Université d'Évry *Année 2019 – 2020*
Algèbre linéaire et géométrie (EC 221)

Corrigés des exercices du TD n° 3

Exercice n° 3.

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On note $(S_{a,b,c})$ le système de l'énoncé et $\mathcal{S}_{a,b,c}$ l'ensemble de ses solutions.

   Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{cases} x-6y+2z=a \\ -2x+15y-6z=b \\ -x+4y=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y+2z=a \\ 3y-2z=b+2a & L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ -2y+2z=c+a & L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y+2z=a \\ 3y-2z=b+2a \\ 2z=7a+2b+3c & L_3 \leftarrow 3L_3+2L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y+2z=a \\ 3y=9a+3b+3c & L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ 2z=7a+2b+3c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=12a+4b+3c & L_1 \leftarrow L_1+2L_2-L_3 \\ 3y=9a+3b+3c \\ 2z=7a+2b+3c \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=12a+4b+3c \\ y=3a+b+c \\ z=\dfrac{7a+2b+3c}{2} \end{cases}$$

   et donc le système $(S_{a,b,c})$ admet $\begin{pmatrix} 12a+4b+3c \\ 3a+b+c \\ (7a+2b+3c)/2 \end{pmatrix}$ pour **unique** solution. On en déduit en particulier que le nombre de solutions de $(S_{a,b,c})$ ne dépend pas de a, b, c puisque $\operatorname{card}(\mathcal{S}_{a,b,c}) = 1$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2. On vient de montrer que pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ il existe un **unique** triplet (x, y, z) de réels tel que $x.u_1 + y.u_2 + z.u_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ce qui justifie que les vecteurs u_1, u_2, u_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Le résultat de la question 1. permet d'obtenir que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 19.u_1 + 5.u_2 + 6.u_3$$

   montrant ainsi que v admet le triplet $(19, 5, 6)$ pour coordonnées dans la base u_1, u_2, u_3.

Exercice n° 4.

1. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x+y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -y+3z=0 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -2y+6z=0 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-3z=0 \\ y-3z=0 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ y-3z=0 & L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{2}L_3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ y-3z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 & L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ y-3z=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=3z \end{cases}$$

   L'ensemble des solutions du système est $\left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$.

2. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ 3x+y+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -y+3z=-1 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -2y+6z=-2 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ \quad y-3z=1 \quad L_2 \leftarrow -L_2 \\ \quad y-3z=1 \quad L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{2}L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ \quad y-3z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y-3z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=1+3z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de système est $\left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 1+3z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$.

3. Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+z=0 \\ 3x+y+3z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -y+3z=-2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2y+6z=-2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -y+3z=-2 \\ \quad 0=2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

On en conclut que le système est incompatible (*i.e.* n'a pas de solution).

4. La réponse est non car nous venons de voir que le système admet une infinité de solutions lorsque $(a,b,c) \in \{(0,0,0),(1,1,1)\}$ alors qu'il n'en admet aucune lorsque $(a,b,c)=(1,0,1)$.

5. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. On note $S_{a,b,c}$ le système étudié et $\mathcal{S}_{a,b,c}$ l'ensemble de ses solutions.

Pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{cases} x+y-z=a \\ 2x+y+z=b \\ 3x+y+3z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=a \\ -y+3z=b-2a \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2y+6z=c-3a \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=a \\ \quad y-3z=2a-b \quad L_2 \leftarrow -L_2 \\ 2y-6z=3a-c \quad L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=a \\ \quad y-3z=2a-b \\ \quad 0=-a+2b-c \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=-a+b \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y-3z=2a-b \\ \quad 0=-a+2b-c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-a+b-2z \\ y=2a-b+3z \\ 0=-a+2b-c \end{cases}$$

On distingue maintenant deux cas.

— *Premier cas :* $-a+2b-c \neq 0$.
Le système $S_{a,b,c}$ est incompatible *i.e.* il n'admet pas de solution.

— *Deuxième cas :* $-a+2b-c=0$.
L'ensemble des solutions du système $S_{a,b,c}$ est $\left\{ \begin{pmatrix} -a+b-2z \\ 2a-b+3z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$.

6. Pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) \Leftrightarrow \exists x,y,z \in \mathbb{R}, \quad x.u_1 + y.u_2 + z.u_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S}_{a,b,c} \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow -a+2b-c=0$$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -a+2b-c=0 \right\}$.

Exercice n° 5. Pour tous $a,b,c \in \mathbb{R}$ on note $(S_{a,b,c})$ le système

$$\begin{cases} -x+y-z=a \\ 2x+z+t=b \\ x-2y+z-t=c \end{cases}$$

1. Pour tous $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} -x+y-z=0 \\ 2x+z+t=0 \\ x-2y+z-t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \quad L_1 \leftarrow -L_1 \\ 2x+z+t=0 \\ x-2y+z-t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2y-z+t=0 \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -y-t= \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2y-z+t=0 \\ y+t=0 \quad L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ y+t=0 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 2y-z+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ y+t=0 \\ -z-t=0 \quad L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ y+t=0 \\ z+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \quad L_1 \leftarrow L_1+L_2-L_3 \\ y+t=0 \\ z+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-t \\ z=-t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système $(S_{0,0,0})$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ non réduit au vecteur nul et dont $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} -x+y-z=a \\ 2x+z+t=b \\ x-2y+z-t=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=-a \quad L_1 \leftarrow -L_1 \\ 2x+z+t=b \\ x-2y+z-t=c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=-a \\ 2y-z+t=2a+b \quad L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ -y-t=a+c \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=-a \\ 2y-z+t=2a+b \\ y+t=-a-c \quad L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=-a \\ y+t=-a-c \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 2y-z+t=2a+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=-a \\ y+t=-a-c \\ -z-t=4a+b+2c \quad L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=-a \\ y+t=-a-c \\ z+t=-4a-b-2c \quad L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2a+b+c \quad L_1 \leftarrow L_1+L_2-L_3 \\ y+t=-a-c \\ z+t=-4a-b-2c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2a+b+c \\ y=-a-c-t \\ z=-4a-b-2c-t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système $(S_{a,b,c})$ est $\left\{ \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ -a-c-t \\ -4a-b-2c-t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

On constate que c'est ensemble infini. Par contre, il existe des valeurs a, b, c pour lesquelles ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. En effet, dès lors que $2a + b + c \neq 0$ l'ensemble des solutions de $(S_{a,b,c})$ ne contient pas le vecteur nul de $\mathbb{R}^4$ et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

3. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

D'après la question précédente on sait que l'ensemble des solutions du système $(S_{a,b,c})$ n'est pas vide donc il existe x, y, z, t des réels tels que $x.u_1 + y.u_2 + z.u_3 + t.u_4 = u$.

On vient de montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2, u_3, u_4 ce qui entraîne que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^3$.

Exercice n° 6. Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ on note $S_{a,b,c,d}$ le système suivant

$$\begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ 3x+y+z+3t=b \\ 2x+y+z+2t=c \\ x+y+2z=d \end{cases}$$

et $\mathcal{S}_{a,b,c,d}$ l'ensemble de ses solutions.

1. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ 3x+y+z+3t=b \\ 2x+y+z+2t=c \\ x+y+2z=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ -5y-2z-3t=b-3a \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -3y-z-2t=c-2a \quad L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \\ -y+z-2t=d-a \quad L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ 5y+2z+3t=3a-b \quad L_2 \leftarrow -L_2 \\ 3y+z+2t=2a-c \quad L_3 \leftarrow -L_3 \\ y-z+2t=a-d \quad L_4 \leftarrow -L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ y-z+2t=a-d \quad L_2 \leftrightarrow L_4 \\ 3y+z+2t=2a-c \\ 5y+2z+3t=3a-b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ y-z+2t=a-d \\ 4z-4t=-a-c+3d \quad L_3 \leftarrow L_3-3L_2 \\ 7z-7t=-2a-b+5d \quad L_4 \leftarrow L_4-5L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ y-z+2t=a-d \\ 4z-4t=-a-c+3d \\ 0=-a-4b+7c-d \quad L_4 \leftarrow 4L_4-7L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ y-z+2t=a-d \\ z-t=\dfrac{-a-c+3d}{4} \quad L_3 \leftarrow \dfrac{1}{4}L_3 \\ 0=a+4b-7c+d \quad L_4 \leftarrow -L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ y+t=\dfrac{3a-c-d}{4} \quad L_2 \leftarrow L_2+L_3 \\ z-t=\dfrac{-a-c+3d}{4} \\ 0=a+4b-7c+d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+t=\dfrac{-a+3c-d}{4} \quad L_1 \leftarrow L_1-2L_2-L_3 \\ y+t=\dfrac{3a-c-d}{4} \\ z-t=\dfrac{-a-c+3d}{4} \\ 0=a+4b-7c+d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-a+3c-d}{4}-t \\ y=\dfrac{3a-c-d}{4}-t \\ z=\dfrac{-a-c+3d}{4}+t \\ 0=a+4b-7c+d \end{cases}$$

On distingue maintenant deux cas.

— *Premier cas :* $a+4b-7c+d \neq 0$.
Dans ce cas le système $S_{a,b,c,d}$ est incompatible.

— *Deuxième cas :* $a+4b-7c+d=0$.
L'ensemble des solutions du système $S_{a,b,c,d}$ est $\left\{\left(\dfrac{-a+3c-d}{4}-t, \dfrac{3a-c-d}{4}-t, \dfrac{-a-c+3d}{4}+t, t\right) \mid t \in \mathbb{R}\right\} = \{(b-c-t, -3b+5c-d-t, b-2c+d+t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2. (a) Puisque $a+4b-7c+d = 4+4\times 2-7\times 1-5=0$ on en déduit, d'après la question précédente, que l'ensemble des solutions du système $S_{a,b,c,d}$ n'est pas vide.

(b) D'après le résultat de la question 1. on sait que l'ensemble des solutions du système $S_{a,b,c,d}$ est $\{(b-c-t, -3b+5c-d-t, b-2c+d+t, t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t, 4-t, -5+t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. On en déduit en particulier que $(x_0, y_0, z_0, t_0) := (1, 4, -5, 0)$ est une solution de $S_{a,b,c,d}$.

(c) L'ensemble des solutions de $S_{a,b,c,d}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ puisqu'il il ne contient pas le vecteur nul. En effet, dans le cas contraire, il existerait un réel t tel que $(1-t, 4-t, -5+t, t) = (0,0,0,0)$ ce qui est absurde.

(d) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions du système homogène associé à $(S_{a,b,c,d})$.

Pour tout $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} x+2y+z+2t=a \\ 3x+y+z+3t=b \\ 2x+y+z+2t=c \\ x+y+2z=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+2t=x_0+2y_0+z_0+t_0 \\ 3x+y+z+3t=3x_0+y_0+z_0+3t_0 \\ 2x+y+z+2t=2x_0+y_0+z_0+2t_0 \\ x+y+2z=x_0+y_0+2z_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-x_0)+2(y-y_0)+(z-z_0)+2(t-t_0)=0 \\ 3(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)+3(t-t_0)=0 \\ 2(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)+2(t-t_0)=0 \\ (x-x_0)+(y-y_0)+2(z-z_0)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0, t-t_0) \in \mathcal{S}$$
$$\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{S}, \quad (x-x_0, y-y_0, z-z_0, t-t_0) = u$$
$$\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{S}, \quad (x,y,z,t)-(x_0,y_0,z_0,t_0) = u$$
$$\Leftrightarrow \exists u \in \mathcal{S}, \quad (x,y,z,t)=(x_0,y_0,z_0,t_0)+u$$

ce qui justifie le résultat annoncé.

3. Pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ on a

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) \Leftrightarrow \exists x,y,z,t \in \mathbb{R}, \quad x.u_1+y.u_2+z.u_3+t.u_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow S_{a,b,c,d} \text{ admet au moins une solution}$$
$$\Leftrightarrow a+4b-7c+d=0$$

Ainsi, $\mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid a+4b-7c+d=0 \right\}$.

Exercice n° 7.

1. Pour tous $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+4y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y+z=0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ 3y+2z=0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ -2y+z=0 \\ 7z=0 & L_3 \leftarrow 2L_3+3L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

L'ensemble des solutions du système étudié est $\{(0,0,0)\}$.

2. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\begin{cases} x+y+2z=5 \\ x-y-z=1 \\ x+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=5 \\ -2y-3z=-4 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ -y-z=-2 & L_3 \leftarrow L_3-L1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=5 \\ 2y+3z=4 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ y+z=2 & L_3 \leftarrow -L_3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=5 \\ y+z=2 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ 2y+3z=4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=5 \\ y+z=2 \\ z=0 & L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système étudié est $\{(3,2,0)\}$.

3. Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. Pour tous $x,y,z \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} 3x-y+2z=a \\ -x+2y-3z=b \\ x+2y+z=c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=c & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ -x+2y-3z=b \\ 3x-y+2z=a \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=c \\ 4y-2z=b+c & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ -7y-z=a-3c & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=c \\ 4y-2z=b+c \\ -18z=4a+7b-5c & L_3 \leftarrow 4L_3+7L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=c \\ 4y-2z=b+c \\ z=\dfrac{-4a-7b+5c}{18} & L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{18}L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=c \\ 4y = \dfrac{-8a+4b+28c}{18} & L_2 \leftarrow L_2+2L_3 \\ z = \dfrac{-4a-7b+5c}{18} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=c \\ y = \dfrac{-2a+b+7c}{18} & L_2 \leftarrow \dfrac{1}{4}L_2 \\ z = \dfrac{-4a-7b+5c}{18} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8a+5b-c}{18} & L_1 \leftarrow L_1-2L_2-L_3 \\ y = \dfrac{-2a+b+7c}{18} \\ z = \dfrac{-4a-7b+5c}{18} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système étudié est $\left\{\left(\dfrac{8a+5b-c}{18}, \dfrac{-2a+b+7c}{18}, \dfrac{-4a-7b+5c}{18}\right)\right\}$.

4. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=-1 \\ -x-y+2z=1 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -3y+3z=-3 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ z=2 & L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ z=1 & L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{cases}$$

donc le système est incompatible.

5. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x-y-2z=-4 \\ 3x+3y+z=7 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ -3z=-3 & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ 4z=4 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \\ z=1 & L_4 \leftarrow L_4-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 & L_1 \leftarrow L_1+L_2 \\ z=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y+2 \\ z=1 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système étudié est $\{(-y+2, y, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice n° 8 .

1. Pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a.u_1+b.u_2+c.u_3+d.u_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a+b+2c-2d=x \\ 3a+2b+3c+d=y \\ -a+b+4c-12d=z \\ 2a+b+c+3d=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a+b+2c-2d=x \\ -b-3c+7d=y-3x & L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ 2b+6c-14d=z+x & L_3 \leftarrow L_3+L_1 \\ -b-3c+7d=t-2x & L_4 \leftarrow L_4-2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a+b+2c-2d=x \\ -b-3c+7d=y-3x \\ 0=-5x+2y+z & L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \\ 0=x-y+t & L_4 \leftarrow L_4-L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x+2y+z=0 \\ x-y+t=0 \end{cases}$$

Ainsi, $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -5x+2y+z=0 \text{ et } x-y+t=0\right\}$.

2. Commençons par le

> **Rappel** – Soient $n, p \geqslant 1$ des entiers. On ne change pas le sous-espace vectoriel engendré par des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de $\mathbb{R}^n$ en remplaçant l'un d'entre eux, disons u_i avec $i \in [\![1, p]\!]$, par λu_i avec $\lambda \neq 0$ ou $u_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k u_k$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$.

On a

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-12\\3\end{pmatrix}\right)$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-12\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}\right)$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-3\\6\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\-14\\7\end{pmatrix}\right)$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, -\begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}, -\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\-3\\6\\-3\end{pmatrix}, \frac{1}{7}\begin{pmatrix}0\\7\\-14\\7\end{pmatrix}\right)$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$$
$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$$

donc les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}$ engendrent E. Ces derniers étant linéairement indépendants on en déduit qu'ils forment une base de E et l'on en conclut que $\dim(E) = 2$.

3. Proposons une autre méthode pour calculer la dimension de E. Pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ on a

$$(x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ -5x + 2y + z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ -3y + z + 5t = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 5L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y - \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}t = 0 \quad L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3}z - \frac{2}{3}t = 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ y - \frac{1}{3}z - \frac{5}{3}t = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}t \\ y = \frac{1}{3}z + \frac{5}{3}t \end{cases}$$

Ainsi, $E = \left\{\begin{pmatrix}z/3 + 2t/3\\z/3 + 5t/3\\z\\t\end{pmatrix} \mid z, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{z\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2/3\\5/3\\0\\1\end{pmatrix} \mid z, t \in \mathbb{R}\right\} =$ $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2/3\\5/3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et les vecteurs $\begin{pmatrix}1/3\\1/3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2/3\\5/3\\0\\1\end{pmatrix}$ engendrent E. Ceux-ci sont également linéairement indépendants donc ils forment une base de E et l'on en conclut que $\dim(E) = 2$.

Exercice n° 9 .

1. Pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad a.u_1 + b.u_2 + c.u_3 = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ 2a + 3b + c = y \\ a + 5b + 3c = z \\ a + b + 3c = t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ -b - 5c = y - 2x \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3b = z - x \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ -b = t - x \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a + 2b + 3c = x \\ b + 5c = 2x - y \quad L_2 \leftarrow -L_2 \\ 3b = z - x \\ b = x - t \quad L_4 \leftarrow -L_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} a+2b+3c=x \\ b+5c=2x-y \\ -15c=-7x+3y+z \quad L_3\leftarrow L_3-3L_2 \\ -5c=-x+y-t \quad L_4\leftarrow L_4-L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} a+2b+3c=x \\ b+5c=2x-y \\ -15c=-7x+3y+z \\ 0=4x-z-3t \quad L_4\leftarrow 3L_4-L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4x-z-3t=0$$

Ainsi, $E = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \mid 4x-z-t=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\4x-3t\\t\end{pmatrix} \mid x,y,t\in\mathbb{R}\right\} =$ Vect $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\right)$. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix}\right)$ est clairement libre donc elle forme une base de E et l'on en déduit que $\dim(E)=3$. La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ constitue quant à elle une base de $\mathbb{R}^4$ car elle est libre et contient $\dim(\mathbb{R}^4)=4$ vecteurs.

2. Pour tous $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in E \Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e\in\mathbb{R},\quad a.u_1+b.u_2+c.u_3+d.u_4+e.u_5=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} 2a+b+4c+3e=x \\ a+3c=y \\ -a-3c=z \\ 3a+b+7c+2d+5e=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} a+3c=y \\ 2a+b+4c+3e=c \\ -a-3c=z \\ 3a+b+7c+2d+5e=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} a+3c=y \\ b-2c=x-2y \quad L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ 0=z+y \quad L_3\leftarrow L_3+L_1 \\ b-2c+2d+5e=t-3y \quad L_4\leftarrow L_4-3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} a+3c=y \\ b-2c=x-2y \\ b-2c+2d+5e=t-3y \\ 0=z+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e\in\mathbb{R},\quad \begin{cases} a+3c=y \\ b-2c=x-2y \\ 2d+2e=-x-y+t \quad L_3\leftarrow L_3-L_2 \\ 0=z+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z+y=0$$

Ainsi, $E = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \mid z+y=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\-y\\t\end{pmatrix} \mid x,y,t\in\mathbb{R}\right\} =$ Vect $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et E est donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. Celle-ci est également libre donc elle constitue une base de E et l'on en déduit que $\dim(E)=3$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ constitue quant à elle une base de $\mathbb{R}^4$ car elle est libre et contient $\dim(\mathbb{R}^4)=4$ vecteurs.

3. Pour tous $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ on a

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in E \Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e\in\mathbb{R},\quad a.u_1+b.u_2+c.u_3+d.u_4+e.u_5=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} a-b+5c+3d+5e=x \\ 1a+3b+11d-10e=y \\ a+b+c+5d-3e=z \\ -a-b-c-5d+3e=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} a+b+c+5d-3e=z \\ -a-b-c-5d+3e=t \\ a-b+5c+3d+5e=x \\ 2a+3b+11d-10e=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} a+b+c+5d-3e=z \\ 0=z+t \quad L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ -2b+4c-2d+8e=x-z \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ b-2c+d-4e=y-2z \quad L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} a+b+c+5d-3e=z \\ b-2c+d-4e=y-2z \\ -2b+4c-2d+8e=x-z \quad L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ 0=z+t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists a,b,c,d,e \in \mathbb{R},\quad \begin{cases} a+b+c+5d-3e=z \\ b-2c+d-4e=y-2z \\ 0=x+2t-5z \quad L_3 \leftarrow L_3+2L_2 \\ 0=z+t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-5z=0 \\ z+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+5t=0 \quad L_1 \leftarrow L_1+5L_2 \\ z+t=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-5t \\ z=-t \end{cases}$$

Ainsi, $E = \left\{ \begin{pmatrix} -2y-5t \\ y \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid y,t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et E donc le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Celle-ci est libre donc elle forme une base de E et l'on en déduit en particulier que $\dim(E)=2$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ constitue quant à elle une base de $\mathbb{R}^4$ puisqu'elle contient $\dim(\mathbb{R}^4)=4$ vecteurs et on vérifie facilement qu'elle est libre.