TD4. CALCUL MATRICIEL

Exercice 1. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A+B$, $A+C$ et $A-C$.

2. Calculer $-2B$ puis $A-2B$.

3. Calculer la combinaison linéaire $2A-3B+5C$.

Exercice 2.

1. Calculer les produits possibles de deux matrices parmi les suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^2. La matrice M est-elle diagonale ? Et la matrice M^2 ?

Exercice 3. Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Donner des exemples :

1. de matrices A, B carrées 2×2 telles que $AB \neq BA$,

2. de matrices A, B carrées 2×2 telles que $A \neq B$ et $AB = BA$

3. de matrices A, B non carrées telles que AB et BA existent. Ces produits peuvent-ils être égaux ?

4. d'une matrice carrée non nulle dont le carré est nul.

5. de deux matrices carrées A, B non nulles et non égales dont le produit est nul.

Exercice 5. On considère les matrices à coefficients réels suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Les matrices A et B commutent-elles ? Et les matrices A et C ?

2. Calculer $A^2, A^3, B^2, B^3, C^2, C^3$.

3. Peut-on utiliser les identités remarquables pour calculer $(A+B)^2$ et $(A+C)^2$? Calculer ces deux matrices.

4. Calculer $(A+B)^3$.

Exercice 6. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.

Exercice 7. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^p et B^p pour tout $p \geq 0$. Montrer que $AB = BA$. Calculer $(A+B)^p$.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n en utilisant la formule du binôme en écrivant $A = I + J$.

Exercice 9. On considère la matrice à coefficients réels suivante

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer toutes les puissances de B.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

En remarquant que $A = aI_3 + B$, calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -6 & 12 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -5 \\ -33 & -2 & 15 \\ 22 & 2 & -9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -4 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Chacune de ces matrices est inversible. Calculer son inverse.

2. Calculer l'inverse de AB et l'inverse de AC.

Exercice 11.

1. Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer l'unique matrice M (et donner son format) telle que $AMB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 12. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -10 & 11 & 8 \\ 10 & -10 & -7 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$.

3. Calculer le produit $P^{-1}AP$. En déduire $(P^{-1}AP)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculer le plus simplement possible A^3 et A^4.

Exercice 13. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on considère la matrice A suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de a cette matrice est-elle inversible ? (On rappelle qu'une matrice $n \times n$ à coefficients réels est inversible lorsque ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^n$.)

2. Dans cette question, on se place dans le cas $a = 2$. Calculer l'inverse de A.

Exercice 14. Soient a, b des nombres réels non tous deux nuls.
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si c'est le cas, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b & a+b \\ a & -b & a-b \\ b & a & a+b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 15. Si possible calculer l'inverse des matrices : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$.

Exercice 16. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A(\theta)^{-1}$.

Exercice 17. Calculer l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18. Trouver toutes les matrices à coefficients réels qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 19. Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}^r$. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $\big(A(\theta)\big)^n$ pour $n \geq 1$.

Exercice 20. Pour x réel, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

Déterminer $(A(x))^n$ pour x réel et n entier relatif.