

Corrigés des exercices du TD n° 4



Exercice n° 1.

1. On a

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+1 & 4+(-4) & -1+1 \\ -1+0 & 2+2 & 3+(-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A + C &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+(-1) & 4+(-1) & -1+1 \\ -1+1 & 2+(-1) & 3+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - C &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-(-1) & 4-(-1) & -1-1 \\ -1-1 & 2-(-1) & 3-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} -2B &= -2 \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \times 1 & -2 \times (-4) & -2 \times 1 \\ -2 \times 0 & -2 \times 2 & -2 \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 8 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - 2B &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \times 1 & 2 \times (-4) & 2 \times 1 \\ 2 \times 0 & 2 \times 2 & 2 \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -8 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-2 & 4-(-8) & -1-2 \\ -1-0 & 2-4 & 3-(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 12 & -3 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned} 2A - 3B + 5C &= 2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -12 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-3+(-5) & 8-(-12)+(-5) & -2-3+5 \\ -2-0+5 & 4-6+(-5) & 6-(-3)+5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 15 & 0 \\ 3 & -7 & 14 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 2.

1. À partir de deux matrices distinctes de l'énoncé on peut calculer les produits suivants.

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times C &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times -1 & 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 2 + 1 \times (-1) + 0 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \times D &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 1 & 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 & 1 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 2 & 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 1 & 1 \times 0 \\ 0 \times 1 & 0 \times 1 & 0 \times 0 \\ 2 \times 1 & 2 \times 1 & 2 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \times B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times 2 \\ 0 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 \\ (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \times D &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 2 + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 0 + 2 \times 0 & 1 \times 0 + 0 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times (-1) + 0 \times 0 + 2 \times 1 \\ 0 \times 1 + 1 \times 2 + (-1) \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 2 & 0 \times (-1) + 1 \times 0 + (-1) \times 1 \\ (-1) \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 1 & (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 & (-1) \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 2 & (-1) \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \times 0 + 0 \times 1 + 1 \times 0 & 0 \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 0 \\ 0 \times 0 + 1 \times 0 + 0 \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 & 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 \\ 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 0 & 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matrice M n'est pas diagonale mais la matrice M^2 l'est.

Exercice n° 3. On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Exercice n° 4.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $A \times B \neq B \times A$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $A \neq B$ et $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas carrées et les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent. En revanche, ils ne sont pas égaux puisqu'il s'agit de matrices de tailles différentes. En effet, $A \times B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ et $B \times A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est carrée non nulle et vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont carrées, non nulles, non égales et vérifient $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 5.

1. On a

$$A \times B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C \times A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$$

donc A et B commutent alors que A et C ne commutent pas.

2. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} -13 & 4 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$$

3. On a

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + 2A \times B &= \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A+C)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 15 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2 + C^2 + 2A \times C &= \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 19 \\ 5 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut utiliser une identité remarquable pour calculer $(A+B)^2$ car A et B commutent. En revanche, on ne peut pas utiliser une identité remarquable pour calculer $(A+C)^2$ car A et C ne commutent pas.

4. On a

$$\begin{aligned} (A+B)^3 &= (A+B) \times (A+B) \times (A+B) \\ &= (A+B)^2 \times (A+B) \\ &= \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 44 & -52 \\ 26 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice n° 6. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 7.

- La matrice A est diagonale donc $A^p = \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel p .
- Calculons maintenant les puissances de la matrice B . On a

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $B^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour tout entier $p \geq 3$.

- Vérifions que A et B commutent. On a

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B \times A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On observe que $A \times B = B \times A$ donc les matrices A et B commutent.

- Soit $p \geq 2$ un entier. Les matrices A et B **commutent** donc, d'après la *formule du binôme de Newton*, on sait que

$$(B + A)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k \times A^{p-k}$$

En exploitant maintenant que, pour tout entier $k \geq 3$, $B^k = 0_{3,3}$ on obtient

$$\begin{aligned} (B + A)^p &= \binom{p}{0} B^0 \times A^{p-0} + \binom{p}{1} B^1 \times A^{p-1} + \binom{p}{2} B^2 \times A^{p-2} \\ &= A^p + pB \times A^{p-1} + \frac{p(p-1)}{2} B^2 \times A^{p-2} \\ &= \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2^p & 0 & 0 \\ 3 \times 2^{p-1} & 2^{p-1} & 0 \end{pmatrix} + \frac{p(p-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{p-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^p & 0 & 0 \\ p2^p & 2^p & 0 \\ p(p+5)2^{p-2} & p2^{p-1} & 2^p \end{pmatrix}$$

Remarque. On observera que cette égalité est aussi vérifiée pour $p \in \{0; 1\}$.

Exercice n° 8. On écrit $A = I_3 + J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et l'on observe que $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0_{3,3}$.

Considérons maintenant $n \geq 2$ un entier. Les matrices I_3 et J **commutent** donc, d'après la *formule du binôme de Newton*, on sait que

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I_3 \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k \end{aligned}$$

En exploitant à présent que, pour tout entier $k \geq 3$, $J^k = 0_{3,3}$ on obtient

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} J^k \\ &= I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 1 & n \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque. On observera que cette égalité est aussi vérifiée dans le cas où $n \in \{0; 1\}$.

Exercice n° 9.

1. On obtient aisément que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $B^3 = 0_{3,3}$ et l'on en déduit ensuite que, pour tout entier $n \geq 3$,

$$B^n = 0_{3,3}.$$

2. Soit $k \geq 2$ un entier. Les matrices aI_3 et B **commutent** donc, d'après la *formule du binôme de Newton*, on sait que

$$\begin{aligned} A^k &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B^p \times (aI_3)^{k-p} \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B^p \times (a^{k-p} I_3^{k-p}) \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B^p \times (a^{k-p} I_3) \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} B^p \times I_3 \\ &= \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} a^{k-p} B^p \end{aligned}$$

En exploitant maintenant que, pour tout entier $p \geq 3$, $B^p = 0_{3,3}$ on obtient

$$A^k = \sum_{p=0}^2 \binom{k}{p} a^{k-p} B^p$$

$$\begin{aligned}
&= a^k I_3 + ka^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2}a^{k-2}B^2 \\
&= a^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + ka^k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)}{2}a^{k-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & ka^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2ka^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & k(k-1)a^{k-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^k & ka^{k-1} & k(k-1)a^{k-2} \\ 0 & a^k & 2ka^{k-1} \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exercice n° 10. Commençons cet exercice en rappelant que l'on inverse une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $(A \mid I_n)$ jusqu'à obtenir $(I_n \mid B)$ et qu'alors $B = A^{-1}$.

1. — Calculons A^{-1} . Pour cela on applique la méthode rappelée au début de l'exercice.

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & -6 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & -6 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 7L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 7L_3 - 4L_1 \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & -6 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -84 & -28 & 133 \end{array} \right) L_3 \leftarrow 19L_3 - 4L_2 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & -6 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 3 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -4 & 19 \end{array} \right) L_3 \leftarrow \frac{1}{7}L_3 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & -6 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 & 38 & 19 & -57 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -4 & 19 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & -6 & 12 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -4 & 19 \end{array} \right) L_2 \leftarrow -\frac{1}{19}L_2 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} -7 & 0 & 0 & 133 & 42 & -210 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -4 & 19 \end{array} \right) L_1 \leftarrow L_1 + 6L_2 - 12L_3 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -19 & -6 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -12 & -4 & 19 \end{array} \right) L_1 \leftarrow -\frac{1}{7}L_1
\end{aligned}$$

On en conclut que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -19 & -6 & 30 \\ -2 & -1 & 3 \\ -12 & -4 & 19 \end{pmatrix}$.

— Calculons B^{-1} .

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -33 & -2 & 15 & 0 & 1 & 0 \\ 22 & 2 & -9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 11 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & 0 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 4L_2 + 11L_1 \\ L_3 \leftarrow 6L_3 - 11L_1 \end{array} \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 11 & 4 & 0 \end{array} \right) L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 44 & 4 & -18 \end{array} \right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\
&\left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -11 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 22 & 2 & -9 \end{array} \right) L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & -5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -33 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 22 & 2 & -9 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & | & 144 & 12 & -60 \\ 0 & 1 & 0 & | & -33 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 22 & 2 & -9 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + 5L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 12 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -33 & -2 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & | & 22 & 2 & -9 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{12}L_1$$

On en conclut que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 12 & 1 & -5 \\ -33 & -2 & 15 \\ 22 & 2 & -9 \end{pmatrix}$.

— Calculons C^{-1} .

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & | & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & | & 6 & -10 & -30 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 - 5L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3/2 & -5/2 & -15/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1$$

On en conclut que $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 & -15/2 \\ -2 & 3 & 10 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

— Calculons D^{-1} .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & | & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & | & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) & \begin{aligned} L_3 &\leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \\ L_4 &\leftarrow \frac{1}{2}L_4 \end{aligned} \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - L_3 + L_4
\end{aligned}$$

On en conclut que $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2. Les matrices A, B, C sont inversibles donc les produits AB et AC le sont également et on a

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} -170 & -53 & 268 \\ 451 & 140 & -711 \\ -314 & -98 & 495 \end{pmatrix}$$

et

$$(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 133/2 & 47/2 & -105 \\ -88 & -31 & 139 \\ 31 & 11 & -49 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 11.

1. Commençons par le

Rappel (Inversibilité d'une matrice de format 2×2) – Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

— La matrice A est inversible car $1 \times 3 - (-1) \times 2 = 5 \neq 0$ et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

— Montrons à présent que B est inversible et calculons son inverse.

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & L_2 \leftrightarrow L_1 \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) & L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

On en conclut que B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

— Pour tout $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned} AMB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}AMB = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow I_2MB = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow MB = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow MBB^{-1} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} \\ &\Leftrightarrow MI_3 = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} \\ &\Leftrightarrow M = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} \\ &\Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -3/5 & 9/5 & -6/5 \\ 3/10 & 1/10 & 1/10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation matricielle $AMB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ admet donc $\begin{pmatrix} -3/5 & 9/5 & -6/5 \\ 3/10 & 1/10 & 1/10 \end{pmatrix}$ pour unique solution.

Exercice n° 12.

1. Démontrons que P est inversible et calculons son inverse. Pour cela on continue d'utiliser la méthode employée dans les exercices 10 et 11 consistant à effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $(P|I_3)$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow -L_1$$

On en conclut que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$ en raisonnant par récurrence.

- **Initialisation.** La proposition est vraie au rang 0 puisque $(P^{-1}AP)^0 = I_3$ et $P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$. Démontrons que $(P^{-1}AP)^{n+1} = P^{-1}A^{n+1}P$.
On a

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{n+1} &= (P^{-1}AP)^n \times (P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A^nPP^{-1}AP \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= P^{-1}A^nI_3AP \\ &= P^{-1}A^nAP \\ &= P^{-1}A^{n+1}P\end{aligned}$$

3. On vérifie aisément que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et l'on observe qu'il s'agit d'une matrice diagonale ce qui permet d'en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

4. Les résultats des deux questions précédentes permettent d'établir que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad A^n = P \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

On en déduit en particulier que

$$A^3 = P \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 9 \\ -70 & 71 & 44 \\ 70 & -70 & -43 \end{pmatrix}$$

et

$$A^4 = P \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -15 & -15 \\ -130 & 131 & 50 \\ 130 & -130 & -49 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 13. Pour tout réel a on pose $A_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

1. Pour tout réel a on note $c_1(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_2(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $c_3(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes de la matrice A_a et $\mathcal{B}_a$ la

famille $(c_1(a), c_2(a), c_3(a))$. On recherche l'ensemble des réels a pour lesquels $\mathcal{B}_a$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque celle-ci est constituée de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs cela revient en fait à déterminer l'ensemble des réels a pour lesquels $\mathcal{B}_a$ est une famille libre.

Soit a un réel. Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\alpha.c_1(a) + \beta.c_2(a) + \gamma.c_3(a) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta & +\gamma = 0 \\ \alpha + a\beta & = 0 \\ \alpha + \beta & +a\gamma = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta & +\gamma = 0 \\ (a-1)\beta & -\gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (a-1)\gamma & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $\mathcal{B}_a$ est libre si, et seulement si, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ainsi, la matrice A_a est inversible si, et seulement si, $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. D'après la question précédente on sait que A_2 est inversible. Calculons maintenant son inverse en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $(A \mid I_3)$ pour aboutir à $(I_3 \mid A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$$

On en conclut que

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 14.

1. Les réels a et b ne sont pas tous les deux nuls donc $a \times a - (-b) \times b = a^2 + b^2 > 0$ et à fortiori $a^2 + b^2 \neq 0$. Il s'ensuit que A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

2. Notons $c_1 = \begin{pmatrix} a \\ a \\ b \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ a \end{pmatrix}$ et $c_3 = \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \\ a+b \end{pmatrix}$ les vecteurs colonnes de la matrice B . On observe que $c_3 = c_2 + c_1$ donc la famille (c_1, c_2, c_3) est liée et l'on en conclut que la matrice B n'est pas inversible.
3. Les vecteurs colonnes de C forment clairement une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que C est inversible et l'on calcule maintenant son inverse en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $(C \mid I_3)$ jusqu'à aboutir à $(I_3 \mid C^{-1})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3$$

On en conclut que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On montre aisément que les vecteurs colonnes de D forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que D est inversible et l'on calcule maintenant son inverse en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $(D \mid I_3)$ jusqu'à aboutir à $(I_3 \mid D^{-1})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & | & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1, L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2, L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$

On en conclut que

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

5. Commençons par le

Rappel (Inversibilité d'une matrice diagonale) – Soient $n \geq 1$ un entier et $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. La matrice $\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est inversible si, et seulement si, $a_1 a_2 \dots a_n \neq 0$ et dans ce cas

$$\text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1} = \text{Diag}\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}\right)$$

La matrice E est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls donc elle est inversible et

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

6. On montre aisément que les vecteurs colonnes de F forment une famille libre de $\mathbb{R}^3$. On en déduit que F est inversible et l'on calcule maintenant son inverse en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $(F \mid I_3)$ jusqu'à aboutir à $(I_3 \mid F^{-1})$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1, L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2, L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3$$

On en conclut que

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 15.

1. La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible car $3 \times 2 - 7 \times 1 = -1 \neq 0$ et on a

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

2. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible car $2 \times 4 - (-5) \times (-3) = -7 \neq 0$ et on a

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/7 & -3/7 \\ -5/7 & -2/7 \end{pmatrix}$$

3. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible car $0 \times 0 - 3 \times 2 = -6 \neq 0$ et on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Soit α un réel. La matrice $\begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $(\alpha+1)\alpha - 2 \times 1 = \alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha-1)(\alpha+2) \neq 0$ i.e. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1; -2\}$. Dans ce cas, on a

$$\begin{pmatrix} \alpha+1 & 1 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha+2)} \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 16. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La matrice $A(\theta)$ est inversible car $\cos(\theta) \times \cos(\theta) - \sin(\theta) \times (-\sin(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$ et on a

$$\begin{aligned} A(\theta)^{-1} &= \frac{1}{1} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\ &= A(-\theta) \end{aligned}$$

Exercice n° 17.

— Calculons l'inverse de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 7 & 5 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow 5L_3 + 7L_2 \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 7 & 5 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7/2 & -5/2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{10}L_2, L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -7/2 & -5/2 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \end{aligned}$$

On en conclut que $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2 & -7/2 & -5/2 \end{pmatrix}$.

— Calculons l'inverse de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -4 & 6 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_2 \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 9 & -21 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -4 & 6 \end{array} \right) \quad L_2 \leftarrow 5L_2 - L_3 \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -3/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 4/5 & -6/5 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -\frac{1}{15}L_2, L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3 \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -3/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 & 4/5 & -6/5 \end{array} \right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - 2L_3 \end{aligned}$$

On en conclut que $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1/5 & -3/5 & 7/5 \\ -3/5 & 4/5 & -6/5 \end{pmatrix}$.

— On laisse maintenant au lecteur le soin d'établir seul que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 1/2 & -1/6 \\ 1/2 & -1/3 & 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 18. On va déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices à coefficients réels commutant avec A en raisonnant par *analyse* – *synthèse*.

— **Analyse.** Soit B une matrice à coefficients réels commutant avec A . L'existence des produits $A \times B$ et $B \times A$ entraîne déjà que $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et l'on peut donc écrire $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Maintenant,

$$\begin{aligned} A \times B = B \times A &\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+3c & -b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a+3b \\ c-d & 2c+3d \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a+2c = a-b \\ -a+3c = c-d \\ b+2d = 2a+3b \\ -b+3d = 2c+3d \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} b+2c = 0 \\ a-2c-d = 0 \\ 2a+2b-2d = 0 \\ b+2c = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a-2c-d = 0 \\ a+b-d = 0 \\ b+2c = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a-2c-d = 0 \\ b+2c = 0 \\ b+2c = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} a-2c-d = 0 \\ b+2c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et l'on en déduit que $B = \begin{pmatrix} 2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est **inclus** dans $\left\{ \begin{pmatrix} 2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

— **Synthèse.** Réciproquement, on s'assure aisément que toutes les matrices de l'ensemble $\left\{ \begin{pmatrix} 2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$ commutent avec A permettant ainsi d'en conclure que $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice n° 19.

— Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} A(\theta)A(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta)\cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= A(\theta + \theta') \end{aligned}$$

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrons que, pour tout entier $n \geq 1$, $(A(\theta))^n = A(n\theta)$. Pour cela on raisonne par récurrence sur n .
- **Initialisation.** L'égalité est vraie au rang $n = 1$ car $(A(\theta))^1 = A(\theta) = A(1 \times \theta)$.
- **Hérédité.** Soit $n \geq 1$ un entier. Supposons que $(A(\theta))^n = A(n\theta)$. Démontrons que $(A(\theta))^{n+1} = A((n+1)\theta)$.
On a

$$\begin{aligned}
 (A(\theta))^{n+1} &= (A(\theta))^n \times A(\theta) \\
 &= A(n\theta) \times A(\theta) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
 &= A(n\theta + \theta) \quad \text{d'après le point précédent} \\
 &= A((n+1)\theta)
 \end{aligned}$$

Exercice n° 20.

- Commençons cet exercice en observant que pour tous réels u et v on a

$$\begin{aligned}
 A(u)A(v) &= \begin{pmatrix} \text{ch}(u) & \text{sh}(u) \\ \text{sh}(u) & \text{ch}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch}(v) & \text{sh}(v) \\ \text{sh}(v) & \text{ch}(v) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \text{ch}(u)\text{ch}(v) + \text{sh}(u)\text{sh}(v) & \text{ch}(u)\text{sh}(v) + \text{sh}(u)\text{ch}(v) \\ \text{sh}(u)\text{ch}(v) + \text{ch}(u)\text{sh}(v) & \text{sh}(u)\text{sh}(v) + \text{ch}(u)\text{ch}(v) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \text{ch}(u+v) & \text{sh}(u+v) \\ \text{sh}(u+v) & \text{ch}(u+v) \end{pmatrix} \\
 &= A(u+v)
 \end{aligned}$$

- Il en résulte en particulier que, pour tout réel u , on a

$$A(u)A(-u) = A(u + (-u)) = A(0) = I_2 \quad \text{et} \quad A(-u)A(u) = A(-u + u) = A(0) = I_2$$

prouvant ainsi que $A(u)$ est inversible et $A(u)^{-1} = A(-u)$.

- Considérons maintenant un réel x et $n \geq 1$ un entier. Un raisonnement par récurrence analogue à celui de l'exercice précédent permet déjà d'établir que $A(x)^n = A(nx)$ et l'on en déduit ensuite que $A(x)^{-n} = (A(x)^n)^{-1} = A(nx)^{-1} = A(-nx)$.
- L'égalité précédente est également satisfaite pour $n = 0$ ce qui permet d'en conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad A(x)^n = A(nx)$$