Devoir d'algèbre linéaire

jeudi 12 mars 2020

Dans tout le sujet, l'abréviation "s.-e. v." remplacera "sous-espace vectoriel".

Soit e un entier positif, soit S un s.-e. v. de $\mathbf{R}^e$.

Cours. Dans ces questions, à vous de poser un cadre pour donner du sens à ce qui est écrit.

1. Définir "combinaison linéaire", "stable par combinaison linéaire", "s.-e. v." et "s.-e. v. engendré".
2. Montrer qu'une famille (finie) est liée ssi l'une de ses coordonnées est combinaison linéaire des "autres".
3. Pourquoi dit-on "coordonnée d'une famille" et non "élément d'une famille"? Même question en remplaçant "coordonnée" et "élément" resp. par "longueur" et "cardinal".
4. Donner deux descriptions différentes (et pertinentes!) d'un s.-e. v. engendré et établir l'égalité des deux descriptions données.

Quizz. Pour rappel :

★ ceci est un exercice de mathématique ;

★ en mathématique chaque affirmation doit être prouvée.

1. (a) Une famille liée peut-elle comporter deux vecteurs égaux ?
(b) Même question en remplaçant "deux vecteurs égaux" par "le vecteur nul".
2. Même (double-)question en remplaçant "liée" resp. par
(a) "libre" ;
(b) "génératrice de S ".
(a) Est-il possible que chaque élément de S^2 soit une famille libre d'éléments de S ?
(b) Même question en remplaçant "libre" resp. par "liée" puis par "génératrice de S ".
3. Soit $s \in S$. La famille (s) est-elle libre ? Même question en remplaçant " (s) " resp. par " $(18s)$ ", " $(42s)$ " puis " $(18s, 42s)$ ".
4. L'ensemble des combinaisons linéaires nulles d'éléments de S peut-il contenir (au moins) cinq vecteurs ?

Sur le terrain. Nous abrègerons a , b et c les trois vecteurs resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la liberté de chacune des six familles (a) , (b) , (c) , (a, b) , (a, c) et (b, c) .
On appelle T l'ensemble des triplets de réels dont l'abscisse fois a plus l'ordonnée fois b plus la cote fois c vaut le vecteur nul.
2. Donner une description de T n'utilisant aucun mot de français, puis proposer une lecture "mécanique" de la description donnée et enfin une description entre les deux extrêmes.
3. Établir une condition nécessaire simple pour avoir l'inclusion $T \subset S$.
4. Montrer que T est un s.-e. v. d'un s.-e. v. que l'on précisera.
5. Exhiber une base de T .
6. Le s.-e. v. T est-il de dimension finie ? Préciser le cas échéant sa dimension.
7. Conclure à la liberté ou la liaison de la famille (a, b, c) .