TD 2 Algèbre
solutions proposées

Marc SAGE

janvier-mai 2020

Table des matières

1 Exercice 9

Renommons[1] $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a l'égalité[2] $F = \mathrm{Vect}\{a, b, c\}$ par définition de F (et non par invocation "Soit F..." comme dans l'énoncé !) et l'on a de même l'égalité $G = \mathrm{Vect}\{d, e\}$ par définition de G.

Commençons par étudier les libertés des familles génératrices proposées.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda d + \mu e = 0$. Lire les ordonnées et les cotes livre alors les égalités $\begin{cases} 0 + 3\mu = 0 \\ -\lambda + 0 = 0 \end{cases}$, d'où $\binom{\lambda}{\mu} = \binom{0}{0}$ et la liberté de la famille (d, e).

Soient à présent λ, μ et ν trois réels vérifiant la nullité $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$. Soustraire l'égalité lue sur les abscisses à celle lue sur les ordonnées donne $\lambda - \nu = 0$, *i. e.* $\lambda = \nu$, d'où (en soustrayant l'égalité des ordonnées à celle des cotes) $\lambda = 0$, *i. e.* $\nu = 0$, d'où (en lisant les ordonnées) $\mu = 0$. On en conclut la liberté de la famille (a, b, c).

La famille (d, e) engendre le s.-e. v. $\mathrm{Vect}\{d, e\} = G$ d'une part et est libre d'autre part, donc est une base de G. Ce dernier est par conséquence un plan[3] (*i. e.* un s.-e. v. de dimension 2). De même, la famille (a, b, c) est une base du s.-e. v. F, lequel est donc de dimension 3 (la longueur de la base mentionnée).

Maintenant que l'on connaît $\dim F$ et $\dim G$, connaître $\dim(F + G)$ revient à connaître $\dim(F \cap G)$ d'après les relations de Grassmann[4]. Deux voies s'ouvrent donc à nous.

Voie 1. Déterminons par exemple le s.-e. v. $F \cap G$ (cela va être long et source de maintes erreurs de calculs – mais élémentaire).

Soit[5] $i \in F \cap G$, soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbf{R}$ tels que $\begin{cases} i = \alpha a + \beta b + \gamma c \\ i = \delta d + \varepsilon d \end{cases}$: on a alors l'égalité $\alpha a + \beta b + \gamma c = \delta d + \varepsilon d$. Les ordonnées et les cotes donnent resp. δ et ε en fonction de α, β, γ *via* les égalités $\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 3\varepsilon \\ 3\alpha + \beta + \gamma = -\delta \end{cases}$, d'où (en réinjectant les expressions trouvées pour δ et ε dans les égalités des deux coordonnées restantes) les égalités[6]

$$\begin{array}{rcl} \text{(abscisses)} & & 3(\alpha + \beta + 2\gamma) \\ & = & -3\delta + 2(3\varepsilon) \\ & = & (9\alpha + 3\beta + 3\gamma) + (4\alpha + 2\beta + 2\gamma) \\ & = & 13\alpha + 5\beta + 5\gamma, \text{ d'où } \gamma = 10\alpha + 2\beta\,; \\ \text{et (4es coordonnées)} & & 3(4\alpha + 3\beta + \gamma) \\ & = & 6\delta + 3\varepsilon \\ & = & (-18\alpha - 6\beta - 6\gamma) + (2\alpha + \beta + \gamma) \\ & = & -16\alpha - 5\beta - 5\gamma, \text{ d'où } 28\alpha + 14\beta + 8\gamma = 0, \\ \text{d'où } 14\alpha + 7\beta & = & -4\gamma = -4(10\alpha + 2\beta) = -40\alpha - 8\beta \\ \text{et } 54\alpha + 15\beta & = & 0, \ i.\ e.\ 18\alpha + 5\beta = 0, \text{ ou encore } \beta = -\dfrac{18}{5}\alpha. \end{array}$$

[1] nous évitons ainsi de reporter la lecture des symboles $v_?$ à distinguer à celle de leurs *indices* (qui sont tout petits !), la lettre identique v ne servant par ailleurs à rien sinon à créer du "bruit" visuel

[2] Pour celles qui se demandent « *Mais pourquoi F et G pour un s.-e. v. ?* », il s'agit simplement des lettres suivant E (et E comme "**E**space vectoriel"). Pourquoi le concepteur du sujet n'a pas utilisé E, nous l'ignorons.

[3] Il conviendrait de préciser "plan *vectoriel*" (car il y a des plan *affines* qui ne sont pas des plans vectoriels) mais le contexte est ici clair : tout est vectoriel.

[4] Appelées dans le cours "théorème des quatre dimensions". Bien voir l'analogie avec l'égalité cardinales

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

valide pour chaques ensembles finis A et B (égalité qui rappelle juste de ne pas compter "en double" des éléments dans une réunion).

Voyons précisément où intervient cette dernière égalité. Soit $\mathcal{I}$ une base de $F \cap G$, que l'on complète en un base $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) de F (resp. G), notons I, A, B les ensembles canoniquement associés aux familles $\mathcal{I}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ (remarquer au passage l'égalité $I = A \cap B$) : alors la longueur de $\mathcal{I}$ (resp. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$) est le cardinal de I (resp. A, B) et la dimension de $F \cap G$ (resp. F, G). Il reste à montrer que $A \cup B$ est une partie basique de $F + G$ pour obtenir l'égalité $\dim(F + G) = \mathrm{Card}(A \cup B)$ et conclure.

[5] i comme "**i**ntersection"

[6] on multiplie par 3 pour éviter les tiers apparaissant avec β

En introduisant[7] $\blacklozenge := \frac{\alpha}{5}$, réinjecter l'égalité $\beta = -18\blacklozenge$ plus donne successivement

$$\begin{array}{rcl} \gamma & = & 10\alpha + 2\beta = 50\blacklozenge - 36\blacklozenge = 14\blacklozenge, \\ \delta & = & -3\alpha - \beta - \gamma = -15\blacklozenge + 18\blacklozenge - 14\blacklozenge = -11\blacklozenge, \\ 3\varepsilon & = & 2\alpha + \beta + \gamma = 10\blacklozenge - 18\blacklozenge + 14\blacklozenge = 6\blacklozenge, \ i.\ e.\ \varepsilon = 2\blacklozenge, \text{ d'où enfin} \\ i & = & \alpha a + \beta b + \gamma c = 5\blacklozenge a - 18\blacklozenge b + 14\blacklozenge c = \blacklozenge\,(5a - 18b + 14c) \text{ et} \\ i & = & \delta d + \varepsilon d = -11\blacklozenge d - 2\blacklozenge e = \blacklozenge\,(-11d + 2e)\,. \end{array}$$

Les deux expressions de i obtenues[8] montrent que le vecteur i est colinéaire au vecteur $5a - 18b + 14c = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 11 \\ -20 \end{pmatrix} = 2e - 11d$, donc appartient à la droite engendrée par ce vecteur.

Réciproquement, vu les deux dernières égalités (les vérifier indépendamment !), chaque vecteur colinéaire à $\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 11 \\ -20 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $5a-18b+14c$ (resp. $2e-11d$), donc appartient à $\operatorname{Vect}\{a,b,c\} = F$ (resp. $\operatorname{Vect}\{d,e\} = G$), donc tombe dans l'intersection $F \cap G$.

Finalement, cette intersection est exactement la droite ci-dessus, donc est de dimension 1.

Concluons avec la relation de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Sanity check. Vu les inclusions[9] $F = F + \{0\} \subset F + G \subset \mathbf{R}^4$, on a l'encadrement dimensionnel $\dim F \leq \dim(F+G) \leq \dim \mathbf{R}^4$, *i. e.* $3 \leq \dim(F+G) \leq 4$, donc la dimension cherchée est un entier entre 3 et 4.

Voie 2. Reprenons le *sanity check* ci-dessus et montrons l'impossibilité de l'alternative $\dim(F+G) = 3$. On en déduira l'égalité $\dim(F+G) = 4$ puis (grâce à la relation de Grassmann) l'égalité $\dim(F \cap G) = 1$.

Supposons donc $\dim(F+G) = 3$. On déduit alors de la conjonction $\left\{\begin{array}{l} F \subset F+G \\ \dim F = \dim(F+G) \end{array}\right.$ l'égalité ensembliste $F = F + G$, d'où les inclusions $G = \{0\} + G \subset F + G = F$. À nous à présent, pour conclure à une contradiction, de trouver un vecteur de G qui ne tombe pas dans F ! Soit $g \in G$ (à choisir rétrospectivement pour arranger les calculs), soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ tels que $g = \lambda a + \mu b + \nu c$. Soustraire les ordonnées et les côtes donne alors $z_g - y_g = \lambda$ et il suffirait que g ait mêmes ordonnée et côte pour obtenir directement $\lambda = 0$. Cela peut être réalisé en imposant rétrospectivement $g := e - 3d = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Soustraire ensuite l'égalité des ordonnées $\mu + \nu = 3$ à celle des abscisses (resp. 4es coordonnées) donne $\nu = 2$ (resp. $2\mu = -8$), d'où les valeurs $\binom{\nu}{\mu} = \binom{2}{-4}$ et l'absurdité $3 = \nu + \mu = 2 - 4 = -2$.

Cette solution est beaucoup moins fastidieuse mais plus ingénieuse.

[7] réel permettant de se débarrasser des fractions $\frac{?}{5}$ et qui va jouer le rôle d'un paramètre

[8] Nous ne voyons *absolument aucun* moyen de deviner une telle relation de liaison entre les cinq vecteurs a, b, c, d, e, sinon de suivre les lignes qui précèdent.

[9] La lecteur vérifiera aisément que l'on peut ajouter des inclusions de parties dans un s.-e. v au sens suivant : si A, B, E, F dénontent quatre parties d'un même s.-e. v, on a alors l'implication $\left\{\begin{array}{l} A \subset V \\ B \subset W \end{array}\right. \Longrightarrow A + B \subset V + W$. (En l'occurrence, on a remplacé $\left(\begin{smallmatrix} A & V \\ B & W \end{smallmatrix}\right)$ par $\left(\begin{smallmatrix} F & F \\ \{0\} & G \end{smallmatrix}\right)$.)

2 Exercice 10

1. Soit[10] $T =: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{P} &\iff a - 2b + c = 0 \iff c = 2b - a \iff \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = 2b - a \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \begin{cases} a = \lambda \\ b = \mu \\ c = 2\mu - \lambda \end{cases} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ T = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 2\mu - \lambda \end{pmatrix} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbf{R},\ T = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff T \in \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\mathcal{P} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$. Par ailleurs, les deux vecteurs précédents forment une famille libre (dans une relation de liaison, lire les abscisses – resp. ordonnées – fournit la nullité du premier – resp. second – coefficient), donc constituent une base de $\mathcal{P}$, lequel est par conséquent de dimension 2 (c'est un plan, comme nous le suggérait fortement l'équation cartésienne donnée dans l'espace $\mathbf{R}^3$).

En déroulant les mêmes équivalences mais en choisissant cette fois[11] pour paramètres $\frac{a}{2}$ et $\frac{c}{2}$, on obtiendrait comme autre base de $\mathcal{P}$ la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

Autre méthode : trouver par tâtonnement deux vecteurs "simples" dans $\mathcal{P}$ qui en forment une base, par exemple[12] $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors remplacer l'un des deux vecteurs par n'importe quelle combinaison linéaire (à coefficients non tous nuls) des deux ne change pas le caractère "être une base", ce qui fournit plein d'autres bases. Par exemple, en ajoutant ou soustrayant le second vecteur trouvé au premier, on retrouve les vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ci-dessus.

2. Renotons $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) L'appartenance $v \in \mathcal{P}$ équivaut à l'égalité $(3) - 2(1) + (-1) = 0$, laquelle est vérifiée. Pour décomposer v dans la base (a, b), les ordonnées nous imposent que l'abscisse[13] vaille 1, de sorte qu'il reste ensuite à exprimer $v - a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ comme multiple scalaire de b, ce qui donne immédiatement $v = a + 2b$.

   (b) *Idée* : n'importe quel vecteur hors du plan $\mathcal{P}$ devrait faire l'affaire (faire un dessin), par exemple[14] $c := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Montrons alors la liberté de la famille (a, b, c). Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$. Si $\nu \neq 0$, le vecteur $c = \frac{-\lambda}{\nu} a + \frac{-\mu}{\nu} b$ tombe dans $\operatorname{Vect}\{a, b\} = \mathcal{P}$, ce qui est absurde ; d'où la nullité de ν. Il reste donc $\lambda a + \mu b = 0$ et la liberté de la famille (a, b) conclut aux nullités de λ et μ.

[10] T comme "**t**riplet"

[11] L'ensemble $\mathcal{P}$ est par définition l'ensemble des triplets de réels (a, b, c) tels que $a - 2b + c = 0$, ce qui se réécrit aussi $b = \frac{a+c}{2}$ (géométriquement : le point b est le milieu du segment $[ac]$), donc est l'ensemble des triplets de réels de la forme $\left(a, \frac{a+c}{2}, c\right)$ lorsque a et c décrivent $\mathbf{R}$.

[12] leurs coordonnées vérifient immédiatement l'équation donnée

[13] on parle ici de l'abscisse relativement à la base (a, b), non de l'abscisse habituelle (relative à la base canonique de $\mathbf{R}^3$)

[14] on met plein de 0 pour faciliter les calculs

Conclusion : la famille libre (a,b,c) de $\mathbf{R}^3$ ayant pour longueur la dimension de $\mathbf{R}^3$, elle en est une base.

Autre argument possible[15]**.** Le s.-e. v. $\mathrm{Vect}\{a,b,c\}$ contient $\mathrm{Vect}\{a,b\} = \mathcal{P}$, donc est de dimension au moins $\dim \mathcal{P} = 2$. Si cette dimension vaut 3, la famille (a,b,c) engendre alors $\mathbf{R}^3$ et a pour longueur $\dim \mathbf{R}^3$, donc est une base de $\mathbf{R}^3$. Dans le cas contraire, on a égalité des dimensions $\dim \mathrm{Vect}\{a,b,c\} = \dim \mathcal{P}$, d'où l'égalité ensembliste $\mathrm{Vect}\{a,b,c\} = \mathcal{P}$ et l'appartenance $c \in \mathrm{Vect}\{a,b,c\} = \mathcal{P}$, ce qui est absurde.

3. La question **a.** demande sans doute de vérifier à la main que D est (non vide et) stable par combinaison linéaire. Explicitons directement une base de $\mathcal{D}$ afin de nous épargner ces inutiles vérifications et de faire d'une pierre deux coups.

Soit $T =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. On a alors les équivalences :

$$T \in D \iff x = y = -z \iff \begin{cases} x = x \\ y = x \\ z = -x \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbf{R},\ \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbf{R},\ T = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$$
$$\iff \exists \lambda \in \mathbf{R},\ T = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff T \in \mathbf{R}d \text{ avec } d := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ d'où l'égalité } D = \mathbf{R}d.$$

La partie D est par conséquent une droite[16] (vectorielle), en particulier est un s.-e. v. (de $\mathbf{R}^3$). N'importe lequel de ses éléments (non nul[17] !) en fournit une base, par exemple la famille (d).

4. Soit $T =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, montrons qu'il s'écrit d'une unique manière comme somme d'un vecteur de P et d'un vecteur de D.

Analyse. Soient $\pi \in P$ et $\delta \in D$ tels que $T = \pi + \delta$, soit $t \in \mathbf{R}$ tels que $\delta = td$. On a alors les égalités

$$x - 2y + z = (x_\pi + t) - 2(y_\pi + t) + (z_\pi - t) = \underbrace{(x_\pi - 2y_\pi + z_\pi)}_{=0 \text{ car } \pi \in P} - 2t, \text{ d'où } t = y - \frac{x+z}{2},$$

ce qui détermine $\pi = T - td$. Cette analyse montre l'unicité d'une telle décomposition en donnant l'unique décomposition éventuellement possible. Vérifions que tout fonctionne.

Synthèse. Notons $t := y - \frac{x+z}{2}$ puis $\pi := T - td$. On a alors immédiatement l'égalité $T = (T - td) + td$ où le vecteur td tombe dans D : il suffit donc pour conclure d'établir l'appartenance $T - td \in \mathcal{P}$, *i. e.* que les coordonnées du vecteur

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \left(y - \frac{x+z}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \left(y - \frac{x+z}{2}\right) \\ y - \left(y - \frac{x+z}{2}\right) \\ z + \left(y - \frac{x+z}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x+z}{2} - y \\ \frac{x+z}{2} \\ y + \frac{z-x}{2} \end{pmatrix}$$

vérifient l'équation donnée pour $\mathcal{P}$. Or on a bien les égalités

$$\left(\frac{3x+z}{2} - y\right) - 2\frac{x+z}{2} + \left(y + \frac{z-x}{2}\right) = x\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + y(-1+1) + z\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Remarque. Pour celles qui rencontrent l'analyse-synthèse pour la première fois, en voici une présentation limpide par Pappus d'Alexandrie[18] :

L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont est elle précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un

[15] La première solution utilisait la liberté de la famille (a,b,c), la seconde son caractère générateur.
[16] *i. e.* un sev de dimension 1
[17] un tel élément en est appelé un *vecteur directeur* (*i. e.* qui *dirige* la droite)
[18] *Collection mathématique* (≈340 apr. J.-C.), livre VII

renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les attachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est que nous appelons la synthèse.

3 Exercice 11

Renommons $a := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A := b$, $B := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Le 3 qui dépasse au milieu des abscisses de a, b, c nous incite[19] à ajouter a et c, ce qui donne précisément b, d'où la liaison des vecteurs a, b, c.

2.

   (a) Puisque b est engendré par a et c, on a les égalités $E = \mathrm{Vect}\{a, b, c\} = \mathrm{Vect}\{a, c\}$. La famille (a, c) étant par ailleurs libre (dans une relation de liaison, soustraire l'égalité des ordonnées à celle des cotes livre la nullité du premier coefficient, d'où en relisant les cotes la nullité du second coefficient), elle est une base de E, lequel est subséquemment de dimension 2. En d'autres termes : le s.-e. v. E est un plan.

   (b) Étudions la liberté de la famille (A, B, C). Soient λ, μ, ν tels que $\lambda A + \mu B + \mu C = 0$. Lire les ordonnées donne $\lambda + \nu = 0$, d'où en réinjectant dans les abscisses (resp. cotes) la nullité de $\mu + 2\nu$ (resp. $\mu + 2\nu$). Notre relation de liaison équivaut donc aux égalités $\begin{cases} \lambda = -\nu \\ \mu = -2\nu \end{cases}$ et imposer $\nu = -1$ livre l'égalité[20] $A + 2B = C$. On a donc comme pour E l'égalité $F = \mathrm{Vect}\{A, B\}$ et l'on montrerait de même la liberté de la famille (A, B) (les ordonnées fournissent la nullité du premier coefficient). Finalement, le s.-e. v. F est aussi un plan.

   (c) Le vecteur $b = A$ non nul appartient à $E \cap F$, donc cette intersection n'est pas nulle[21]. Les s.-e. v. E et F ne sauraient en conséquence être en somme directe.

3. Supposons un instant la liberté de la famille $(a, b = A, B)$.

   Un vecteur dans l'intersection $E \cap F$ est alors de la forme $\lambda A + \mu b = \nu A + \xi B$ (pour certains scalaires λ, μ, ν, ξ), d'où par liberté[22] les égalités $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = \nu \\ 0 = \xi \end{cases}$, ce qui montre que notre vecteur se réduit à μb et, par conséquent, que l'intersection $E \cap F$ est contenue dans la droite $\mathbf{R}b = \mathbf{R}A$, l'inclusion réciproque découlant immédiatement des appartenances $\begin{cases} b \in E \\ A \in F \end{cases}$. Le s.-e. v. $E \cap F$ est donc la droite dirigée par le vecteur $b = A$, laquelle est de dimension 1. On en déduit la dimension

$$\dim (E + F) = \dim E + \dim F - \dim (E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3 = \dim \mathbf{R}^3,$$

   ces égalités montrant que la somme $E + F$ vaut tout le s.-e. v. plein $\mathbf{R}^3$, dont une base est sa base canonique.

   Montrons à présent la liberté supposée qui nous a permis de répondre à toutes les questions. Soient trois scalaires λ, μ, ν tels que $\lambda a + \mu b + \nu B = 0$. Les ordonnées donnent $\lambda + \mu = 0$, d'où en réinjectant dans les abscisses la nullité de $\lambda + \nu$ et les égalités $\mu = \nu = -\lambda$, lesquelles livrent (dans les abscisses) la nullité de $\lambda (1 - 3 - 1) = -3\lambda$ et celle de λ, ce qui conclut à la nullité du triplet (λ, μ, ν).

---

[19] sans ce genre d'observations, on déterminerait systématiquement toutes les relations de liaisons de la famille (a, b, c) (*sanity check* : celle observée doit faire en partie !)

[20] On aurait pu la deviner en observant les abscisses extrêmes 3 et 5 qui dépassaient et en cherchant à atteindre le 5 en ajoutant quelque chose au 3

[21] qualificatif abusif signifiant "égal au s.-e. v. nul $\{0\}$"

[22] Il est hors de question de dire "*en identifiant*". En effet, ce qui légitime l'identification est une *unicité*, exprimée ici en termes de *liberté*.

4 Exercice 12

1. Soit S un s.-e. v. non nul de $\mathbf{R}^3$, soit $s \in S$ non nul que l'on complète en un base de S. Alors remplacer dans cette dernière le vecteur s par n'importe lequel de ses multiples scalaires non nuls ne change pas le caractère "être une base de S", d'où au moins autant de bases pour S qu'il y a de scalaires non nuls, *i. e.* une infinité non dénombrable[23]. Adieu l'unicité.

   Pour un contre-exemple concret, reprendre la question 1 de la section 2. Un tel contre-exemple répond à la question mais nous avons (à peu de frais) établi bien davantage, à savoir la détermination de *tous* les cas où on peut construire un contre-exemple. En effet, si S était le s.-e. v. nul (seul cas non encore envisagé), il ne comporterait qu'une seule base : la famille vide, de longueur nulle. Observer que la valeur de l'exposant 3 n'a joué aucune rôle.

   Conclusion : soit $n \in \mathbf{N}$, soit S un s.-e. v. de $\mathbf{R}^n$, alors S admet une infinité (non dénombrable) de bases ssi S est non nul.

2. L'énoncé ne donne aucun sens à k ni à E : à nous de le faire pour la question soit intéressante. Soit $n \in \mathbf{N}$, soit E un s.-e. v. de $\mathbf{R}^n$, soit S un s.-e. v. de E non nul, soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de S dont on note ℓ la longueur[24]. On se demande si on peut extraire de $\mathcal{G}$ une base de E.

   La longueur n'a rien à faire dans cette histoire. Reformulons après l'invocation de E : *est-ce que de chaque famille génératrice de chaque s.-e. v. non nul de E on peut extraire une base de E ?* Soit S un s.-e. v. de E non nul. Si S vaut E, alors oui on peut extraire de chaque famille génératrice de E une base de E (résultat général du cours). Supposons à présent le contraire, à savoir l'inclusion stricte $S \subsetneq E$, soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de S, notons $G \subset S$ la partie associée, soit $\mathcal{F}$ une sous-famille de $\mathcal{G}$ et notons $F \subset G$ la partie associée : on a alors les inclusions $\operatorname{Vect} F \subset \operatorname{Vect} G = S \subsetneq E$, ce qui montre que la famille $\mathcal{F}$ ne peut jamais engendrer E, à plus forte raison en être une base. L'imposition "S non nul" n'est pas intervenue et n'a donc rien à faire dans cette histoire.

   Réponse (*modulo* mise en contexte) : *vrai* ssi le s.-e. v. considéré vaut tout E (on retiendra "*faux* sauf cas trivial".

3. La présence dans la paramétrisation proposée de "constantes" non nulles nous inviter à montrer qu'il ne s'agit pas d'un s.-e. v. (ce sera certainement un sous-espace *affine*, en l'occurrence un *plan* affine). En effet, si ce plan était un s.-e. v., il contiendrait le vecteur nul, d'où deux scalaires t et u tels que $\begin{cases} 0 = 2 + t + 3u \\ 0 = 1 - t + 2u \\ 0 = t - u \end{cases}$; les cotes donneraient $u = t$, d'où $\begin{cases} 0 = 2 + 4t \\ 0 = 1 + t \end{cases}$ et l'absurdité $1 = -2t = 2$.

   La question de la base ne se pose donc même pas.

4. Qui est k ? Qui est n ?

   Soit $n \in \mathbf{N}$, soit $\ell \in \mathbf{N}$, soit $\mathcal{L}$ une famille libre de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ de longueur ℓ. Si $\ell < n$, comme à la question 2 la famille $\mathcal{L}$ ne peut pas engendrer tout $\mathbf{R}^n$, *a fortiori* en être une base. Sinon, on a la minoration $\ell \geq n$ et, puisque chaque famille libre a une longueur majorée par la dimension du s.-e. v. plein, on a même l'égalité $\ell = n$ et la famille $\mathcal{L}$ est directement une base de $\mathbf{R}^n$ (pas besoin d'extraire).

   Réponse (*modulo* mise en contexte) : *vrai* ssi $k = n$ (donc faux la plupart du temps).

5. Qui est n ? Qui sont ces fameux vecteurs canoniques de $\mathbf{R}^n$?

   Soit $n \in \mathbf{N}$, pour chaque entier $i \in [1, n]$ notons e_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$, soit E un s.-e. v. de $\mathbf{R}^n$ (retirons tout de suite l'incommode imposition "E non nul"). Si l'énoncé disait vrai, alors E serait l'un des 2^n s.-e. v. de la forme $\operatorname{Vect}_{i \in I} e_i$ lorsque I décrit les parties[25] du segment entier $[1, n]$. Or, dès que $n \geq 2$, il y a infinité de s.-e. v. dans $\mathbf{R}^n$, par exemple les droites dirigées par $(1, t, {\scriptscriptstyle 0}, {\scriptscriptstyle 0}, ..., {\scriptscriptstyle 0})$ lorsque t décrit $\mathbf{R}$. Si l'on veut garder l'imposition de l'énoncé, il suffit de retirer le cas $I = \emptyset$ correspondant à l'engendré nul et l'on obtient toujours un nombre fini de tels s.-e. v. (à savoir $2^n - 1$).

   Par ailleurs, si $n \leq 1$ les seuls s.-e. v. de $\mathbf{R}^n$ sont $\{0\}$ ou $\mathbf{R}^n$, lesquels sont bien engendrés par des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ (aucun pour $\{0\}$, tous pour $\mathbf{R}^n$). Si l'on veut garder l'imposition de

[23] Un ensemble dénombrable est un ensemble dont peut énumérer les éléments à l'aide des entiers naturels (formellement, la dénombrabilité est définie par l'équipotence avec $\mathbf{N}$). On peut montrer la dénombrabilité des ensembles $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ et de leurs puissances entières. En revanche, aucune liste de réels ne saurait épuiser ceux de $[0, 1]$ (*cf.* argument diagonal de Cantor), d'où la non-dénombrabilité de $[0, 1]$ et – partant – celle de $\mathbf{R}$.

[24] évidemment ℓ et non k (comme "longueur")

[25] Pourquoi y a-t-il 2^n telles parties ? Choisir une telle partie revient à choisir, pour chaque entier de $[1, n]$, si on le met dans la partie ou non. Ces n choix sont indépendants et chacun d'eux revêt 2 issues possibles, d'où en tout $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ symboles } 2} = 2^n$ choix de parties possibles.

l'énoncé, dans le cas $n = 0$ l'énoncé est vide de sens – donc vrai – et dans le cas $n = 1$ l'unique s.-e. v. non nul est tout $\mathbf{R} = \mathbf{R}e_1$.

Réponse (*modulo* mise en contexte) : *vrai* ssi $n \leq 1$ (donc *faux* sauf cas trivial).

6. Qui est n ?... Soit $n \in \mathbf{N}$.

La réponse est non déjà dans le plan où chaque droite admet une infinité de droites supplémentaires (toutes les autres droites !). Cet exemple se généralise immédiatement en dimension quelconque finie : si $n \geq 2$, notons[26] H le s.-e. v. formé des vecteurs d'abscisse nulle, alors pour chaque scalaire t la droite $\mathbf{R}\,(1, t, 0, 0, ...0)$ est un supplémentaire de H (et ces droites sont deux à deux distinctes quand t varie puisque les vecteurs directeurs associés sont deux à deux non colinéaires). La réponse est donc *faux* dès que $n \geq 2$.

Soyons plus précis et déterminons *quels s.-e. v.* admettent une infinité de supplémentaires. Clairement ni le s.-e. v. nul (resp. plein) car son unique supplémentaire est le s.-e. v. plein (resp. nul). Ces s.-e. v. étant les seuls quand $n \leq 1$, on imposera désormais $n \geq 2$. Soit E un s.-e. v. ni nul ni plein, soit S un supplémentaire de E, soit $s \in S$ non nul (possible car E n'est pas plein) que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de S, soit $e \in E$ non nul (possible car E est non nul) et soit λ un scalaire : alors le s.-e. v. engendré par $\mathcal{B}$ où l'on a remplacé le premier vecteur s par $s + \lambda e$ est un supplémentaire de E et deux tels supplémentaires diffèrent toujours pour des valeurs de λ distinctes, d'où une infinité de supplémentaires pour E. (On retrouve la démonstration du paragraphe précédent lorsque $E = H$, $e = (0, 1, 0, 0, ..., 0)$, $s = (1, 0, 0, ..., 0)$ et $S = \mathbf{R}s$)

Conclusion : les s.-e. v. de $\mathbf{R}^n$ admettant un unique supplémentaire sont triviaux, ce sont les s.-e. v. resp. nul et plein.

Remarque. Beaucoup d'affirmations non prouvées dans ces trois derniers paragraphes "bonus". Nous les laissons en exercice à la lectrice intéressée.

[26] H comme "**h**yperplan" (*i. e.* un s.-e. v. de dimension $n - 1$)