Université Paris-Saclay
Algèbre linéaire/EC221

Année 2019 – 2020
S2 du L1 Mathématique

TD1: SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathbb{R}^n$

1 Combinaisons linéaires. Indépendance linéaire

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les combinaisons linéaires suivantes de u, v, w :

$$t = 2u - 3v + w, \quad 3u - 2v - w, \quad 8u - 7v - w.$$

Que remarque-t-on ?

2. Les vecteurs u, v, w sont-ils linéairement indépendants ?

3. Donner plusieurs vecteurs non nuls et qui sont combinaisons linéaires de u, v, w.

4. Déterminer tous les nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

1. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $t = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire

(a) de $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$?

(b) de $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$?

(c) de $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Exercice 3. On suppose que u, v, u', v' sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ tels que $u' = 2u + v$ et $v' = 3u + 2v$.

1. Montrer que $6u' - 5v'$ est combinaison linéaire de u et v.

2. Montrer que u est combinaison linéaire de u' et v'.

3. Montrer que v est combinaison linéaire de u' et v'.

4. Montrer que toute combinaison linéaire de u' et v' est une combinaison linéaire de u et v.

5. Montrer que toute combinaison linéaire de u et v est une combinaison linéaire de u' et v'.

Exercice 4.

1. Les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ sont-ils linéairement indépendants ? Justifiez. S'ils ne le sont pas, écrire l'un d'eux sous forme d'une combinaison linéaire des autres.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Lorsque des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne sont pas indépendants, peut-on écrire n'importe lequel d'entre eux comme combinaison linéaire des autres ?

Exercice 5. Pour chaque énoncé, indiquez s'il est vrai ou faux (justifiez, en faisant éventuellement appel à un résultat du cours).

1. Si $0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_k = (0, \ldots, 0)$, alors les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont linéairement indépendants.

2. Si la seule solution de l'équation linéaire $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = (0, \ldots, 0)$, d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, est $(0, \ldots, 0)$, alors les vecteurs $v_1, \ldots, v_k$ sont linéairement indépendants.

3. Si v_1, v_2, v_3 sont des vecteurs deux à deux non colinéaires, alors tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

2 Sous-espaces vectoriels. Sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 6. Montrer que dans chacun des cas, les vecteurs donnés engendrent $\mathbb{R}^2$ tout entier.

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que u, v, w engendrent $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $t = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ecrire t comme combinaison linéaire de u, v, w de deux manières différentes, c'est-à-dire avec des coefficients différents.

Exercice 8. Soit E la partie de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $2x + 3y - z = 0$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $d \neq 0$. Montrer que la partie de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $2x + 3y - z = d$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3. On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ aux points de l'espace muni d'un repère d'origine O. Donner une description géométrique de E.

Exercice 9. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

1. Les vecteurs u, v, w sont-ils linéairement indépendants ?

2. Montrer que l'ensemble des combinaisons linéaires de u, v, w forme un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$.

On rappelle qu'on appelle E le sous-espace vectoriel engendré par u, v, w.

3. Montrer que E est aussi le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u et v.

4. On considère la F partie de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $x - y - z = 0$. Montrer que

- F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$,
- $E = F$.

5. Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il dans E ? Comment faites-vous pour le déterminer ?

Exercice 10. Soit E la partie de $\mathbb{R}^3$ constituée des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant le système

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ engendre E.

3. On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ aux points de l'espace muni d'un repère d'origine O. Est-ce que E est un plan ? une droite ?

4. Donner une représentation paramétrique de E.