TD 3 Algèbre linéaire
solutions proposées

Marc SAGE

janvier-mai 2020

Table des matières

1 Exercice 8

Renommons[1] $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Afin d'anticiper sur la deuxième question, commençons par clarifier la situation : a-t-on vraiment de *tous* les vecteurs a, b, c, d pour engendrer E ? Formellement : la famille (a, b, c, d) est-elle libre ? Nous allons montrer que c et d sont engendrés par a, b.

Soient r, s, t, u des réels. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned}
rq + sb + tc + ud = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} r + s + 2t - 2u = 0 \\ 3r + 2z + 3t + u = 0 \\ -r + s + 4t - 12u = 0 \\ 2r + s + t + 3u = 0 \end{array} \right. \overset{L_4 \,:\, -L_3}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} idem \\ idem \\ idem \\ 3r - 3t + 15u = 0 \end{array} \right. \\
&\overset{L_3 \,:\, \div 3}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} idem \\ idem \\ idem \\ t = r + 5u \end{array} \right. \underset{\substack{t \text{ partout} \\ \text{sauf } L_4}}{\overset{\text{substituer}}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{c} r + s + 2\,(r + 5u) - 2u = 0 \\ 3r + 2z + 3\,(r + 5u) + u = 0 \\ -r + s + 4\,(r + 5u) - 12u = 0 \\ t = r + 5u \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3r + s + 8u = 0 \\ 6r + 2z + 16u = 0 \\ 3r + s + 8u = 0 \\ t = r + 5u \end{array} \right. \overset{L_1 \Longleftrightarrow L_3}{\underset{L_2"="2L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{c} 3r + s + 8u = 0 \\ t = r + 5u \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} s = -3r - 8u \\ t = r + 5u \end{array} \right. \Longleftrightarrow \exists R, U, \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ -3R - 8U \\ 5U + R \\ U \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists R, U, \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + U \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En particulier, les deux quadruplets mis à jour $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ donnent les relations de liaison

$$a - 3b + c = 0 \text{ et } -8b + 5c + d = 0, \text{ çàd } \left\{ \begin{array}{c} c = 3b - a \\ d = 8b - 5c \end{array} \right., \text{ ou encore } \left\{ \begin{array}{c} c = 3b - a \\ d = 5a - 7b \end{array} \right.,$$

et les équivalences ci-dessus montrent qu'il n'y en a pas d'autres (outre leurs CL). Elles montrent également que la famille (a, b) est libre (imposer $t = 0 = u$ dans $\left\{ \begin{array}{c} s = -3r - 8u \\ t = r + 5u \end{array} \right.$ donne (2^{e} ligne) $r = 0$ puis (1^{re} ligne) $s = 0$).

Par conséquent, on peut retirer c et d de la famille (a, b, c, d) sans modifier le sev qu'elle engendre :

$$E = \operatorname{Vect}\{a, b, c, d\} \overset{c, d \in \operatorname{Vect}\{a, b\}}{=} \operatorname{Vect}\{a, b\}.$$

La famille libre (a, b) engendre donc E et en est une base. Le sev E est donc un plan (çàd est de dimension 2).

Revenons à la question de départ : *trouver un système d'équation pour E à partir d'une de ses familles génératrices*. Afin d'alléger les calculs qui suivent, mettons quelques zéros dans les coordonnées des vecteurs a

[1] nous évitons ainsi de reporter la lecture des symboles $v_?$ à distinguer à celle de leurs *indices* (qui sont tout petits !), la lettre identique v ne servant par ailleurs à rien sinon à créer du "bruit" visuel

et b, par exemple en définissant $b' := 2b - a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ puis $a' := \frac{a-b'}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On garde le même

$$\operatorname{Vect}\left\{a^{'}, b'\right\} \underset{\supset \,:\, a=2a'+b'}{\overset{\subset \,:\, a'=\frac{a-b'}{2}}{=}} \operatorname{Vect}\left\{a, b'\right\} \underset{\supset \,:\, b=\frac{a+b'}{2}}{\overset{\subset \,:\, b'=2b-a}{=}} \operatorname{Vect}\left\{a, b\right\} = E.$$

Soit ensuite $Q =: \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$: on a les équivalences

$$Q \in E \iff Q \in \operatorname{Vect}\{a, b\} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ Q = \lambda a + \mu b.$$

Or on a à λ, m fixés dans $\mathbf{R}$ (à penser comme des inconnues) les équivalences

$$Q = \lambda a + \mu b \iff \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{c} r = \lambda \\ s = \lambda + \mu \\ t = 3\lambda - 3\mu \\ u = \mu \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \lambda = r \\ s = r + u \\ t = 3r - 3u \\ \mu = u \end{array} \right. ,$$

d'où les équivalences

$$Q \in E \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ Q = \lambda a + \mu b \iff \exists \lambda, m \in \mathbf{R}, \left\{ \begin{array}{c} \lambda = r \\ s = r + u \\ t = 3r - 3u \\ \mu = u \end{array} \right. \overset{?}{\iff} \left\{ \begin{array}{c} s = r + u \\ t = 3r - 3u \end{array} \right.$$

$\bigstar$ *Bien prendre le temps de vérifier les deux implications de la dernière équivalence* $\overset{?}{\iff}$ $\bigstar$

Nous venons de trouver un système d'équations candidats. *Sanity check* : les vecteurs a et b vérifient bien ces deux équations !

Il n'y a évidemment pas unicité des équations trouvées : penser à une droite dans l'espace qui peut s'écrire comme intersection de n'importe quelle paire de plans la contenant (chaque paire de plans donnant une paire d'équations différentes). Par exemple, on vérifiera que le système d'équations $\left\{ \begin{array}{c} 3y = z + 5t \\ 3x = z + 2t \end{array} \right.$ définit aussi E. On retiendra :

$$\begin{array}{c} \textit{nombre d'équations} \\ \textit{(indépendantes !)} \end{array} + \begin{array}{c} \textit{dimension du sev dont on} \\ \textit{cherche un système d'équations} \end{array} = \begin{array}{c} \textit{dimension} \\ \textit{totale} \end{array}.$$

Interprétation géométrique : on écrit notre sev comme intersections d'hyperplan, chaque hyperplan rajouté ajoutant une équation tout en décrémentant la dimension (partant de 0 hyperplan où l'intersection est alors le sev plein).

2 Exercice 9

Renommons a, b, c, d, e les vecteurs u_i lorsque i varie resp. de 1 à 5 (définir au besoin pour la première question $u_4 := 0 =: u_5$). On va écrire les vecteurs a, b, c, d, e l'un à côté de l'autre puis effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes du tableau ainsi obtenu, ce qui ne changera pas le Vect de ses colonnes (fait important : bien s'en convaincre pourquoi !), afin d'obtenir le plus de 0 possible. Pour la lecture, on appellera les colonnes C_i par le nom des vecteurs qu'elle dénotaient au début : a, b, c...

1.
$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \underset{b \leftarrow b-a}{\overset{c \leftarrow c-3a}{\longrightarrow}} \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \overset{c \leftarrow \frac{1}{-5}c}{\longrightarrow} \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \underset{a \leftarrow a-2c}{\overset{b \leftarrow b-c}{\longrightarrow}} \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \overset{a \leftarrow a-b}{\longrightarrow} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}.$$

La nouvelle famille, notons-la (a', b', c'), est par ailleurs libre : dans une relation de liaison entre a', b', c', lire resp les abscisses, ordonnées et 4[es] coordonnées livre la nullité du coefficient devant resp. b', c' et a'.

La famille (a', b', c') est donc une base de E. Pour en trouver une équation, invoquons un quadruplet $Q =: (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ et déroulons les équivalences :

$$\begin{aligned}
Q \in E &\iff \exists \lambda, \mu, \xi \in \mathbf{R},\ Q = \lambda a' + \mu b' + \nu c' \\
&\iff \exists \lambda, \mu, \xi \in \mathbf{R},\ \left\{ \begin{array}{c} x = \mu \\ y = \nu \\ z = 4\mu - 3\lambda \\ t = \lambda \end{array} \right. \iff \exists \lambda, \mu, \xi \in \mathbf{R},\ \left\{ \begin{array}{c} x = \mu \\ y = \nu \\ z = 4x - 3t \\ t = \lambda \end{array} \right. \\
&\iff z = 4x - 3t.
\end{aligned}$$

Sanity check : la somme de la dimension de l'ev E et du nombre d'équations trouvées vaut $3 + 1 = 4$, à savoir la dimension de l'ev ambiant $\mathbf{R}^4$.

2.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{array} \xrightarrow[c \leftarrow c - 3a]{\substack{d \leftarrow \frac{1}{2} d \\ e \leftarrow e - 3b}} \begin{array}{ccccc} 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow[a \leftarrow a - 2b]{\substack{e \leftarrow e - 2d \\ c \leftarrow c + 2b}} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow[a \leftarrow a - d]{b \leftarrow b - d} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

En notant (a', b', c', d', e') la nouvelle famille, alors la sous-famille (a', b', d') est une base de E (liberté immédiate). Invoquons ensuite un quadruplet $Q =: (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ et déroulons les équivalences :

$$\begin{aligned}
Q \in E &\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R},\ Q = \lambda a' + \mu b' + \nu d' \\
&\iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R},\ \left\{ \begin{array}{c} x = \mu \\ y = \lambda \\ z = -3\lambda \\ t = \nu \end{array} \right. \iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R},\ \left\{ \begin{array}{c} x = \mu \\ y = \nu \\ z = -3y \\ t = \lambda \end{array} \right. \\
&\iff z = -3y.
\end{aligned}$$

Sanity check : le même.

3.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 11 & -10 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & -5 & 3 \end{array} \xrightarrow[\substack{d \leftarrow d - 5a \\ e \leftarrow e + 3a}]{\substack{b \leftarrow b - a \\ c \leftarrow b - a}} \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \xrightarrow[\substack{c \leftarrow c + 2b \\ a \leftarrow a - 2b}]{\substack{e \leftarrow e + 4b \\ d \leftarrow d - b}} \begin{array}{ccccc} 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

En notant (a', b', c', d', e') la nouvelle famille, alors la sous-famille (a', b') est une base de E (liberté immédiate). Invoquons ensuite un quadruplet $Q =: (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ et déroulons les équivalences :

$$\begin{aligned}
Q \in E &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ Q = \lambda a' + \mu b' \\
&\iff \exists \lambda, \mu, \xi \in \mathbf{R},\ \left\{ \begin{array}{c} x = 5\lambda - 2\mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ t = -\lambda \end{array} \right. \iff \exists \lambda, \mu, \xi \in \mathbf{R},\ \left\{ \begin{array}{c} x = 5z - 2y \\ y = \mu \\ z = \lambda \\ t = -z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} x = 5z - 2y \\ t = -z \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Sanity check : le même $(2 + 2 = 4)$.