Une descente arithmétique
(IMO25 Pb1) – rédaction compacte

Marc SAGE

12 août 2025

Énoncé. Pour chaque entier $N \geq 1$, notons N' la somme des trois plus grands diviseurs stricts de N. *Déterminer les entiers sur lesquels l'application $\alpha \mapsto \alpha'$ peut s'itérer indéfiniment.*

Solution compacte. Soit $n \in \mathbf{N}$ tels que n' fait sens et notons $1 < a < b < c$ ses quatre plus petits diviseurs. On alors l'égalité $n' = \frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} = \lambda n$ où $\lambda := \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Notons enfin t le triplet (a, b, c).

Lemme. *Si n est impair, alors n' aussi et l'on a $n' < n$.*
Preuve. L'imparité de n implique celle des diviseurs a, b, c, d'où d'une part l'imparité de leur somme n', d'autre part leur minoration par 3 et la majoration $\lambda < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

Théorème. *On est dans un et un seul des quatre cas suivants :*

1. *Si n est multiple de 12, alors $n' = 13\frac{n}{12}$.*
2. *Si n est divisible par 6 et 5 mais pas par 12, alors $n' = 31\frac{n}{6 \cdot 5}$.*
3. *Si n est divisible par 6 mais pas par 5 ni par 12, alors $n = n'$ est fixe.*
4. *Si n n'est pas multiple de 6, alors n' non plus et l'on a encore $n' < n$.*

Corollaire (conclusion). *On pourra itérer indéfiniment l'application $\alpha \mapsto \alpha'$ sur un entier ssi ce dernier est une puissance de 12 multipliée par le sextuple d'un impair non multiple de 5.*

Démonstration du corollaire. Le théorème nous livre l'évolution des itérés de n : après élimination des puissances de 12 divisant n (cas 1), on tombe ou bien sur un point fixe (cas 3) ou bien sur une image n' non multiple de 6 (cas 4 peut-être précédé d'un unique cas 2) avec descente infinie $n > n' > n'' > n''' > \cdots$.

Démonstration du théorème

1. Supposons $12 \mid n$. On a alors l'égalité $t = (2, 3, 4)$, d'où celles $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$.
2. Supposons $\begin{cases} 2, 3, 5 \mid n \\ 4 \nmid n \end{cases}$. On a alors l'égalité $t = (2, 3, 5)$, d'où celles $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15+10+6}{30} = \frac{31}{30}$.
3. Supposons $\begin{cases} 2, 3 \mid n \\ 4, 5 \nmid n \end{cases}$. On a alors l'égalité $t = (2, 3, 6)$, d'où celles $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6+4+2}{12} = \frac{12}{12} = 1$.
4. Supposons enfin $\left\{ \text{ou} \begin{array}{c} 2 \nmid n \\ 3 \nmid n \end{array} \right.$. Le lemme nous permet déjà d'imposer la parité de n, çàd $\underline{\underline{a = 2}}$ et $\underline{\underline{3 \nmid n}}$.

   On peut alors minorer $c > b \overset{b \neq 3}{\geq} 4$ et majorer $\lambda < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Il reste à établir $2 \nmid n'$ ou $3 \nmid n'$.

   (a) Si $4 \mid n$, çàd si $b = 4$, on a alors les égalités $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{c} = \frac{3c+4}{4c}$ dont le numérateur $1 + 3(c+1)$ n'est pas multiple de 3 ✓.

   (b) Supposons $4 \nmid n$, çàd $\frac{n}{2}$ impair : alors b est un facteur (premier) de l'impair $\frac{n}{2}$ et la divisibilité $2b \mid n$ livre (avec la minoration $2b > b$) la majoration $c \leq 2b$.

      i. Si $c = 2b$, on a alors $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{2b} = \frac{3+b}{2b}$: notre n n'étant pas multiple de 3, le diviseur b non plus, donc le numérateur $3 + b$ non plus ✓.

      ii. Si $c < 2b$, alors c est un facteur (premier) de l'impair $i := \frac{n}{2b}$, donc est impair comme i (et b), d'où l'imparité de $bi + 2\left(i + b\frac{i}{c}\right) = n'$ ✓.