Devoir maison
(matrices)

à rendre le mardi 5 mai 2020 le soir **à minuit**

De l'inversibilité. (19pts)

Soit $n \in \mathbf{N}$, soient $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, notons g l'application $\left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}\right.$.

1. *Établir les équivalences (on pourra utiliser le théorème du rang)*

$$g \text{ est injective} \iff g \text{ est surjective} \iff g \text{ est bijective} \iff A \text{ est inversible.}$$

2. *Même question en remplaçant g par l'application $d := \left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & MA \end{array}\right.$.*
3. *En déduire que l'application $\left\{\begin{array}{ccc} M_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & M_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & AMB \end{array}\right.$ est surjective ssi les matrices A et B sont inversibles.*
4. *Même question en remplaçant « surjective » par « injective » (resp. « bijective »).*
5. *Motiver les noms choisis pour g et d.*

Un calcul de puissance. (21pts)

On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On souhaite décrire sa puissance quatre-vingt-dix-neuvième.

1. (a) *Calculer A^2, A^4 et A^8. En déduire l'intérêt de définir $B := \frac{A}{\sqrt{2}}$.*
   (b) *Ramener le calcul de A^{99} à celui de B^3 et conclure.*
2. (a) *Déterminer le rang $\operatorname{rg}(A + cI_2)$ pour chaque complexe c.*
   (b) *Résoudre pour chaque complexe λ l'équation $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbf{C}^2$ (vecteur colonne).*
   (c) *À l'aide des solutions ci-dessus, construire une matrice P inversible et une matrice diagonale Λ telles que $AP = P\Lambda$.*
   (d) *Conclure à nouveau.*

Une utilisation des matrices en combinatoire. (44pts)

Considérons le cube $[0,1]^3$ de l'espace $\mathbf{R}^3$, dont l'ensemble des sommets sera noté $S := \{0,1\}^3$. On gagnera à penser ce cube en "vision fil de fer" – ses faces ne nous importeront pas. Pour chaque couple $\binom{a}{b} \in S^2$ et chaque naturel ℓ, on note $c^\ell\binom{a}{b}$ le nombre de chemins allant du sommet a au sommet b en parcourant exactement ℓ arêtes du cube $[0,1]^3$ (répétitions et aller-retours permis) et on note $d\binom{a}{b}$ la plus petite longueur d'un chemin allant du sommet a au sommet b (appelée ***distance*** de a à b).

1. *Quelle l'image de l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} S^2 & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ \binom{a}{b} & \longmapsto & d\binom{a}{b} \end{array}\right.$ *?*

   Cette image sera notée I par la suite et son cardinal $q := \operatorname{Card} I$.

2. *Soit $\ell \in \mathbf{N}$. Expliquer pourquoi les nombres $c^\ell\binom{a}{b}$ lorsque $\binom{a}{b}$ décrit S^2 ne dépendent que de la distance $d\binom{a}{b}$.*

   Pour chaques naturels d et ℓ, on notera c_d^ℓ la valeur commune des $c^\ell\binom{a}{b}$ où $\binom{a}{b}$ est n'importe quel couple de sommets de notre cube situés à distance d l'un de l'autre.

   Pour chaque naturel n, on note C^n le vecteur colonne $(c_i^n)_{i\in I}$.

3. *Que vaut C^0 ?*

   On invoque jusqu'à la fin du sujet un naturel n.

4. *Soit $i \in I$. En considérant la dernière arête d'un chemin, exprimer c_i^{n+1} en fonctions des c_j^n pour j décrivant I.*

5. *En déduire une matrice M telle que $C^n = M^n e$ où e est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^q$.*

6. *Soit $A \in M_q(\mathbf{C})$: décrire simplement le vecteur Ae.*

7. *On suppose qu'il y a (et on invoque) deux matrices $P, \Lambda \in M_q(\mathbf{C})$ resp. inversible et diagonale telles que $M = P\Lambda P^{-1}$. Exprimer alors C^n en fonction des coefficients diagonaux de Λ et de la première colonne de P^{-1}.*

   Nous allons à présent justifier l'existence de matrices P et Λ comme ci-dessus.

8. *Déterminer pour chaque réel r le rang* $\operatorname{rg}(M + rI_q)$.

9. *Résoudre pour chaque réel λ l'équation $MX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbf{R}^q$ (vecteur colonne).*

10. *À l'aide des solutions ci-dessus, construire une matrice P inversible et une matrice diagonale Λ telles que $MP = P\Lambda$.*

11. Conclure à l'égalité $C^n = \begin{pmatrix} 3\frac{3^{n-1}+1}{4} \\ 0 \\ \frac{3^n-1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ si n est pair et $C^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3^n+1}{4} \\ 0 \\ 3\frac{3^{n-1}-1}{4} \end{pmatrix}$ si n est impair.

12. *Sanity checks*

    (a) Retrouve-t-on la valeur de C^0 ?

    (b) Vérifier que les fractions ci-dessus sont toutes entières.

    (c) Donner un invariant qui explique la présence des zéros.