner l'expression de $f(x, y, z)$ où$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'application linéaire qui envoie e_1 sur son opposé, qui envoie e_2 sur le vecteur nul et qui envoie e_3 sur la somme des trois vecteurs e_1, e_2, e_3.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x - 2y - 3z, 2y + 3z)$. Calculer une base du noyau de f, une base de l'image de f et vérifier le théorème du rang.

(3) Même question avec $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-y + z, x + z, x + y)$.

(4) Lorsque c'est possible, calculer la dimension du noyau, le rang et dire si f peut être injective, surjective, bijective
- Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$.
- Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$.
- Une application linéaire surjective $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.
- Une application linéaire injective $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$.

Exercice 4. On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ ayant cette matrice dans les bases canoniques.

1. Quelles sont les valeurs de p et q ?

2. Quelle est l'image de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par f ? Calculer $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Etude du noyau de f : déterminer un système d'équations de $\ker f$ puis une base de $\ker f$. Peut-on trouver deux vecteurs différents ayant la même image par f ? (Si oui, donner deux tels vecteurs).

4. Etude de l'image de f : déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ puis un système d'équations de $\mathrm{Im} f$.

5. L'application linéaire f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 5. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer un système d'équations de $\ker f$ puis une base de $\ker f$. Quelle est la dimension de $\ker f$?

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$ puis un système d'équations de $\mathrm{Im} f$. Quelle est la dimension de $\mathrm{Im} f$? Donner un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne soit pas dans $\mathrm{Im} f$.

4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 6. On note E l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 4x & + & 12y & + & 4z & - & 12t & = & 0 \\ -2x & + & 6y & - & 2z & - & 6t & = & 0 \\ -3x & - & 9y & - & 3z & + & 9t & = & 0 \\ -2x & + & 4y & - & 2z & - & 4t & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Sans résoudre ce système, rappeler pourquoi l'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont E soit le noyau.

3. Résoudre le système (S). En déduire une base de E.

4. Déterminer une application linéaire $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^4$ telle que $E = \mathrm{Im}\, g$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver des vecteurs u, v tels que

$$u \neq 0, \quad f(u) = 2u \text{ et } f(v) = u + 2v$$

2. Soient u, v des vecteurs vérifiant $u \neq 0, \quad f(u) = 2u$ et $f(v) = u + 2v$.

  a. Montrer que u, v forment une base de $\mathbb{R}^2$.

  b. Ecrire la matrice de f dans cette base.

  c. On utilise les vecteurs u, v trouvés au **1**. Calculer $f(3u - v)$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan Q d'équation cartésienne $x + y - z = 0$.

1. Rappeler pourquoi Q est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Donner une base (u_1, u_2) de Q.

3. Donner un vecteur u_3 normal à Q.

Dans la suite de l'exercice, On notera D la droite passant par O et ayant comme vecteur directeur u_3. Ainsi, la droite D est orthogonale à Q.

4. Montrer que Q et D sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires l'un de l'autre dans $\mathbb{R}^3$.

5. On note p l'application définie par

$$p(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = a_1u_1 + a_2u_2 \text{ pour tous } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

  a. Montrer que p est une application linéaire.

b. Quelle est la matrice de p dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

6. On note s l'application définie par

$$s(a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3) = a_1u_1 + a_2u_2 - a_3u_3 \text{ pour tous } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$$

a. Montrer que s est une application linéaire.

b. Quelle est la matrice de s dans la base (u_1, u_2, u_3) ?

7. a. Soit P la matrice dont les colonnes sont u_1, u_2, u_3 (plus précisément dont les colonnes sont les coordonnées de u_1, u_2, u_3 dans la base canonique). Calculer l'inverse P^{-1} de la matrice P.

b. En déduire les coordonnées de e_1, e_2, e_3 dans la base (u_1, u_2, u_3).

c. Calculer $p(e_1), p(e_2), p(e_3)$ puis $s(e_1), s(e_2), s(e_3)$.

8. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, puis la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$, Soit $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ avec ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}_1 = (\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right))$ une autre base de $\mathbb{R}^2$.

(1) Calculer la matrice de f dans la base canonique.
(2) Calculer les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique.
(3) Calculer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$.
(4) En déduire les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}_1$, et de $f(v)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.
(5) Calculer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_1$.