Université Paris-Saclay
Algèbre linéaire/EC221

Année 2019 – 2020
S2 du L1 Mathématique

**TD2: Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, bases, dimensions
et sous-espaces supplémentaires**

1 Bases

Rappel : Des vecteurs forment une base d'un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ si et seulement s'ils sont dans E, sont linéairement indépendants et engendrent E.

Exercice 1.

1. Montrer que les vecteurs $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $w = (1, 1, 1)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

2. Montrer que les vecteurs $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Trouver les composantes du vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et $w = (1, 2, -3)$ dans cette base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 2. Pour chacun des cas, indiquer si les vecteurs fournis forment une base du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ considéré.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Indication : on pourra calculer $u_3 - u_2$, puis se demander si $u_1, u_2, u_3 - u_2$ engendrent E

2. E : le plan d'équation cartésienne $2x + y - z = 0$. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. E : la droite admettant comme système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{cases}$

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. E : le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment-ils une base de E ?

Exercice 3. Montrer que les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Décomposer w dans la base u_1, u_2, u_3, c'est-à-dire écrire w comme combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3.

Exercice 4. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admettant pour base $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admettant pour base $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.

1. Expliquer pourquoi E est un plan. Déterminer une représentation paramétrique de E, puis une équation cartésienne de E.

2. Déterminer une représentation paramétrique de F.

3. Montrer que $E = F$.

Exercice 5. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que v_1, v_2, v_3, v_4 forment une base de $\mathbb{R}^4$.

2. On appelle coordonnées d'un vecteur u dans une base u_1, u_2, u_3, u_4 de $\mathbb{R}^4$ les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ tels que $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4$.

a. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calculer les coordonnées de $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ dans la base v_1, v_2, v_3, v_4 de la question **1**.

b. Déterminer les coordonnées de chacun des vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^4$ dans cette base.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 7. Déterminer pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$ les vecteurs

$$\{(1, 0, t), (1, 1, t), (t, 0, 1)\}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Dimensions. Sous-espaces supplémentaires

On pourra utiliser la définition : des sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^n$ sont dits supplémentaires lorsque tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F.

Exercice 8. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, et lorsque c'est le cas, en donnner une base et la dimension.

1. $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \exists a, b \in \mathbb{R} \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - b \\ a + b \\ -a + 7b \\ 3a \end{pmatrix} \right\}$

2. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, 2x - 4y + t = 0 \right\}$

3. $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y + z + t = 1 \right\}$

4. $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + t = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0 \right\}.$

Exercice 9. On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,3), \quad v_3 = (2,1,1,1), \quad v_4 = (-1,0,-1,2), \quad v_5 = (2,3,0,1).$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $\{v_1, v_2, v_3\}$ et soit G celui engendré par $\{v_4, v_5\}$. Calculer les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$, $F + G$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admettant pour équation $x - 2y + z = 0$.

1. Déterminer deux bases différentes de $\mathcal{P}$.

2. On note (u_1, u_2) une des deux bases trouvées à la question **1**.

- **a.** Vérifier que $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est dans $\mathcal{P}$, puis décomposer v dans la base (u_1, u_2).
- **b.** Déterminer un vecteur $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = y = -z \right\}.$

- **a.** Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- **b.** Déterminer une base de $\mathcal{D}$ et en déduire sa dimension.

4. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$.

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. u_1, u_2, u_3 sont-ils linéairement indépendants ?

2.
- **a.** Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1, u_2, u_3. Trouver une base de E et en déduire la dimension de E.
- **b.** Même question pour le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2, v_3.
- **c.** E et F sont-ils en somme directe ?

3. Déterminer la dimension de $E \cap F$ puis une base de $E \cap F$.

4. Quelle est la dimension de $E + F$? Donner une base de $E + F$.

Exercice 12. Vrai ou faux ? Justifiez par une démonstration, un contre-exemple ou un résultat du cours.

1. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ admet une unique base.

2. Si $v_1, v_2, \ldots, v_k$ engendrent un sous-espace vectoriel non nul de E, alors on peut en extraire une base de E.

3. Le plan de l'espace admettant comme représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= 2 + t + 3t' \\ y &= 1 - t + 2t' \\ z &= t - t' \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui admet comme base

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Si $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs linéairement indépendants, alors on peut toujours en extraire une base de $\mathbb{R}^n$.

5. Notons $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^n$. Pour tout sous-espace vectoriel non nul E de $\mathbb{R}^n$, on peut trouver des vecteurs canoniques de $\mathbb{R}^n$ qui forment une base de E.

6. Tout sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ admet un unique supplémentaire.