Université Paris-Saclay
Algèbre linéaire/EC221

Année 2019 – 2020
S2 du L1 Mathématique

TD3. Bases(suite), Systèms linéaires

Exercice 1. Dire si les familles de vecteurs suivantes peuvent être complétées en une base de $\mathbb{R}^4$ en utilisant des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Si oui, le faire.

1. (u, v, w) avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$;

2. (u, v, w) avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3. (u, v) avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. On considère la partie F de $\mathbb{R}^4$ définie par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}.$$

1. Donner une base de F.

2. Compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^4$.

3. On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre?

4. On pose G l'espace vectoriel engendré par les vecteurs u_1, u_2 et u_3. Quelle est la dimension de G?

5. Donner une base de $F \cap G$.

6. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.

7. Est-ce qu'un vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit de façon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G?

Exercice 3. Pour tous nombres réels a, b, c, on considère le système suivant

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 6y & + & 2z & = & a \\ -2x & + & 15y & - & 6z & = & b \\ -x & + & 4y & & & = & c \end{array} \right.$$

1. Résoudre ce système. Le nombre de solutions de ce système dépend-t-il des valeurs de a, b, c ?

2. En déduire que les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Donner les coordonnées de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base u_1, u_2, u_3.

Exercice 4. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on considère le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & a \\ 2x & + & y & + & z & = & b \\ 3x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$$

1. Résoudre ce système pour $a = b = c = 0$, c'est-à-dire le système homogène correspondant.

2. Résoudre ce système pour $a = b = c = 1$.

3. Résoudre ce système pour $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

4. Le nombre de solutions de ce système est-il le même quels que soient $a, b, c \in \mathbb{R}$?

5. Résoudre ce système avec le second membre littéral a, b, c.

6. En déduire une équation du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on considère le système

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} -x & + & y & - & z & & & = & a \\ 2x & & & + & z & + & t & = & b \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & c \end{array}\right.$$

1. Résoudre le système homogène correspondant à (S). L'espace E des solutions est-il réduit à $\{0\}$? Déterminer une base du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$.

2. Résoudre le système (S) avec le second membre littéral, montrer que ce système a toujours une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ quels que soient a, b, c ?

3. Sans calcul supplémentaire, indiquer quel est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. La résolution précédente a-t-elle mené à écrire une équation de compatibilité ? Pourquoi ?

Exercice 6. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & + & z & + & 2t & = & a \\ 3x & + & y & + & z & + & 3t & = & b \\ 2x & + & y & + & z & + & 2t & = & c \\ x & + & y & + & 2z & & & = & d \end{array}\right.$$

1. Discuter suivant les valeurs de a, b, c, d s'il y a des solutions à ce système ou non.

2. On se place dans le cas $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, $d = -5$.

- **a.** Le système a-t-il des solutions ?
- **b.** Si oui, donner une solution (x_0, y_0, z_0, t_0).
- **c.** L'ensemble des solutions est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$?
- **d.** Retrouver que (x, y, z, t) est une solution si et seulement s'il s'écrit comme somme de (x_0, y_0, z_0, t_0) avec une solution du système homogène correspondant à (S).

3. Déterminer une équation ou un système d'équations du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Résoudre chacun des systèmes suivants.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & -1 \\ -x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & - & 2z & = & -4 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 7 \\ x & + & y & & & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 8. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un système d'équations du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1, u_2, u_3, u_4.

2. Déterminer une base de E et sa dimension, à l'aide de la méthode de Gauss pour échelonner un système de vecteurs qui engendrent un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 9. Dans chacun des cas suivants, donner une base du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs fournis. Si $E \neq \mathbb{R}^4$, indiquer comment compléter la base de E donnée en une base de $\mathbb{R}^4$. Déterminer un système d'équations de E.

1. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

3. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$