Devoir maison
(matrices)

à rendre pour **minuit** le nuit du mardi 5 au mercredi 6 mai 2020

De l'inversibilité.

1. Nous allons établir les implications suivantes :

$$A \text{ est inversible} \overset{1a}{\Longrightarrow} g \text{ est bijective} \overset{1b}{\Longrightarrow} g \text{ est injective} \overset{1c}{\Longrightarrow} g \text{ est surjective} \overset{1d}{\Longrightarrow} A \text{ est inversible.}$$

(a) Supposons A inversible, notons α son inverse puis γ la multiplication à-gauche-par-α dans $M_n(\mathbf{C})$. Les applications g et γ sont alors réciproques l'une de l'autre (d'où la bijectivité de g) vu à $M \in M_n(\mathbf{C})$ fixé les égalités

$$\begin{aligned}[\gamma \circ g](M) & \underset{\text{composition}}{\overset{\text{déf. de la}}{=}} \gamma(g(M)) \underset{\text{et de } \alpha}{\overset{\text{déf. de } g}{=}} \alpha(AM) \underset{\text{la multiplication}}{\overset{\text{associativité de}}{=}} (\alpha A) M \\ & \underset{\text{l'un de l'autre}}{\overset{\alpha \text{ et } A \text{ sont inverses}}{=}} I_n M \underset{\text{matrice dentité}}{\overset{\text{propriété de la}}{=}} M \underset{\text{l'application identité}}{\overset{\text{définition de}}{=}} \underset{M_n(\mathbf{C})}{\mathrm{Id}}(M)\end{aligned}$$

(lesquelles traduisent l'égalité fonctionnelle $\gamma \circ g = \mathrm{Id}_{M_n(\mathbf{C})}$, l'autre égalité $g \circ \gamma = \underset{M_n(\mathbf{C})}{\mathrm{Id}}$ s'établissant exactement de même en utilisant cette fois la partie $A\alpha = I_n$ de l'hypothèse).

(b) Supposons g bijective.

Si la bijectivité vous a été définie comme la conjonction de l'injectivité et de la surjectivité, il n'y a alors rien faire.

Sinon, elle vous certainement été définie comme l'existence d'un "inverse" pour la composition. Soit alors γ une application telle que $\gamma \circ g = \underset{M_n(\mathbf{C})}{\mathrm{Id}}$. L'injectivité de g découle alors à $M, N \in M_n(\mathbf{C})$ fixées des implications

$$g(M) = g(N) \overset{\text{appliquer } \gamma}{\Longrightarrow} \underbrace{\gamma(g(M))}_{=[\gamma \circ g](M) = \underset{M_n(\mathbf{C})}{\mathrm{Id}}(M)} = \underbrace{\gamma(g(N))}_{=[\gamma \circ g](N) = \underset{M_n(\mathbf{C})}{\mathrm{Id}} N} \Longrightarrow M = N.$$

(c) Supposons g injective. Puisque g est linéaire (son additivité traduit la distributivité de $\times$ à-droite-sur $+$, son homogénéité traduit l'associativité de $\times$ lorsque la matrice "au milieu" est scalaire[1]), il fait sens de parler de son noyau et l'hypothèse se traduit alors par la nullité de ce dernier. L'identité du rang[2] s'écrit alors

$$\dim \operatorname{Im} g + \underbrace{\dim \overbrace{\operatorname{Ker} g}^{=\{0\}}}_{=0} = \dim M_n(\mathbf{C}),$$

ce qui montre que l'image de g est de dimension maximale, çàd vaut tout espace $M_n(\mathbf{C})$, d'où la surjectivité cherchée.

(d) Supposons g surjective. Elle atteint alors I_n, d'où une matrice α telle que $A\alpha = I_n$. L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & \alpha M \end{array} \right.$ est alors injective (reprendre la preuve de la question 1a en remplaçant partout A par α), donc surjective par l'identité du rang (*cf.* question 1c), d'où une matrice β telle que $\alpha\beta = I_n$ (*cf.* premières lignes de cette question 1d). L'égalité $\beta = A$ montrerait alors que A et α sont inverses l'un de l'autre, ce qui conclurait à l'inversibilité de A. Or cette égalité est générale[3] et découle de celles

$$A = A(I_n) = A(\alpha\beta) = (A\alpha)\beta = (I_n)\beta = \beta.$$

[1] çàd de la forme λI_n pour un certain scalaire λ, les produits externe $\lambda \cdot M$ et interne $(\lambda I_n) \times M$ coïncidant alors pour chaque matrice M de taille $n \times n$

[2] au fait, cette égalité se nomme ainsi car la dimension de l'image de g s'appelle son *rang*

[3] elle a été établie en cours de langage maths lors de la séances sur le langage de symétries

2. (Le gros du travail vient d'être fait.) Nous allons établir les implications suivantes :

$$A \text{ est inversible} \Longrightarrow d \text{ est bijective} \Longrightarrow d \text{ est injective} \Longrightarrow d \text{ est surjective} \Longrightarrow A \text{ est inversible.}$$

Les deux premières implications se montrent exactement comme à la question 1/

Idem pour la troisième à l'exception du *placement* utilisé dans les arguments établissant la linéarité de d : son additivité traduit la distributivité de $\times$ à-*gauche*-sur $+$ et son homogénéité découle de l'associativité de $\times$ lorsque la matrice de *gauche* est scalaire.

Détaillons un peu plus la dernière implication. Quand d est surjective, on dispose d'une matrice α telle que $\alpha A = I_n$; or la question 1d montre alors que α et A sont inverses l'un de l'autre, d'où l'inversibilité de A.

3. Appelons δ la multiplication à-droite-par B dans $M_n(\mathbf{C})$, notons c l'application considérée, laquelle s'écrit simplement comme la composée $g \circ \delta$ (ou $\delta \circ g$, peu importe ici l'ordre).

Supposons c surjective. Alors la composée $g \circ \delta$ est surjective, donc g est surjective[4], d'où l'inversibilité de A et la bijectivité de g (d'après la question 1). La composée de la surjection $g \circ \delta$ à-gauche-par la surjection g^{-1} est alors surjective[5], çàd δ est surjective, d'où l'inversibilité de B (d'après la question 2).

Supposons A et B inversibles. Les questions 1 et 2 livrent alors resp. les bijectivités de g et δ, d'où celle de la composée $\delta \circ g$ et la surjectivité de cette dernière.

4. Le raisonnement est analogue, aussi serons-nous plus concis. Le sens réciproque a été déjà était fait. Quand $c = g \circ \delta$ est bijective, elle est en particulier injective, donc δ l'est aussi, d'où B inversible et δ bijectif (*cf.* question 2) ; composer alors les injections c et δ^{-1} donne une injection g, d'où B inversible (*cf.* question 1).

5. L'application g agit en multipliant à-*gauche*-par A et l'application d en multipliant à-*droite*-par A. (Le nom choisi pour la **c**omposée c est son initiale.)

Un calcul de puissance. On abrégera $I = I_2$ afin d'alléger.

1. (a) On a les égalités

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d'où} \\
A^4 &= A^{2\cdot 2} = \left(A^2\right)^2 = \left(2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = 2^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -4I \text{ puis} \\
A^8 &= A^{4\cdot 2} = \left(A^4\right)^2 = (-4I)^2 = (-4)^2 I^2 = 16I.
\end{aligned}$$

Ces égalités se réécrivent (après division par une puissance convenable de $\sqrt{2}$)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^4 = -I \quad \text{et} \quad B^8 = I.$$

Les puissances de B formeront par conséquent une suite 8-périodique, leur connaissance revenant alors simplement aux huit premières puissances. Par ailleurs, le calcul des puissances de A se ramenant à celui de celles de B via les égalités $\forall n \in \mathbf{N},\ A^n = 2^{\frac{n}{2}} B^n$, la connaissance des puissances de A se ramène finalement à celui des huit premières de B.

(b) Appliquons ce qui précède : le calcul de $A^{99} = 2^{\frac{99}{2}} B^{99}$ se ramène à celui de

$$\begin{aligned}
B^{99} &= B^{8\cdot 12+3} = \underbrace{\left(B^8\right)^{12}}_{=I^{12}=I} B^3 = B^3. \text{ Il en résulte les égalités} \\
A^{99} &= 2^{\frac{98+1}{2}} B^{99} = 2^{\frac{2\cdot 49+1}{2}} B^3 = 2^{49}\sqrt{2}\ B \cdot B^2 = 2^{49} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2^{49} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

[4] à N fixé dans $M_n(\mathbf{C})$, l'image par δ de chaque antécédent de M par $g \circ \delta$ est un antécédent de N par g)

[5] à N fixé dans $M_n(\mathbf{C})$, chaque antécédent par $g \circ d$ de chaque antécédent par g^{-1} de N est un antécédent de N par $g^{-1} \circ [g \circ d]$

2. (a) Soit $c \in \mathbf{C}$. On a alors les égalités

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A+cI) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1+c & 1 \\ -1 & 1+c \end{pmatrix} \overset{L_1:\ +(1+c)L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1+(1+c)^2 \\ -1 & ? \end{pmatrix} \\
&= 1+\operatorname{rg}\left(\underbrace{1+(1+c)^2}_{=(c+1)^2-i^2=(c+1-i)(c+1+i)} \right) = \begin{cases} 1 \text{ si } c=-1\pm i \\ 2 \text{ sinon} \end{cases}.
\end{aligned}$$

(b) Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $X \in \mathbf{C}^2$. On a alors les équivalences

$$X \text{ solution de l'équation proposée} \iff AX=\lambda X \iff A-\lambda X=0 \iff (A-\lambda I)\,X=0.$$

Si $-\lambda$ n'est pas l'une des deux racines $-1\pm i$ ci-dessus, la matrice $A-\lambda I$ est alors de rang 2, donc inversible et la nullité de $(A-\lambda I)\,X$ équivaut à celle de X. *Traduction* : si $\lambda \notin \left\{ \begin{matrix} 1+i, \\ 1-i \end{matrix} \right\}$, alors l'équation considérée a pour unique solution le vecteur nul.

Soit à présent $s \in \{-1,1\}$ et imposons $\lambda = 1-si$. La matrice $A-\lambda I$ vaut alors $\begin{pmatrix} si & 1 \\ -1 & si \end{pmatrix}$ et est de rang 1 (d'après[6] la question 2a), donc l'équation à résoudre se réécrit successivement (en notant a et b les abscisse et ordonnée de X)

$$\begin{aligned}
(A-\lambda I)\,X=0 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} si & 1 \\ -1 & si \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{deuxième}}{\underset{\text{ligne}}{\iff}} a=sib \iff \exists \beta \in \mathbf{C},\ \begin{cases} a=si\beta \\ b=\beta \end{cases} \\
&\iff \quad \exists\beta\in\mathbf{C},\ X=\beta\begin{pmatrix} si \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \mathbf{C}\begin{pmatrix} si \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Traduction : quand $\lambda = 1-i$ (resp. $1+i$) les solutions de l'équation considérée forment la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\binom{i}{1}$ (resp. $\binom{-i}{1}$).

(c) En concaténant les vecteurs directeurs ci-dessus, on obtient une matrice $P := \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ telle que[7] $AP = P\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$. Notons Λ la matrice diagonale précédente[8]. Pour conclure, il suffit de montrer l'inversibilité de P, par exemple en calculant son déterminant $\begin{vmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = i+i \neq 0$ ou son rang $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{C_1:\ -C_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2i & ? \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ou encore en exhibant son inverse $\frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$

(d) L'inversibilité de P permet d'écrire $A = P\Lambda P^{-1}$. Il est bon d'observer le détail du calcul du carré d'un tel produit (appelé ***conjugué*** de Λ par P) :

$$\left(P\Lambda P^{-1}\right)^2 = \left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right) = P\Lambda \underbrace{P^{-1}P}_{=I} \Lambda P^{-1} = P\Lambda^2 P^{-1}.$$

Les P sont restées inchangés et la puissance s'applique directement sur le Λ central[9]. Cela permet d'intuiter les égalités $\forall n \in \mathbf{N},\ \left(P\Lambda P^{-1}\right)^n = P\Lambda^n P^{-1}$, égalités que l'on démontrerait aisément par récurrence. En particulier, les puissances de A se ramènent à celles de la matrice diagonale Λ, donc à celles des coefficients diagonaux $1\pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$ *via* les égalités[10]

$$\begin{aligned}
\Lambda^{99} &= \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}^{99} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}^{99} = \sqrt{2}^{99}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{99\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{99\pi}{4}} \end{pmatrix} \\
&= \sqrt{2}^{49}\sqrt{2}\begin{pmatrix} e^{-2\pi i\frac{8\cdot 12+3}{8}} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\frac{8\cdot 12+3}{8}} \end{pmatrix} = 2^{49}\begin{pmatrix} \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \end{pmatrix} = 2^{49}\begin{pmatrix} -i-1 & 0 \\ 0 & i-1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

[6] *sanity check* : multiplier par si la première ligne donne la seconde

[7] Ceci découle des deux égalités $A\binom{\pm i}{1} = (1\pm i)\binom{\pm i}{1}$ données par la résolution de l'équation précédente. *Sanity check* : refaire le calcul indépendamment de cet argument !

[8] Λ agit à-*droite*-sur P en agissant sur ses *colonnes*

[9] Voici un intérêt majeur de la conjugaison : le calcul polynomial de A est le même que celui de Λ. La recherche d'une matrice Λ facilitant ce calcul, le *réduisant*, s'appelle précisément la ***réduction*** de A. (Il n'est pas toujours possible en général de trouver une réduit diagonale, nous avons donc de la chance ici !)

[10] tiens, on retrouve le coefficient $\sqrt{2}$ de la matrice B du début ainsi que des racines huitièmes de l'unité...

Mettons tout bout à bout :

$$A^{99} = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} 2^{49} \begin{pmatrix} -1-i & 0 \\ 0 & i-1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{la matrice diagonale agit à-}droite\text{-sur } \left(\begin{smallmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \\ \text{donc multiplie ses } colonnes \text{ par } -1\mp i \text{ resp.}}} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 2^{49}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ -1-i & i-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} = 2^{48}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = 2^{49}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sanity check : on retrouve bien la même puissance qu'à la question 1 !

Une utilisation des matrices en combinatoire. -

Pour chaque ensemble E fini, son cardinal $\operatorname{Card} E$ pourra être abrégé indifféremment $|E|$ ou $\#E$. Nous rappelons les égalités $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$ pour chaques ensembles A et B.

Commençon par formaliser la notion de chemin. Convenons d'appeler ***sommet*** chaque élément de S et qualifions deux sommets d'***adjacents*** s'ils diffèrent d'*une* coordonnée exactement. Pour chaques sommets $a, b \in S$ et chaque longueur $\ell \in \mathbf{N}$, appelons ***chemin*** de a vers b de longueur ℓ chaque suite de $\ell+1$ éléments parmi S dont le premier terme est a, le dernier est b, et dont deux termes consécutifs sont adjacents. Par exemple[11], pour chaques sommets a, b adjacents, le couple (a, b) est un chemin de a vers b de longueur 1, la famille (a) est un chemin de a vers a de longueur nulle (le seul !) et le triplet (a, b, a) est un chemin de a vers a de longueur 2.

Notre cube a bien huit sommets vues les égalités

$$|S| = \operatorname{Card}\left(\ \{0,1\}^3\ \right) = \left(\ \#\{0,1\}\ \right)^3 = 2^3 = 8.$$

1. Il suffit de déterminer l'image par d de chacun des $\left|S^2\right| = |S|^2 = 8^2 = 64$ éléments source. Même si un joli tableau 8×8 serait bienvenu pour illustrer ce terne corrigé, on peut être plus économe. Raisonnons en effet en fixant un sommet $s \in S$. Les sommets situés au bout des trois arêtes issues de s lui sont à distance 1 (elles sont chacune clairement le bout d'un chemin de longueur 1 et on ne peut y accéder depuis s en strictement moins d'arêtes) ; ceux situés au bout des diagonales (issues de s) des trois faces dont un sommet est s lui sont à distance 2 (justification analogue) ; enfin le sommet opposé à s lui est à distance 3 (argument similaire). Sans oublier le sommet s, à distance nulle de lui-même ! Ce qui précède montre que les images $d\binom{s}{t}$ lorsque t décrit S forment le segment entier $\{0,1,2,3\}$, et ce indépendamment du sommet s invoqué ; or, chaque image par d étant (par définition) de la forme $d\binom{\sigma}{t}$ pour un certain sommet $\sigma \in S$, une telle image tombera dans $\{0,1,2,3\}$. *Conclusion* : l'image I cherchée vaut ce segment, d'où son cardinal 4.

   Ce qui précède serait tout à fait acceptable dans le cadre de ce devoir. Nous proposons toutefois et à présent une formalisation du paragraphe précédent afin de montrer ce qui peut être fait à un niveau plus avancé de rédaction, et d'élargir ainsi les perspectives[12]. Si une telle rédaction ne saurait être exigible, elle *doit* cependant pouvoir être comprise – et ce pouvoir, *lui*, est exigible !

   Décomposons l'image de d selon l'abscisse de l'argument[13] :

$$\operatorname{Im} d = \left\{d\binom{s}{t}\right\}_{s,t\in S} = \bigcup_{s\in S}\left\{d\binom{s}{t}\right\}_{s\in S}$$

   et montrons que chaque réuni[14] vaut $\{0,1,2,3\}$. On en déduira les égalités

$$I = \bigcup_{s\in S}\{0,1,2,3\} = \{0,1,2,3\} \text{ et } q = |I| = \#\{0,1,2,3\} = 4.$$

[11] Plus généralement, en notant $\sim$ la relation d'adjacence, on aurait la description

$$\begin{matrix}\forall a,b\in S \\ \forall \ell\in\mathbf{N}\end{matrix},\ c^\ell\binom{a}{b} = \operatorname{Card}\left\{s\in S^{\ell+1}\ ;\ \left\{\begin{matrix} s_0 = a \\ s_\ell = b\end{matrix}\right. \text{ et } \forall i\in[0,\ell[\cap\mathbf{N},\ s_i\sim s_{i+i}\right\}.$$

[12] éclairer les zones d'ombre en définissant *tout*, choix des notations, finesse des arguments, pur exercice de manipulation ensembliste...

[13] formaliser le raisonnement à *premier sommet fixé* (l'argument de "$d\binom{a}{b}$" est ici $\binom{a}{b}$, l'abscisse de ce dernier est a, lequel est bien un sommet)

[14] un *réuni* est ce qui apparaît dans une réunion (comme un *terme* est ce qui apparaît dans une somme, etc.)

Soit donc $s \in S$, appelons $\delta := \left\{ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ t & \longmapsto & d\binom{s}{t} \end{array} \right.$ et cherchons à établir l'égalité $\operatorname{Im} \delta = \{0, 1, 2, 3\}$. Notons a, b, c les coordonnées de s et définissons huit sommets comme suit[15] (oublions momentanément, le temps de cette question, le sens $\operatorname{Im} d$ que prendra la lettre I après) :

nom	O	I^-	I	I_-	II°	II	$II_\circ$	III
abscisse	a	$\overline{a}$	a	a	a	$\overline{a}$	$\overline{a}$	$\overline{a}$
ordonnée	b	b	$\overline{b}$	b	$\overline{b}$	b	$\overline{b}$	$\overline{b}$
cote	c	c	c	$\overline{c}$	$\overline{c}$	$\overline{c}$	c	$\overline{c}$

(chaque lettre O, I, II, III est à penser comme un chiffre latin indiquant la distance depuis s). Remarquer que ces huit sommets sont deux à deux distincts : nous avons donc numéroté *tous* les sommets. Mettons ces derniers sur un graphe, où un trait tracé entre deux sommets signifie leur adjacence[16] :

$$\begin{array}{ccccccc}
I & - & - & - & - & - & II_\circ \\
| & \diagdown & & & & \diagup & | \\
| & & O & - & I^- & & | \\
| & & | & & | & & | \\
| & & I_- & - & II & & | \\
| & \diagup & & & & \diagdown & | \\
II^\circ & - & - & - & - & - & III
\end{array}$$

On observe alors plusieurs chemins : celui (O, I) est de longueur 1, d'où la minoration $\delta(I) \leq 1$; de même, le chemin (O, I_-, II) est de longueur 2, d'où la minoration $\delta(II) \leq 2$; enfin la longueur 3 du chemin (O, I_-, II, III) majore la distance $\delta(III)$. Or, les coordonnées de deux sommets adjacents ne différant que d'au plus une valeur, pour chaque longueur $\ell < 3$ entière, les coordonnées de deux sommets reliés par un chemin de longueur ℓ ne peuvent différer que d'au plus ℓ valeurs : ceci montre l'absence de chemin de longueur au plus resp. $0, 1, 2$ entre O et resp. I, II, III, d'où l'égalité dans les trois majorations ci-dessus

$$\delta(I) = 1, \qquad \delta(II) = 2 \qquad \text{et} \qquad \delta(III) = 3.$$

Pour des raisons parfaitement analogues, on peut remplacer dans ces égalités chaque nom de sommet par un autre nom ayant le même chiffre romain. Enfin, le sommet s étant la fin d'un chemin de longueur nulle le reliant à lui-même, on a la majoration $\delta(O) \leq 0$ avec égalité (vu l'absence de naturels strictement négatifs). *Résumé* :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \delta(O) \\ 1 = \delta(I) = \delta(I^-) = \delta(I_-) \\ 2 = \delta(II) = \delta(II_\circ) = \delta(I^\circ) \\ 3 = \delta(III) \end{array} \right. . \text{ On en déduit l'image cherchée}$$

$$\begin{array}{rl} & \operatorname{Im} \delta = \delta(S) = \delta\left(\left\{ O, \quad I, I^-, I, \quad II, II_\circ, II^\circ, \quad III \right\} \right) \\ = & \{\delta(O)\} \cup \left\{ \delta(I), \delta\left(I^-\right), \delta\left(I^-\right) \right\} \cup \{\delta(II), \delta(II_\circ), \delta(II^\circ)\} \cup \{\delta(III)\} \\ = & \{0\} \cup \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \text{ CQFD.} \end{array}$$

2. Afin de nous faire une idée, fixons dans un premier deux sommets à distance mutuelle 1. Soient a, b deux sommets également à distance mutuelle 1. Puisqu'être à distance 1 équivaut à être les extrémités d'une même arête, on peut appliquer au cube une suite d'une ou deux rotations (dont les axes sont définis par les centres de deux faces opposés) qui amène l'arête $[ab]$ sur l'arête fixée[17]. Ainsi, chaque chemin de longueur ℓ reliant a et b devient un chemin de longueur ℓ reliant les sommets fixés, et réciproquement, d'où une correspondance bijective entre les ensembles de ces chemins : il s'ensuit l'égalité de leurs cardinaux. Le nombre $c^\ell \binom{a}{b}$ vaut donc celui où l'on remplacé $\binom{a}{b}$ par un couple formé par les sommets fixés, d'où l'indépendance cherchée[18].

Noter ce fait crucial, sans lequel la correspondance ci-dessus ne fait pas sens : *chaque rotation préserve la relation d'adjacence !*

[15] la place du "$-$" dans les I indique quelle coordonnée est "coiffée", la place du "$\circ$" dans les II indique quelle coordonnée est au contraire préservée

[16] en "poussant" l'un des deux carrés vers le fond ou en le "tirant" vers le devant, on verra le cube de départ se matérialiser dans sa troisième dimension

[17] on ne tient pas compte ici de l'ordre des sommets vu la symétrie des nombres c^ℓ (sinon on pourra toujours composer en plus par une réflexion)

[18] on a utilisé la stratégie "toutes les villes de France seront connectées si chacune d'elles est connectée à la capitale"

Fixons à présent deux sommets à distance mutuelle 2, çàd opposés sur une même face. Adaptons le raisonnement ci-dessus : on peut amener n'importe quelle face sur la face fixée par une rotation bien choisie, puis au besoin une diagonale de cette face sur l'autre diagonale. Il en résulte l'indépendance voulue pour la distance 2.

Fixons enfin deux sommets opposés et soient a, b deux sommets opposés. L'un des deux sommets fixés diffère de b, donc est sur une même face que a : à l'aide d'une rotation autour du centre de cette face, on amène ce sommet sur a. Les rotations préservant la relation "être opposés", l'image de l'*autre* sommet fixé sera opposé à a, çàd vaudra b. Encore une fois, nous obtenons une bijection garante de l'indépendance de $c^3\binom{a}{b}$.

Il reste le cas des chemins revenant à leur sommet de départ. Quand deux sommets de départ-arrivée sont sur une même face, une rotation autour du centre de cette dernière permet de conclure : quand deux tels sommets sont opposés, il suffit d'une rotation de plus pour conclure[19].

3. Être à distance nulle d'un sommet donné équivaut à valoir ce sommet, d'où les égalités

$$\forall i \in I,\ c_i^0 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } i = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \text{, ce qui se récrit } C^0 = (1, 0, 0, 0)\,.$$

4. Soient $a, b \in S$. Un chemin de longueur $n+1$ de a vers b est formé d'une arête de a vers l'un de ses voisins (çàd sommets adjacents) puis d'un chemin de longueur n de ce voisin vers b. En regroupant les chemins de longueur $n+1$ de a vers b selon leur première arête, on obtient l'égalité

$$c^{n+1}\binom{a}{b} = \sum_{v \text{ voisin de } a} c^n \binom{v}{b}$$

et tout va ensuite dépendre de la distance de v à b. Discutons suivant la valeur de la distance $\delta := d\binom{a}{b}$.

Cas $\delta = 0$: chaque voisin de $a = b$ est à distance 1 de b, d'où $c_0^{n+1} = 3c_1^n$.

Cas $\delta = 3$: chaque voisin de a est à distance 2 de b, d'où $c_3^{n+1} = 3c_2^n$.

Cas $\delta = 1$: le sommet a possède pour voisins d'une part b (à distance nulle de b), d'autre part deux sommets à distance 2 de b, d'où l'égalité $c_1^{n+1} = c_0^n + 2c_2^n$.

Cas $\delta = 2$: le sommet a possède pour voisins d'une part le sommet opposé à b (à distance 3 de b), d'autre part deux sommets à distance 1 de b, d'où l'égalité $c_2^{n+1} = c_3^n + 2c_1^n$.

5. Les quatre égalités précédentes se réécrivent matriciellement

$$\begin{pmatrix} c_0^{n+1} \\ c_1^{n+1} \\ c_2^{n+1} \\ c_3^{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{=:M} \begin{pmatrix} c_0^n \\ c_1^n \\ c_2^n \\ c_3^n \end{pmatrix} \text{, çàd } C^{n+1} = MC^n.$$

En désinvoquant momentanément n, on obtient par généralisations les égalités $\forall \ell \in \mathbf{N},\ C^{\ell+1} = MC^\ell$, d'où par une récurrence immédiate $\forall a \in \mathbf{N},\ C^a = M^a C^0$; vu l'égalité $C^0 = e$ obtenue à la question 3, on obtient l'égalité souhaitée en remplaçant a par n (que l'on aura eu le soin de réinvoquer entretemps).

6. Le calcul montre que le vecteur Ae est la première colonne de A. Plus généralement, on retiendra : pour chaques naturels a, b, chaque matrice $A \in M_{a,b}(\mathbf{C})$ et chaque entier $j \in [0, b]$, la j-ième colonne de A peut se récupérer en multipliant A à-droite-par le j-ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{C}^a$.

7. Notons a, b, c, d les coordonnées[20] de la première colonne de P^{-1} (çàd de $P^{-1}e$) et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les coefficients diagonaux de la matrice Λ. Suivant l'exercice précédent, on obtient

$$\begin{aligned} C^n &= M^n e = \left(P\Lambda P^{-1}\right)^n e = P\Lambda^n P^{-1} e = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}^n P^{-1} e \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha^n a \\ \beta^n b \\ \gamma^n c \\ \delta^n d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

[19] on peut aussi également utiliser la symétrie centrale de centre celui du cube, laquelle échange chaques sommets opposés (et préserve bien l'adjacence !)

[20] on oubliera momentanément le sens "application distance" de d, lequel ne nous servira pas dans cette question

8. Soit $r \in \mathbf{R}$. On alors les égalités

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(M + rI_4) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} r & 3 & 0 & 0 \\ 1 & r & 2 & 0 \\ 0 & 2 & r & 1 \\ 0 & 0 & 3 & r \end{pmatrix} \overset{\substack{L_1:\,-rL_2 \\ L_4:\,-rL_3}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 3-r^2 & -2r & 0 \\ 1 & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & 1 \\ 0 & -2r & 3-r^2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3-r^2 & -2r \\ -2r & 3-r^2 \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{tout} \\ \text{opposer}}}{=} 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} r^2-3 & 2r \\ 2r & r^2-3 \end{pmatrix} \\
&\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 - rL_2}{=} 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -6 & 4r - r\left(r^2-3\right) \\ 2r & r^2-3 \end{pmatrix} \overset{C_1:\,\times\frac{1}{2}}{=} 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & 7r - r^3 \\ r & r^2-3 \end{pmatrix} \\
&\overset{L_2 \leftarrow 3L_2 + rL_1}{=} 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & ? \\ 0 & 3\left(r^2-3\right) + r\left(7r - r^3\right) \end{pmatrix} \overset{\substack{\text{tout} \\ \text{opposer}}}{=} 3 + \operatorname{rg}\left(r^4 - 10r^2 + 9\right).
\end{aligned}$$

Le trinôme en r^2 précédent a ses coefficients de somme nulle, donc a 1 pour racine, donc se factorise en

$$r^4 - 10r^2 + 9 = \left(r^2-1\right)\left(r^2-9\right) = (r-1)(r+1)(r-3)(r+3),$$

$$\text{d'où le rang cherché } \operatorname{rg}(M + rI_4) = \begin{cases} 4 \text{ si } r \in \{-3,-1,1,3\} \\ 3 \text{ sinon} \end{cases}.$$

9. Soient $\lambda \in \mathbf{R}$ et $X \in \mathbf{R}^4$. Comme à l'exercice précédent, si $-\lambda$ évite les valeurs ± 1 et ± 3 ci-dessus, alors la matrice $M - \lambda I_4$ sera inversible et l'égalité $MX = \lambda X$, équivalente à la nullité du produit $(M - \lambda I_4) X$, équivaudra à à la nullité de X. Discutons les quatre cas restants. Notons a, b, c, d les coordonnées de X et soit $s \in \{-1, 1\}$. (Observer l'égalité $s^2 = 1$.)

On a d'une part les équivalences

$$\begin{aligned}
& X \text{ est solution de l'équation } MX = sX \\
\iff & \begin{pmatrix} 3b \\ a+2c \\ 2b+d \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa \\ sb \\ sc \\ sd \end{pmatrix} \iff \begin{cases} sa = 3b \\ 2sc = b - sa \\ d = sc - 2b \\ d = 3sc \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3sb \\ sc = -b \\ d = -3b \\ d = -3b \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 3s \\ 1 \\ -s \\ -3 \end{pmatrix} \iff \exists \lambda \in \mathbf{C},\ X = \lambda \begin{pmatrix} 3s \\ 1 \\ -s \\ -3 \end{pmatrix} \iff X \in \mathbf{C} \begin{pmatrix} 3s \\ 1 \\ -s \\ -3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'une part les équivalences

$$\begin{aligned}
& X \text{ est solution de l'équation } MX = 3sX \\
\iff & \begin{pmatrix} 3b \\ a+2c \\ 2b+d \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3sa \\ 3sb \\ 3sc \\ 3sd \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = sb \\ 2c = 3sb - a \\ d = 3sc - 2b \\ d = sc \end{cases} \iff \begin{cases} a = sb \\ c = a \\ d = b \\ d = sc \end{cases} \\
\iff & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \iff \exists \lambda \in \mathbf{C},\ X = \lambda \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix} \iff X \in \mathbf{C} \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

10. Comme à l'exercice précédent, mettre les quatre valeurs ci-dessus dans une matrice diagonale $\Lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et concaténer les vecteurs directeurs ci-dessus (dans l'ordre de la diagonale de Λ) donne une matrice $P := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ telle que $MP = P\Lambda$. Vu ici la taille des matrices, un *sanity check* s'impose !

Il reste à montrer l'inversibilité de P, çàd l'égalité $\operatorname{rg} P = 4$. Effectuons des opérations sur les lignes (appelées ici resp. A, B, C, D) :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{C:\ +B \text{ puis } \times\frac{1}{2} \\ D:\ +3B \text{ puis } \times\frac{1}{4}}}{\overset{A:\ -3B \text{ puis } \times\frac{1}{2}}{=}} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{A:\ +3B+2C}{=} 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 2 = 4.$$

11. Afin d'utiliser l'égalité générale obtenue à la question 7, il ne nous reste plus qu'à déterminer la première colonne de P^{-1}. Nous pourrions inverser directement P et récupérer alors sa première colonne – mais qui franchement a envie d'inverser à la main une matrice 4×4 ? Cela se ferait pourtant fait bien ici mais voyons plutôt comment les matrices de passages pourraient nous alléger le travail.

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et $\mathcal{C}$ la famille des quatre vecteurs directeurs ci-dessus (dans le même ordre que pour former P). En voyant P comme la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$ (au passage, puisque P est inversible, la famille $\mathcal{C}$ est une base), la matrice P^{-1} est alors la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$, donc sa première colonne contient les coefficients de la décomposition du premier vecteur e de $\mathcal{B}$ selon la base $\mathcal{C}$. Par cohérence avec la question 7, appelons a, b, c, d les coordonnées de la première colonne de P^{-1}. On a alors l'égalité

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Résolvons cet système en ne regardant que les matrices, par opérations sur les lignes[21] (appelées ici resp. A, B, C, D) :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{C:\ +B \\ D:\ +3B}}{\overset{A:\ -3B}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -6 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{puis } C:\ \times 4 \\ \text{et } D:\ \times 2}}{\overset{\substack{A:\ +D-C \\ B:\ \times 8 \text{ puis } -2D}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\text{puis } D:\ -C}{\overset{\substack{B:\ +A \\ C:\ +A}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte l'égalité $(a, b, c, d) = \frac{1}{8}(1, -1, 1, -1)$. En abrégeant $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := (1, -1, 3, -3)$ et $s := -(-1)^n$, on obtient finalement les égalités

$$\begin{aligned} C^n &= P\begin{pmatrix} \alpha^n a \\ \beta^n b \\ \gamma^n c \\ \delta^n d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 3^n \\ s3^n \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3(1-s) + 3^n(1-s) \\ (1+s) + 3^n(1+s) \\ 3^n(1-s) + (s-1) \\ 3^n(1+s) - 3(1+s) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} (1-s)(3+3^n) \\ (1+s)(1+3^n) \\ (1-s)(3^n-1) \\ (1+s)(3^n-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \frac{1-s}{2}\,3\left(1+3^{n-1}\right) \\ \frac{1+s}{2}\,(1+3^n) \\ \frac{1-s}{2}\,(3^n-1) \\ \frac{1+s}{2}\,3\left(3^{n-1}-1\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les égalités souhaitées découlent alors de celles $\left(\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}\right) = \begin{cases} (1,0) & \text{si } n \text{ est pair} \\ (0,1) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

12. *Sanity checks*

(a) Remplacer n par 0 à la question 11 donne

$$C^0 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+3^0 \\ 0 \\ 3^0-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ce qui correspond à la question 3.}$$

[21] On est en fait en train d'inverser P ! À ceci près que la matrice de droite n'est pas I_4 mais e, ce qui allège considérablement les calculs à droite.

(b) Soit $N \in \mathbf{N}$. Montrons que $3^N - 1$ est un multiple de 4 lorsque N est pair. Il en résultera l'intégralité des fractions $\frac{3^n-1}{4}$ et $\frac{3^{n-1}-1}{4}$ ci-dessus quand n est resp. pair et impair. Il suffit de développer le binôme

$$3^N - 1 = (4-1)^N - 1 = \underbrace{\left(\overbrace{\sum_{p=1}^{N} \underbrace{\binom{N}{p} 4^p (-1)^{N-p}}_{\text{multiple de 4 car } p\in\mathbf{N}^*}}^{\text{multiple de 4}}\right) + \underbrace{4^0 - 1}_{=0}}_{\text{multiple de 4}}.$$

On montrerait de même que $3^N + 1$ est divisible par 4 lorsque N est impair, d'où l'intégralité des fractions $\frac{3^{n-1}+1}{4}$ et $\frac{3^n+1}{4}$ ci-dessus.

(c) À chaque sommet (du cube), associons un signe (çàd une parité) qui changera entre deux sommets adjacents. Par exemple, l'application $\Sigma := \begin{cases} S & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ (a, b, c) & \longmapsto & (-1)^{a+b+c} \end{cases}$ fait sens (car les coordonnées a, b, c de chaque sommet sont entières) et vérifie ce que l'on veut puisque la somme $a+b+c$ varie de 1 en module entre deux sommets adjacents (le signe $(-1)^{a+b+c}$ variant subséquemment de -1).

Soient à présent s, t deux sommets, $\ell \in \mathbf{N}$ une longueur et $(s = s_0, s_1, s_2, ..., s_\ell = t)$ un chemin de longueur ℓ allant de s à t. Pour chaque entier $i \in [0, \ell[$, l'adjacence des sommets s_i et s_{i+1} livre l'égalité $\Sigma(s_{i+1}) = -\Sigma(s_i)$, d'où (par une récurrence immédiate) l'égalité $\Sigma(s_\ell) = (-1)^\ell \Sigma(s_0)$, laquelle (après multiplication par $(-1)^\ell \Sigma(s_\ell)$) se réécrit

$$(-1)^\ell = \Sigma(s) \Sigma(t).$$

Le membre de droite de cette égalité ne dépendant que de s et t, celle-ci montre que la parité de la longueur de chaque chemin de s à t ne dépend pas du chemin "choisi" ; or il existe un tel chemin de longueur $d\binom{s}{t}$ (par définition de cette distance), donc cette parité est celle de la distance $d\binom{s}{t}$. Cela explique (à $n \in \mathbf{N}$ fixé) la nullité de c_ℓ^n dès que n et ℓ n'ont pas même parité.