Devoir d'algèbre linéaire

jeudi 12 mars 2020

Solution proposée.

Cours. Soit $n \in \mathbf{N}$, soit E un s.-e. v. de $\mathbf{R}^n$, soit $P \subset E$.

1. Soit a une famille finie d'éléments de E, notons ℓ sa longueur. [Alternative : soit $\ell \in \mathbf{N}$, soit $a \in E^\ell$.] On appelle ***combinaison linéaire*** de la famille a chaque vecteur de la forme $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i a_i$ où λ est un ℓ-uplet de scalaires (c.-à.-d. un élément de $\mathbf{R}^\ell$). **Remarque** (cas pathologique *borderline*) : lorsque $n = 0$, une telle combinaison linéaire vaut la somme vide, c.-à.-d. le neutre pour l'addition, c.-à.-d. le vecteur nul.

   La partie P est qualifiée de ***stable par combinaison linéaire*** si chaque combinaison linéaire de chaque famille (finie) d'éléments de P reste dans P, c.-à.-d. si l'on a les appartenances

$$\forall \ell \in \mathbf{N}, \quad \begin{matrix} \forall p \in P^\ell \\ \forall \lambda \in \mathbf{R}^\ell \end{matrix}, \ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i \in P.$$

   On appelle ***s.-e. v.*** de E chaque partie de E non vide qui est stable par combinaison linéaire.

   On appelle ***s.-e. v. engendré par*** P l'ensemble des combinaison linéaires des familles (finies) d'éléments de P.

2. **Précision.** Par "autres" (coordonnées), l'énoncé veut en fait dire "coordonnées dont l'*indice* est autre" ! En effet, dans une famille constante, il n'y a pas d'"autre" vecteur (tous les vecteurs sont égaux !) mais on peut "distinguer" les coordonnées (ce qui n'a *stricto sensu* aucun sens puisqu'elle sont égales) en distinguant leurs *indices*[1].

   Nous proposons deux rédaction extrêmes, l'une lâche (modèle), l'autre hyper-détaillée contenant tout ce qui devrait pouvoir être écrit si l'on demandait de préciser un point de la première rédaction.

   Un équilibre est à trouver entre les deux :
   pas trop lâche sinon on perd le contrôle et on risque dire n'importe quoi
   (et – pire – de s'en convaincre !) ;
   pas trop serrée sinon la longueur des preuves explose.

   Il s'agit donc de *faire sentir* à la lectrice qu'on contrôle sans forcément expliciter le contrôle en question.

   Soit a une famille d'éléments de E dont on note ℓ la longueur. Montrons l'équivalence voulue par double-implication.

   (a) $\boxed{\Longrightarrow}$ (sens direct)

      i. **Rédaction lâche.** Supposons la famille a libre. On peut alors invoquer un indice p entre 1 et ℓ tel que $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i a_i = 0$ et $\lambda_p \neq 0$. Quitte à réindexer la famille a, on peut rétrospectivement imposer[2] $p = \ell$. La nullité de la somme précédente se réécrit alors $a_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-1} -\frac{\lambda_i}{\lambda_p} a_i$, ce qui montre que le vecteur a_p est combinaison linéaire des autres.

      ii. **Rédaction hyper-détaillée.** Notons I le segment entier $[1, \ell] \cap \mathbf{N}$. Supposons la liaison de la famille a, c.-à.-d.

$$\text{la négation } \neg \left[\forall \lambda \in \mathbf{R}^\ell,\ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i a_i = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \right], \text{ laquelle}$$

$$\text{équivaut à l'existence } \exists \lambda \in \mathbf{R}^\ell,\ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i a_i = 0 \text{ et } \lambda \neq 0.$$

      Soit un tel λ. Ne s'agissant pas de la famille nulle, on a la négation $\neg [\forall p \in I,\ \lambda_p = 0]$, c.-à.-d.

$$\text{l'existence } \exists p \in I,\ \lambda_p \neq 0.$$

[1] C'est comme pour les suites : on parle souvent de plusieurs *termes* a_p, a_q, a_r... d'une suite a pour parler en fait de termes correspondant à plusieurs *indices*.

[2] Il ne s'agit pas d'une *sup*position mais d'une *im*position. En effet, quand on invoque, on *im*pose une condition que l'on peut utiliser sans réserve. L'éventuelle question qui pourrait se poser est de savoir si une telle invocation est légitime, pas si on peut supposer la condition (on peut toujours supposer n'importe quoi ! tout dépend ce qu'on en fait).

Soit un tel p. Vu l'appartenance $p \in [1, \ell]$, ce dernier segment n'est pas vide, donc la longueur ℓ n'est pas nulle, d'où (car ℓ est entier) la positivité $\ell - 1 \geq 0$. En introduisant la permutation

$$\pi := \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longmapsto & I \\ i & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} i \text{ si } i < p \\ i+1 \text{ si } p \leq i < \ell \\ p \text{ si } i = \ell \end{array} \right. \end{array} \right. = (1, 2, ..., p-1, \quad p+1, p+2, ..., \ell, \quad p)$$

(qui déplace simplement l'indice p tout à la fin) puis

$$\text{les familles } \left\{ \begin{array}{l} a' := \left(a_{\pi(i)}\right)_{i=1,2...,\ell} = (a_1, a_2, ..., a_{p-1}, \quad a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_\ell, \quad a_p) \\ \lambda' := \left(\lambda_{\pi(i)}\right)_{i=1,2...,\ell} = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{p-1}, \quad \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, ..., \lambda_\ell, \quad \lambda_p) \end{array} \right. ,$$

on a les égalités

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\ell} \lambda'_i a'_i & \underset{\text{en trois "paquets"}}{\overset{\text{découpage de la somme}}{=}} \sum_{i=1}^{p-1} \lambda'_i a'_i + \left(\sum_{i=p}^{\ell-1} \lambda'_i a'_i \right) + \lambda'_\ell a'_\ell \\
& \underset{\text{revenant aux définitions}}{\overset{\text{retirer les primes en}}{=}} \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i a_i + \left(\sum_{i=p}^{\ell-1} \lambda_{i+1} a_{i+1} \right) + \lambda_p a_p \\
& \underset{\substack{\text{grâce à la commutativité} \\ \text{de l'addition}}}{\overset{\substack{\text{permuter les deuxième} \\ \text{et troisième termes}}}{=}} \left(\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i a_i \right) + \lambda_p a_p + \sum_{i=p}^{\ell-1} \lambda_{i+1} a_{i+1} \\
& \underset{\text{de la deuxième somme}}{\overset{\text{réindexation } j:=i+1}{=}} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i + \sum_{j=p+1}^{\ell} \lambda_j a_j \\
& \underset{\text{de la deuxième somme}}{\overset{\text{renommage de l'indice}}{=}} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i + \sum_{i=p+1}^{\ell} \lambda_i a_i \\
& \underset{\text{deux "paquets"}}{\overset{\text{regroupement des}}{=}} \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i a_i \\
& \underset{\text{l'invocation de } \lambda}{\overset{\text{hypothèse venant avec}}{=}} 0.
\end{aligned}$$

Isoler le dernier terme de la somme va alors livrer les égalités

$$\begin{aligned}
a_p &= \frac{\lambda_p a_p}{\lambda_p} \quad \text{(légitime vu l'hypothèse } \lambda_p \neq 0\text{)} \\
&= \frac{\lambda'_\ell a'_\ell}{\lambda_p} \quad \text{(renommer pour se ramener au cas où } p = \ell\text{)} \\
&= \frac{1}{\lambda_p} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \lambda'_i a'_i - \sum_{i=1}^{\ell-1} \lambda'_i a'_i \right) \quad \text{(télescopage des deux sommes)} \\
&= \frac{1}{\lambda_p} \left(0 - \sum_{i=1}^{\ell-1} \lambda'_i a'_i \right) \quad \text{(calcul précédent)} \\
&= \sum_{i=1}^{\ell-1} -\frac{\lambda'_i}{\lambda_p} a_{\pi(i)} \quad \text{(réécriture sous forme d'une combinaison linéaire)}
\end{aligned}$$

ce qui montre que le vecteur a_p est combinaison linéaire de la famille $\left(a_{\pi(i)}\right)_{i=1,2,...,\ell-1}$.

Il reste pour conclure à montrer que l'indice $\pi(i)$ ne vaut $\pi(p)$ pour aucun entier $i \neq p$. Nous allons pour cela exhiber une application σ de I dans lui-même telle que $\forall i \in I, \ \sigma(\pi(i)) = i$: si l'on y parvient, appliquer un tel σ sur une égalité $\pi(i) = \pi(p)$ donnera $\sigma(\pi(i)) = \sigma(\pi(p))$, c.-à.-d. $i = p$, d'où la conclusion.

La condition souhaitée sur σ revient à "défaire" l'action de la permutation π : puisque cette dernière déplace le p-ième élément tout à la fin, cette action sera annulée par l'acte consistant à mettre le dernier élément à la p-ième place, ce qui nous incite à définir :

$$\sigma := \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longmapsto & I \\ i & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} i \text{ si } i < p \\ \ell \text{ si } i = p \\ p-1 \text{ si } p < i \leq \ell \end{array} \right. \end{array} \right. = (1, 2, ..., p-1, \quad \ell, \quad p, p+1, ..., \ell-1).$$

Soit enfin $i \in I$ et discutons selon les cas.

A. Si $i < p$, on a alors $\pi(i) = i$, indice qui reste dans l'intervalle $[1, p[$, d'où $\sigma(i) = i$.

B. Si $p \leq i < \ell$, on a alors $\pi(i) = i+1$, indice qui tombe dans $]p, \ell]$, d'où $\sigma(i+1) = (i+1)-1 = i$.

C. Si enfin $i = \ell$, on a alors $\pi(i) = p$ dont l'image par σ vaut ℓ.

Dans les trois cas, on obtient l'égalité $\sigma(\pi(i)) = i$, ce qui conclut.

(b) $\boxed{\Longleftarrow}$ (sens réciproque)

i. **Rédaction lâche.** Supposons que l'une des coordonnées de la famille a soit combinaison linéaire des "autres". Quitte à réindexer la famille a, on peut toujours imposer que c'est la ℓ-ième coordonnée, d'où l'existence d'une famille de scalaires $\lambda \in \mathbf{R}^{\ell-1}$ telle que $a_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-1} \lambda_i a_i$. En définissant $\lambda_\ell := -1$ (qui est non nul), l'égalité précédente se réécrit $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i a_i = 0$, d'où la liaison cherchée vu que la famille $(\lambda_i)_{i=1,...,\ell}$ n'est pas nulle

ii. **Rédaction un peu détaillée**. Reprenons la notation I précédente. Soit $p \in I$ tel que $a_p \in \operatorname{Vect}_{j \in J} a_j$ où l'on a noté $J := I \setminus \{p\}$, soit $\lambda \in \mathbf{R}^J$ tel que $a_p = \sum_{j \in J} \lambda_j a_j$ et définissons $\mu := \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longmapsto & I \\ i & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i \text{ si } i \neq p \\ -1 \text{ si } i = p \end{array} \right. \end{array} \right.$: on a alors les égalités

$$\sum_{i \in I} \mu_i a_i = \mu_p a_p + \sum_{i \in I \setminus \{p\}} \mu_i a_i = -a_p + \sum_{j \in J} \lambda_j a_j = 0.$$

La famille μ étant par ailleurs non nulle (car $\mu_p = -1$), on vient d'établir la liaison de la famille a.

3. Soient I et E deux ensembles. Une famille d'éléments de E indexée par I est simplement (et par définition) une application de source I à valeurs dans E, c.-à.-d. un élément de E^I. Soit e un tel élément. Il est aussi noté $(e_i)_{i \in I}$. Or

"appartenir à une application" ne veut rien dire, donc
aucune application n'a d'élément !
En particulier la famille e. Point barre.

Il est en revanche tout à fait sensé de parler de l'appartenance à *l'image* $\{e_i\}_{i \in I}$ de l'application e (les éléments de cette image étant précisément les e_i lorsque i décrit I) et c'est en ce sens que l'on parle abusivement d'"élément" de la famille e.

Lorsque I est un segment (fini) formé d'entiers consécutifs démarrant à 1, l'ensemble E^I s'identifie alors la puissance E^n (où $n := \operatorname{Card} I$), dont les éléments sont les n-uplets d'éléments de E. Or ces derniers, quand on les écrit extensivement $(e_1, e_2, ..., e_n)$ ont bien des *coordonnées*, chacune indexée par un entier du segment $[1, n]$.

Plus généralement, une coordonnée d'une famille est simplement (et par définition) une image par l'application définissant la famille. Donc

les coordonnées de la famille e sont les éléments de *l'image* de la famille e.

De la même façon, dans le cas où I est fini (et toujours en notant n son cardinal), les n-uplets d'éléments de E ont une *longueur*, définie par le nombre n d'indices, et leur image ont un *cardinal*, qui vaut au plus n mais pourrait valoir moins (par exemple si la famille e est constante).

Bonus : aviez-vous remarqué que nous avons utilisé lors d'invocations deux lettres (E et n) dont le sens avait *déjà* été donné en début de partie ? C'est évidemment à proscrire et nous suggérons par exemple de remplacer E, e, n resp. par A, a, ℓ.

4. Le s.-e. v. engendré par P est noté

$$\operatorname{Vect} P := \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i \ ; \ \ell \in \mathbf{N} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} p \in P^\ell \\ \lambda \in \mathbf{R}^\ell \end{array} \right. \right\}.$$

Montrons qu'il s'agit du plus petit s.-e. v. de E contenant P, où "plus petit" est à comprendre au sens de l'inclusion $\subset$.

Montrons que $\operatorname{Vect} P$ contient P. Soit $\pi \in P$: en imposant[3] $n = 1$ et en définissant deux familles $\left\{ \begin{array}{l} p := (\pi) \in P^n \\ \lambda := (1) \in \mathbf{R}^n \end{array} \right.$, on a les égalités et appartenance

$$\pi = 1\pi = \lambda_1 p_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \in \operatorname{Vect} P, \qquad \text{d'où l'inclusion } P \subset \operatorname{Vect} P.$$

Montrons ensuite que $\operatorname{Vect} P$ est un s.-e. v. de E. Soit α un scalaire, soient[4] $c, d \in \operatorname{Vect} P$, soient $\ell, m \in \mathbf{N}$, soient $\left\{ \begin{array}{l} p \in P^\ell \\ \lambda \in \mathbf{R}^\ell \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} q \in P^m \\ \mu \in \mathbf{R}^m \end{array} \right.$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} c = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i \\ d = \sum_{i=1}^{m} \mu_i q_i \end{array} \right.$. En imposant $n = \ell + m$ puis en définissant

$$\text{deux familles } \left\{ \begin{array}{l} r := (p_1, p_2, ..., p_\ell, \quad q_1, q_2, ..., q_m) \in P^n \\ \nu := (\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, ..., \alpha\lambda_\ell, \quad \mu_1, \mu_2, ..., \mu_m) \in \mathbf{R}^n \end{array} \right. ,$$

on a alors les égalités et appartenance

$$\alpha c + d = \alpha \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i + \sum_{i=1}^{\ell} \mu_i q_i = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{\alpha \lambda_i p_i}_{=\nu_i r_i} + \sum_{i=\ell+1}^{n} \underbrace{\mu_{i-\ell} q_{i-\ell}}_{=\nu_i r_i} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i r_i \in \operatorname{Vect} E,$$

d'où la stabilité annoncée.

Montrons enfin que chaque s.-e. v. de E contenant P contient $\operatorname{Vect} P$, ce qui conclura. Soit S un tel s.-e. v. et montrons l'inclusion $\operatorname{Vect} P \subset S$. Soit $c \in \operatorname{Vect} P$, soient $\ell \in \mathbf{N}$ et $\left\{ \begin{array}{l} p \in P^\ell \\ \lambda \in \mathbf{R}^\ell \end{array} \right.$ tels que $s = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i$. Vu l'inclusion $P \subset S$, on a l'appartenance $p \in S^\ell$. Le s.-e. v. S étant par ailleurs est stable par combinaison linéaire, on a l'appartenance $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i p_i \in S$, c.-à.-d. $c \in S$ comme voulu.

Quizz.

1. (a) Oui. Montrons plus précisément la liaison de chaque famille (finie) ayant deux coordonnées identiques. Soit a une telle famille dont on note I l'ensemble indexant, soient $p \neq q$ deux indices dans I tels que $a_p = a_q$, notons λ la famille de scalaires de source I telle que $\binom{\lambda_p}{\lambda_q} := \binom{1}{-1}$ et qui est nulle ailleurs sur I. On a alors d'une part la non-nullité de la famille λ, d'autre part les égalités $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0 + \sum_{i \in \{p,q\}} \lambda_i a_i = 1a_p - 1a_q = 0$, ce qui conclut.

   (b) Oui. Montrons plus précisément la liaison de chaque famille (finie) ayant une coordonnée nulle. Soit a une telle famille dont on note I l'ensemble indexant, soit $p \in I$ tel que $a_p = 0$, notons λ la famille de scalaires de source I qui est partout nulle sauf en p où l'on définit $\lambda_p := 1$. On a alors d'une part la non-nullité de la famille λ, d'autre part les égalités $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i = 0 + \sum_{i \in \{p\}} \lambda_i a_i = 1a_p = a_p = 0$, ce qui conclut.

2. (a) Non et non, comme le montrent les questions 1a et 1b.

   (b) Oui et oui. *Idée 1* : redoubler un élément ne change pas l'image de la famille, donc ne change pas le s.-e. v. engendré, donc conserve le caractère générateur. *Idée 2* : rajouter le vecteur nul ne change pas les combinaisons linéaires, donc ne change pas le s.-e. v. engendré, d'où la même conclusion.

   Mise en œuvre (idée 1, cas fini). Soit g une famille génératrice (finie) de S dont on note ℓ la longueur. Définissons $g_0 := 0$. La famille $(g_1, g_2, ..., g_\ell, g_\ell, g_\ell)$ d'éléments de S est alors de longueur $\ell + 2$ (on a "retriplé" le dernier vecteur) et a même image $\{g_1, g_2, ..., g_\ell, g_\ell, g_\ell\} = \{g_i\}_{i=1,...,\ell}$ que g,

[3] Cette imposition (rétrospective) permet d'éviter d'introduire un nouveau nom (nous aurions sinon *défini* par exemple $\delta := 1$). Autant utiliser un nom déjà disponible, à condition d'avoir les idées claires sur ce qu'on fait.

[4] c comme **C**ombinaison linéaire

donc a même s.-e. v. engendré $\operatorname{Vect}_{i=1}^{\ell} g_i = S$. Cette famille comporte par ailleurs deux vecteurs égaux (le dernier et l'avant-dernier), même si $\ell = 0$ (cas pris en compte par notre définition de g_0).

Mise en œuvre (cas général, idées 1 & 2). Soit G une partie génératrice de S (c.-à.-d. une partie de $\mathbf{R}^e$ telle que $\operatorname{Vect} G = S$). Rajouter 0 à une combinaison linéaire d'éléments de G ne changeant pas cette combinaison linéaire, rajouter 0 à G ne change pas son s.-e. v. engendré, ce qui permet d'imposer l'appartenance $0 \in G$. Notons ensuite $\spadesuit$ le vecteur nul de $\mathbf{R}^{e+1}$ (son seul intérêt pour nous est de ne pas appartenir à G) puis $I := G \cup \{\spadesuit\}$ et enfin $\gamma := \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ i & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} i \text{ si } i \in G \\ 0 \text{ si } i = \spadesuit \end{array} \right. \end{array} \right.$ (*idée* : "redoubler" l'élément $0 \in G$). La famille γ a alors pour image

$$\gamma(I) = \gamma(G \cup \{\spadesuit\}) = \gamma(G) \cup \gamma(\{\spadesuit\}) = \underbrace{\{\gamma_g \; ; \; g \in G\}}_{=G} \cup \underbrace{\{\gamma_\spadesuit\}}_{=\{0\}} \overset{0 \in G}{=} G,$$

donc engendre $\operatorname{Vect} G = S$. Cette famille comporte par ailleurs le vecteur nul à deux reprises : $\gamma_0 = 0 = \gamma_\spadesuit$.

3. (a) Non. Le vecteur nul tombe dans S (car ce dernier est un s.-e. v.), donc le couple $(0, 0)$ tombe dans S^2 or il n'est pas libre d'après la question 1a.

   (b) **Cas "liée".** Oui. Le cas où $S = \{0\}$ suffit, l'unique élément de S^2 étant alors la famille liée $(0, 0)$.

   Montrons que c'est aussi le cas quand le s.-e. v. S est une droite. Soit $s \neq 0$ tel que $S = \operatorname{Vect} s = \mathbf{R}s$, soit $c \in S^2$, soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que $c = (\lambda s, \mu s)$: la liaison de la famille c résulte alors de la nullité de la combinaison $\mu(\lambda s) + (-\lambda)(\mu s)$.

   Montrons enfin que nous avons décrit tous les cas possibles. Supposons donc la liaison de chaque élément de S^2. Si $S = \{0\}$, on a terminé. Supposons maintenant $S \neq \{0\}$, soit $\sigma \in S$ non nul et montrons que S est la droite $D := \mathbf{R}\sigma$, par double-inclusion.

   $\boxed{\supset}$ Soit $d \in D$, soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $d = \lambda\sigma$: le s.-e. v. S étant stable par combinaison linéaire, la combinaison $\lambda\sigma$ reste dans S, d'où l'appartenance $d \in S$.

   $\boxed{\subset}$ Soit $s \in S$: le couple (s, σ) étant lié, on peut invoquer deux scalaires λ, μ non tous les deux nuls tels que $\lambda s + \mu\sigma = 0$; si $\lambda = 0$, on a alors $\mu \neq 0$ et multiplier par $\frac{1}{\mu}$ livre les égalités $0 = \frac{1}{\mu}0 = \frac{1}{\mu}(\lambda s + \mu\sigma) = \frac{1}{\mu}(0 + \mu\sigma) = \sigma$, contredisant la non-nullité de σ imposée ; le scalaire λ est donc non nul et l'on obtient les égalité et appartenance $s = \left(-\frac{\mu}{\lambda}\right)\sigma \in \mathbf{R}\sigma = D$, ce qui conclut.

   Cas "génératrice de S". Oui. Le cas où $S = \{0\}$ suffit encore, l'unique élément $(0, 0) \in S^2$ engendrant alors le s.-e. v. $\operatorname{Vect}\{0, 0\} = \{0\} = S$.

   Réciproquement, si chaque élément de S^2 engendre S, alors le couple $(0, 0)$ engendre S, d'où les égalités $S := \operatorname{Vect}\{0, 0\} = \{0\}$; ce qui montre que la nullité de S était le seul cas possible.

4. Ca dépend ! Pour chacune des quatre familles à étudier, si s est nul, la réponse est alors toujours "non" en vertu de la question 1b. On supposera donc à présent $s \neq 0$.

   Montrons la liberté de la famille (s). Supposons $s \neq 0$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\lambda s = 0$. Si $\lambda \neq 0$, diviser par λ mène droit à la contradiction $s = 0$, d'où (par l'absurde) la nullité de λ, CQFD.

   Le même raisonnement conduirait à la liberté des familles $(18s)$, $(42s)$ et plus généralement de la famille (αs) pour chaque scalaire $\alpha \neq 0$ (diviser par $\alpha\lambda$).

   Enfin, la liaison de la famille $(18s, 42s)$ découle de la nullité de la combinaison linéaire $42(18s) + (-18)(42s)$ (c'est un cas particulier de ce qu'on a établi au paragraphe $\boxed{\subset}$ précédent)

5. Chaque combinaison linéaire nulle d'éléments de S étant nulle (!), ces combinaisons linéaires sont égales (au vecteur nul) et ne sauraient prendre cinq valeurs (ni deux ni trois ni quatre, d'ailleurs).

Sur le terrain. Rappelons que les vecteurs a, b et c valent resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Aucun des vecteurs a, b, c n'étant nul, aucune des familles (a), (b), (c) n'est liée d'après la question 4 du quizz. Montrons par ailleurs que les trois couples à étudier forment autant de familles libres. Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Imposons $\lambda a + \mu b = 0$. Lire les ordonnées donne $0 + 2\mu = 0$, d'où $\mu = 0$, puis lire les abcisses donne $\lambda 1 + 0 = 0$, c.-à.-d. $\lambda = 0$.

Imposons $\lambda a + \mu c = 0$. Les ordonnées livrent l'égalité $0 + \mu = 0$, d'où $\mu = 0$, puis les abscisses donnent encore $\lambda 1 + 0 = 0$ et $\lambda = 0$.

Imposons $\lambda b + \mu c = 0$. Lire les ordonnées donne $\mu = -2\lambda$, d'où en lisant les cotes l'égalité $\lambda 5 + (-2\lambda)\, 3 = 0$, c.-à.-d. $-\lambda = 0$, ou encore $\lambda = 0$.

2. Nous pouvons décrire T par l'égalité

$$T = \left\{(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbf{R}^3 \; ; \; \lambda a + \mu b + \nu c = 0\right\},$$

ce qui se lit mécaniquement en

« té égale l'ensemble des triplets lambda-mu-nu éléments de ère trois tels que lambda a plus mu bé plus nu cé égale zéro »

ou de façon moins mécanique en

« T est l'ensemble des triplets réels (λ, μ, ν) tels que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$ ».

3. Supposons l'inclusion $T \subset S$. Le triplet nul étant trivialement élément de T, on peut affirmer

$$(0,0,0) \in T \subset S \subset \mathbf{R}^e, \text{ d'où l'appartenance } (0,0,0) \in \mathbf{R}^e \text{ et l'égalité } e = 3.$$

4. Exhibons directement une famille libre engendrant T, ce qui anticipera sur la question 5. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ et notons t le triplet (λ, μ, ν). On a alors les équivalences

$$t \in T \iff \lambda a + \mu b + \nu c = 0 \iff \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + 7\mu + 4\nu = 0 \\ 2\mu + \nu = 0 \\ \lambda + 5\mu + 3\nu = 0 \\ 2\lambda + 8\mu + 5\nu = 0 \end{cases} \underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\overset{\text{échange}}{\iff}} \begin{cases} \nu = -2\mu \\ \lambda + 7\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda + 5\mu + 3\nu = 0 \\ 2\lambda + 8\mu + 5\nu = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{dans } L_1, L_2, L_3}{\overset{\text{remplacer } \nu}{\iff}} \begin{cases} \nu = -2\mu \\ \lambda + (7 - 2\cdot 4)\,\mu = 0 \\ \lambda + (5 - 2\cdot 3)\,\mu = 0 \\ 2\lambda + (8 - 2\cdot 5)\,\mu = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \nu = -2\mu \\ \lambda - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \\ 2\lambda - 2\mu = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\text{équivalentes}}{\overset{L_1,\, L_2 \text{ et } L_3}{\iff}} \begin{cases} \nu = -2\mu \\ \lambda = \mu \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ -2\mu \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{paramètre}}{\overset{\text{choix d'un}}{\iff}} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \underset{\text{des éléments de } T}{\overset{\text{retour à la forme horizontale}}{\iff}} (\lambda, \mu, \nu) = \mu \underbrace{(1, 1, -2)}_{\text{abrégé } \tau}$$

$$\iff t = \mu\tau \underset{\text{de la question !}}{\overset{\text{l'équivalence la plus importante}}{\iff}} \exists \alpha \in \mathbf{R},\ t = \mu\tau \iff t \in \mathbf{R}\tau,$$

d'où l'égalité $T = \mathbf{R}\tau$. La partie T de $\mathbf{R}^3$ est par conséquent un s.-e. v. de $\mathbf{R}^3$: celui engendré par τ.

5. Le vecteur τ étant non nul, la famille (τ) est libre (*cf.* question 4 du quizz). Comme elle engendre T (d'après la question 4), elle en est une base.

6. La base (τ) est de longueur finie valant 1, donc le s.-e. v. T est de dimension 1 : c'est la droite (vectorielle) engendrée par le vecteur τ.

7. Remonter les équivalences ci-dessus donne l'égalité $a + b - 2c = 0$, d'où la liaison de la famille (a, b, c).

Remarque géométrique : la liaison précédente se réécrit $c = \frac{a+b}{2}$, ce qui montre – en voyant les vecteurs de $\mathbf{R}^4$ comme des points – que le point c est le milieu du segment $[ab]$.

Remarque génétique : pour créer un tel exercice, on prend deux vecteurs pas trop moches, on en calcule une combinaison linéaire avec des coefficients pas trop compliqués puis on mélange l'ordre des vecteurs obtenus. Servir.