Une équation fonctionnelle alternative (IMO24 Pb6)

AUTRES SOLUTIONS

Marc SAGE

août 2024

1 Contexte

Soit $\mathbf{K}$ une extension[1] de $\mathbf{Q}$, soient $a, b, c, d \in \mathbf{K}$ (sur lequels on pourra au besoin quantifier universellement) et soit $f : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K}$. Les images par f seront notées avec des primes, eg $\underline{\underline{a' := f(a)}}$. Introduisons les applications[2] $\begin{matrix} \varphi := t \mapsto t + t' \\ \chi := t \mapsto t' + (-t)' \end{matrix}$ et notons $\leftrightarrows$ la relation[3] « *est (par f) une image ou un antécédent de* ». On suppose[4]

$$\textbf{HYPP} \;:\quad \forall \begin{matrix}\heartsuit \\ \spadesuit\end{matrix} \in \mathbf{K},\quad \begin{matrix}\heartsuit \\ +\spadesuit'\end{matrix} \leftrightarrows \begin{matrix}\heartsuit' \\ +\spadesuit\end{matrix}. \qquad \text{On demande de majorer } \#\operatorname{Im}\chi \overset{?}{\leq} 2.$$

On renvoie au premier texte pour une solution à notre humble avis *la plus directe & naturelle possible*, dont nous utiliserons les résultats suivants :
- l'application f est bijective de réciproque $\underline{\underline{f^{-1} = f - \chi}}$;
- en d'autres termes, on a les assignations $\underline{\underline{-a' \mapsto -a}}$;
- l'itérée seconde de f vaut $\underline{\underline{f'' = f + \chi}}$.

Nous avions conclu en faisant apparaître dans l'hypothèse l'image de la somme $a' + b$, image imposée valant $a + b'$ (par symétricité de HYPP), afin d'établir l'implication

$$\chi_a \chi_b \neq 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \chi_a = \chi_b, \text{ d'où la majoration } \#\operatorname{Im}\chi \leq 2 \text{ voulue.}$$

Nous présentons dans ce texte *bonus* quelques preuves alternatives de l'implication ci-dessus, pour la plupart adaptées d'un pdf disponible en ligne[5]. Afin de clarifier la présentation, nous donnerons d'abord les divers lemmes utilisés par les alternatives, en signalant les dépendances logiques.

Variante pour établir la bijectivité ainsi que la fixité de 0. Soit $\maltese$ sans antécédent. Dans l'alternation $\maltese = \begin{matrix}\maltese - a' \\ +a'\end{matrix} \overset{\text{HYPP}}{\leftrightarrows} \begin{matrix}(\maltese - a')' \\ +a\end{matrix}$, le membre de gauche n'est pas une image, donc le $\leftrightarrows$ est un $\mapsto$, d'où $\maltese' - a \in \operatorname{Im} f$, *absurde* en imposant $a = \maltese' - \maltese$. Par ailleurs, si z dénote un antécédent de 0, remplacer $\heartsuit, \spadesuit \leftarrow z$ dans HYPP livre la fixité de z, d'où $z = z' = 0$: on obtient alors les assignations $-a' \mapsto -a$ comme dans notre premier texte (forcer $\spadesuit = -\heartsuit'$ pour relier 0 par $\leftrightarrows$).

Retraduction faible des hypothèses. *On a l'alternation*[6]

$$\textbf{HYP–} : \quad \underline{\underline{b - a \leftrightarrows b' - a'}}$$

[1] par exemple $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ ou n'importe quel corps dont $\mathbf{Q}$ est un sous-corps (la lettre $\mathbf{K}$ vient de l'allemand *Körper*, mot original qui a ensuite donné le français *corps* ou l'anglais *field*). La lectrice est encouragée à voir ce qu'il reste de ce qui suit lorsque l'on remplace plus généralement $\mathbf{K}$ par un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel.

[2] φ comme "**phi**xe" (car φ_a sera fixe par f). La lettre χ possède quant à elle un motif à *symétrie centrale*, faisant écho à l'*imparité* de f dont l'application χ mesure le défaut.

[3] la double flèche $\leftrightarrows$ rappelle l'alternation de deux flèches d'assignation $\mapsto$ de sens opposés

[4] comme "**hyp**othèse **p**rincipale" ou "**hyp**othèse **p**remière"

[5] https ://static1.squarespace.com/static/6466334ad7b8bd6423671df6/t/6697e748ea84cc7893e4aab8/1721231178032/IMO+2024+-+Paper+1+Solutions.pdf (en particulier, notre solution expéditive est une simplification drastique de la solution 6 de ce pdf)

[6] comme "**hyp**othèse avec signes −" ou comme "version **moin**dre de HYPP" ou encore "**HYP**P **moins** une lettre"

($\textit{preuve}$: écrire $\begin{matrix} b \\ +\boxed{-a'} \end{matrix}' \overset{\text{HYPP}}{\leftrightarrows} \begin{matrix} b' \\ +\boxed{-a'} \end{matrix}$ et se souvenir de l'assignation $-a' \mapsto -a$). Nous encourageons la lectrice à montrer que HYP– équivaut, avec les assignations $-c' \mapsto -c$, précisément à HYPP.

Une dernière notation. Les antécédents par f seront notés avec des astérisques, par exemple

$$\underline{\underline{c^* := f^{-1}(c)}} = c' - \chi_c.$$

L'alternation $\leftrightarrows$ pourra ainsi se traduire en termes d'appartenances au travers des équivalences

$$a \leftrightarrows b \quad \begin{matrix} \iff b \in \{a', a^*\} \\ \iff a' - \{0, \chi_a\} \ni b \end{matrix}, \qquad \begin{matrix} \text{avec bien sûr échange possible} \\ \text{de } a \text{ et } b \text{ par symétricité de } \leftrightarrows . \end{matrix}$$

2 Quelques lemmes pour les variantes

Commençons par deux corollaires de HYP–, indépendants, et par une conséquence du second :

ALT[7] : *on a l'alternative* $\left\{ \text{ou} \quad \underline{\underline{\begin{matrix} b - a \ \mapsto \ b' - a' \\ a - b \ \mapsto \ a' - b' \end{matrix}}} \right.$

($\textit{preuve}$: l'alternation $\begin{matrix} b' \\ -a' \end{matrix} \overset{\text{HYP–}}{\leftrightarrows} \begin{matrix} \Box := \\ \boxed{b-a} \end{matrix}$ s'écrit $\begin{matrix} b' \\ -a' \end{matrix} \in \{\Box', \Box^*\}$ avec $\Box^* = -(-\Box)' = -(a-b)'$).

QADD[8] : *on a l'appartenance* $\underline{\underline{(a+b)' - a' - b' \in \{0, -\chi_a\}}}$

($\textit{preuve}$: l'alternation $b = \begin{matrix} a+b \\ -a \end{matrix} \overset{\text{HY\"{}P–}}{\leftrightarrows} \begin{matrix} (a+b)' \\ -a' \end{matrix}$ s'écrit $\begin{matrix} b' \\ -\{0, \chi_b\} \end{matrix} \ni \begin{matrix} (a+b)' \\ -a' \end{matrix}$).

OBS[9] (utilise QADD) : *on a les implications* $\underline{\underline{\chi_a \neq \chi_b \Longrightarrow (a+b)' = a' + b'}}$

($\textit{preuve}$: le membre de gauche de QADD étant symétrique en a et b, on peut remplacer celui de droite par l'intersection $\{0, -\chi_a\} \cap \{0, -\chi_b\}$, laquelle est nulle quand $\chi_a \neq \chi_b$).

Viennent alors deux lemmes utilisés pour majorer $|\mathrm{Im}\,\chi| \leq 2$. Invoquer au besoin la *parité* de χ.

KHI+[10] (utilise OBS) : *on a les implications* $\underline{\underline{\chi_a \neq \chi_b \Longrightarrow \chi_{a+b} = \chi_a + \chi_b}}$.

KHI– (utilise QADD ou bien rien) : *on a les implications* $\underline{\underline{\chi_a \neq \chi_b \Longrightarrow \chi_{a+b} = \pm(\chi_a - \chi_b)}}$.

Preuve de KHI+. L'hypothèse $\chi_a \neq \chi_b$ se réécrit $\chi_{-a} \neq \chi_{-b}$ et implique d'après OBS les égalités

$$\left\{ \begin{array}{c} (a+b)' = a' + b' \\ ((-a) + (-b))' = (-a)' + (-b)' \end{array} \right. \quad \text{dont la somme livre la conclusion.}$$

Preuve de KHI–. QADD fournit deux bits $\alpha, \beta \in \{0,1\}$ tels que $\left\{ \begin{array}{c} (c+d)' - c' = d' - \alpha\chi_d \\ ((-c) + (-d))' - (-c)' = (-d)' - \beta\chi_{-d} \end{array} \right.$, ajouter livre l'égalité $\chi_{c+d} - \chi_c = \varepsilon\chi_d$ où $\varepsilon := 1 - \alpha - \beta \in \{-1, 0, 1\}$. Imposer $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a-b \end{pmatrix}$ donne alors $\chi_a - \chi_b = \varepsilon\chi_{a+b}$, le cas $\varepsilon = 0$ étant exclu par hypothèse.

2e preuve de KHI– (élémentaire). Utiliser HYPP deux fois donne les alternations

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b \leftrightarrows a^* + b' = (a' + b') - \chi_a \\ a + b \leftrightarrows a' + b^* = (a' + b') - \chi_b \end{array} \right. .$$

Les deux membres de droite ayant une différence $\pm(\chi_b - \chi_a)$ non nulle, les deux $\leftrightarrows$ ne peuvent être des $\mapsto$ de même sens, donc ces deux membres de droite sont (dans un certain ordre) les image et antécédent du membre de gauche $a + b$, image et antécédent dont la différence vaut (au signe près) $(a+b)' - (a+b)^* = \chi_{a+b}$.

3e preuve de KHI– (la même rhabillée en négatif). Raisonnons avec des *différences* plutôt qu'avec des sommes. Imposons $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ b-c \end{pmatrix}$ et abrégeons $\begin{pmatrix} \delta \\ \Delta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} b' - c' \\ \chi_b - \chi_c \end{pmatrix}$, la parité de χ assurant (avec l'hypothèse)

---

[7] comme "**alt**ernative"
[8] comme "**q**uasi-**add**itivité"
[9] comme "**obs**ervation"
[10] comme χ et l'opération dans le membre tout à droite

la non-nullité de Δ. Utiliser deux fois HYP– donne alors $\delta \leftrightarrows d \leftrightarrows \genfrac{}{}{0pt}{}{b^*}{-c^*} = \genfrac{}{}{0pt}{}{b'-\chi_b}{-(c'-\chi_c)} = \delta - \Delta$, d'où l'inclusion $\{\delta, \delta - \Delta\} \subset \{d', d^*\}$, la non-nullité de Δ livrant par ailleurs la comparaison cardinale $\geq$, d'où l'égalité ensembliste et la conclusion $\chi_d = d' - d^* = \pm\Delta$.

3 Variantes pour majorer $\#\operatorname{Im}\chi \leq 2$

Supposons par l'absurde $\underline{\underline{A := \chi_a}}$ et $\underline{\underline{B := \chi_b}}$ distincts et non nuls.

Variante 1 *(feat ALT)***.** D'après ALT, nous pouvons par symétrie imposer $b - a \mapsto b' - a'$. L'alternation[11] $\genfrac{}{}{0pt}{}{b-a}{-\boxed{-a}} \overset{\text{HYP}-}{\leftrightarrows} \genfrac{}{}{0pt}{}{(b-a)'}{-\boxed{-a}'}$ donne alors $b \leftrightarrows \genfrac{}{}{0pt}{}{b'}{-A}$, çàd $\genfrac{}{}{0pt}{}{b'}{-\{0,B\}} \ni \genfrac{}{}{0pt}{}{b'}{-A}$, ou encore $\{0, B\} \ni A$, ce qui conclut directement SANS[12] recours à l'hypothèse $B \neq A \neq 0$.

Remarque. La situation est très similaire à la preuve expéditive du premier texte : forcer b dans $\leftrightarrows$ en utilisant l'une des $\mapsto$ d'une certaine alternation (on obtenait $b' \leftrightarrows b + A$). L'alternation utilisée (HYPP) y était cependant plus élémentaire (que ALT), tandis que la variante avec ALT n'utilise pas la relation $f'' = f + \chi$. La lectrice ppréciera elle-même l'écart de complexité.

Variante 2 *(feat OBS)***.** Abrégeons $\begin{pmatrix} s \\ \sigma \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+b \\ a'+b' \end{pmatrix}$. Dans les relations

$$s = \genfrac{}{}{0pt}{}{a}{+b} \overset{\text{HYPP}}{\leftrightarrows} \genfrac{}{}{0pt}{}{a^*}{+b'} = \genfrac{}{}{0pt}{}{a'}{+b'} - B = \sigma - B \overset{B\neq 0}{\neq} \sigma \overset{\text{OBS}}{=} s', \text{ le } \leftrightarrows \text{ ne peut être un } \mapsto \text{, d'où } s' = \sigma - B.$$

Par symétrie, cette dernière image vaut aussi $\sigma - A$, d'où l'(absurde)égalité $A = B$.

Remarque. Le cadre est le même que pour la 2e preuve (élémentaire) de KHI–, la remarque OBS permettant ici de conclure directement sans récolter KHI–. (La même variante tiendrait *mutadis mutandis* en remplaçant a et b par leurs antécédents –> exercice !)

Variante 3 *(feat KHI+)***.** On a $\chi_{a+b} \overset{\text{KHI+}}{=} A + B \overset{B\neq 0}{\neq} A = \chi_{-a}$, donc $\chi_{(a+b)+(-a)} \overset{\text{KHI+}}{=} \chi_{a+b} + \chi_{-a}$, çàd $B = 2A + B$, d'où $A = 0$: contradiction.

Variante 4 *(combo KHI±)***.** Combiner KHI+ et KHI– livre directement $A + B = \pm(A - B)$, d'où en simplifiant selon les cas la nullité contradictoire de AB.

4 Deux lemmes pour le cas rationnel

PONT[13] *Étant donné deux fractions non nulles, on peut toujours en trouver deux diviseurs égaux, ce qui revient à pouvoir en trouver deux multiples égaux non nuls.*

Preuve. Si ces rationnels s'écrivent $\frac{n}{d}$ et $\frac{N}{D}$, alors[14] le premier divisé par nD vaut le second divisé par Nd, la non-nullité affirmée découlant de celle de $nNdD$.

ZÉRO[15] *L'application χ a un zéro non nul.*

Preuve. Sauf mention contraire, chaque fixité sera relative à l'application f. Procédons en 4 points.

1. *Chaque image par φ est fixe.* Écrire $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{+a'} \overset{\text{HYPP}}{\leftrightarrows} \genfrac{}{}{0pt}{}{a'}{+a}$ (*cf.* premier texte).
2. *La fixité est préservée par opposition.* Si a est fixe, alors $-a$ également vu l'assignation $-a' \mapsto -a$.

[11] cela revient à utiliser directement $\genfrac{}{}{0pt}{}{b-a}{+(a^*)'} \overset{\text{HYPP}}{\leftrightarrows} \genfrac{}{}{0pt}{}{(b-a)'}{+a^*}$ (passer par HYP– nous paraît cependant plus clair, plus progressif)

[12] sur le fond, il NE s'agit PAS ici d'un raisonnement par l'absurde puisque nous avons prouvé DIRECTEMENT ce que l'on voulait !

[13] comme "**pont** entre deux rationnels quelconques"

[14] *point rigueur* : aviez-vous remarqué que le dénominateur d a le même nom que le nombre d évoqué tout au début ? et en quoi cela n'est pas un problème ici ?

[15] comme "**zéro** de χ"

3. *Chaque point fixe est annulé par* χ. L'égalité $\chi_a = \varphi_{a'} - \varphi_a$ devient nullité lorsque a est fixe.
4. *Conclusion.* L'application χ s'annulant sur $\operatorname{Im}\varphi$, on a terminé si $\varphi \neq 0$; on a sinon la nullité de $\varphi_a + \varphi_{-a} = \chi_a$, en particulier pour $a \neq 0$.

4bis *(variante)* L'application χ s'annulant en chaque point fixe, on a terminé si $\operatorname{Fix} f \neq \{0\}$; on a sinon les inclusions $\{0\} \supset \operatorname{Fix} f \supset \operatorname{Im}\varphi$, d'où la nullité de φ, l'égalité $f = -\operatorname{Id}$ et la nullité de χ.

5 Variantes dans le cas rationnel

On garde les notations $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \chi_b \end{pmatrix}$ et l'on suppose toujours $0, A, B$ distincts.

Imposons pour cette section l'inclusion $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$, ce qui ouvrira la porte aux considérations de *signe* et à l'usage du *module*.

Variante 5 *(feat ZÉRO, PONT, QADD & KHI–).* Notons[16] $S := \mathbf{Z}a + \mathbf{Z}b$ et démontrons successivement au sujet de l'image $\chi(S)$ les faits suivants *: 1) elle est finie, 2) elle possède deux éléments strictement opposés, 3) elle est infinie.* La contradiction s'ensuivra.

1. *(utilise* $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$*)* Soit $z \neq 0$ annulé par χ (donné par ZÉRO), supposons $c \neq 0$ et soient (par PONT) deux entiers C et Z non nuls tels que $Cc = Zz$: on alors pour chaque entier λ les égalités

$$\begin{aligned} \chi((\lambda + C)c) &= \chi(\lambda c + Cc) = \chi(\lambda c + Zz) = \begin{matrix} (\lambda c + Zz)' + \\ (-\lambda c + Z(-z))' \end{matrix} \underset{\substack{\text{QADD} \\ \chi(-z)=\chi(z)=0}}{\overset{Z \text{ entier}}{=}} \begin{matrix} (\lambda c)' + Zz' \\ + (-\lambda c)' + Z(-z)' \end{matrix} \\ &= \chi(\lambda c) + Z\chi_z = \chi(\lambda c), \text{ d'où (par non-nullité de } C) \end{aligned}$$

   l'égalité $\chi(\mathbf{Z}c) = \{\chi_c, \chi_{2c}, ..., \chi_{Cc}\}$ et la majoration $\#\chi(\mathbf{Z}c) \leq C$. Le même raisonnement montrerait la finitude de l'image par χ de chaque sous-groupe de type fini[17], en particulier de S.

2. *(valide sans contrainte sur* $\mathbf{K}$*)* Reprenons la 2e preuve (élémentaire) de KHI– : nous y avions établi, en abrégeant $\begin{pmatrix} s \\ \sigma \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+b \\ a'+b' \end{pmatrix}$, l'inclusion $\{s', s^*\} \subset \sigma - \{A, B\}$. Montrons en fait l'égalité $\begin{pmatrix} s' \\ s^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma - B \\ \sigma - A \end{pmatrix}$, d'où viendra l'appartenance $A - B = s' - s^* = \chi_s \overset{s \in S}{\in} \chi(S)$, un argument de symétrie[18] livrant alors l'appartenance à $\chi(S)$ de l'opposé $B - A$.

   En notant $C := \sigma - s'$ (qui vaut A ou B), on a $\begin{matrix} s \\ -b \end{matrix} \overset{\text{HYP}-}{\leftrightarrows} \begin{matrix} s' \\ -b' \end{matrix}$, çàd $a \leftrightarrows \begin{matrix} a' \\ -C \end{matrix}$, ou encore $\begin{matrix} a' \\ -\{0, A\} \end{matrix} \ni \begin{matrix} a' \\ -C \end{matrix}$, çàd $\{0, A\} \ni C$. Il en résulte $C = A$ et[19] la valeur cherchée pour s', l'antécédent s^* valant alors (vu la distinction $A \neq B$) l'autre valeur dans $\sigma - \{A, B\}$.

3. *(utilise* $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$ *mais aussi le point 1)* L'image $\chi(S)$ étant finie, son module est maximum en un certain $s \in S$. Le point 2 permet ensuite d'évoquer un $t \in S$ tel que $\sigma\tau < 0$ où l'on a abrégé $\begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \chi_s \\ \chi_t \end{pmatrix}$. On obtient alors une absurdité en minorant strictement

$$|\chi_{s+t}| \overset{\text{KHI}-}{=} |\sigma - \tau| \overset{\sigma\tau \leq 0}{=} |\sigma| + |\tau| \overset{\tau \neq 0}{>} |\sigma| = \max_S |\chi|.$$

Remarque. Dans la solution originelle[20], certaines hypothèses – légitimées par des arguments de symétries – relatives aux signes et positions respectives de A et B permettaient d'aller plus vite, au détriment de la clarté de l'argument de fond, lequel nous avons tenu ici à mettre au jour.

Variante 6 : une alternative longue mais ô combien riche et subtile (utilise $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$). Comment relier deux images par χ non nulles afin d'établir leur égalité ? Une idée est de modifier les arguments de manière

[16] S comme "**s**omme (de $\mathbf{Z}a$ et $\mathbf{Z}b$)"

[17] relier chaque générateur non nul au zéro z comme nous l'avons fait pour le générateur c

[18] s'arrêter à « $= \chi_s$ » permettrait de tout court-circuiter, l'image χ_s valant en effet à la fois $A - B$ et son opposé $B - A$, d'où l'égalité $A = B$ (comparer ce court-circuit à la **variante 2**)

[19] encore une fois, un argument de symétrie livrerait *aussi* l'égalité $C = B$, d'où celle $A = B$ contredite par les hypothèses

[20] la solution 3 du pdf sus-mentionné

"analogue" afin d'obtenir un même intermédiaire, par exemples en passant par des diviseurs ou multiples communs (*cf.* le lemme PONT). Il sera donc utile de comprendre le lien entre $\chi(a)$ et $\chi\left(\frac{a}{n}\right)$ pour n entier. Tâchons pour cela d'utiliser QADD et les multiples entiers de $\frac{a}{n}$, notre intérêt étant porté particulièrement sur le n-ième.

Majorer $\#\operatorname{Im}\chi \le 3$ (cas $\mathbf{K} = \mathbf{Q}$) *(feat PONT & QADD).* *Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et notons*[21] $\blacksquare := \frac{a}{n}$.

Nous allons montrer que $\chi_\blacksquare$ vaut χ_a au signe près.

En conséquence, grâce à PONT, deux images non nulles par χ seront égales au signe près, donc $\operatorname{Im}\chi$ sera de la forme $\{-i, 0, i\}$, d'où la majoration $\#\operatorname{Im}\chi \le 3$ attendue.

Observons tout d'abord la non-nullite de $\chi_\blacksquare$ (sa nullité impliquant *via* QADD et une récurrence immédiate celle de $\chi_{n\blacksquare} = \chi_a$). À garder au chaud.

Relions ensuite $\chi_\blacksquare$ et χ_a en partant de $0'$ puis en ajoutant/soustrayant des $\blacksquare$ à l'argument, çàd *via* les égalités (télescopiques)

$$\left\{\begin{array}{r} a' = (n\blacksquare)' - (0\blacksquare)' = \sum_{i>0}^{n} \Delta_i \\ -(-a)' = (0\blacksquare)' - (-n\blacksquare)' = \sum_{i>-n}^{0} \Delta_i \end{array}\right.$$

où pour chaque entier i on a abrégé $\Delta_i := (i\blacksquare)' - (\,(i-1)\,\blacksquare\,)'$ (lequel vaut par QADD $\blacksquare'$ ou $\blacksquare' - \chi_\blacksquare$).

On récupérera χ_a tout à gauche en soustrayant ces égalités. Quant à $\chi_\blacksquare$, il apparaît (peut-être) dans les Δ_i.

Afin de préciser ces apparitions éventuelles, introduisons plus généralement pour chaque entier z le cardinal C_z comptant les entiers $i \in \,]z-n, z]$ tels que $\Delta_i = \blacksquare' - \chi_\blacksquare$ (les autres entiers $i \in \,]z-n, z]$ étant en nombre $n - C_z$ et vérifiant $\Delta_i = \blacksquare'$). À $z \in \mathbf{Z}$ fixé, on a alors les égalités

$$\sum_{i>z-n}^{z} \Delta_i = C_z\left(\blacksquare' - \chi_\blacksquare\right) + (n - C_z)\,\blacksquare' = n\blacksquare' - C_z\chi_\blacksquare .$$

Regardons à présent ces quantités comme fonctions de z (gardant n et a fixes). Tout à gauche, la somme télescopique vaut $(z\blacksquare)' - (z\blacksquare - a)'$, laquelle ne peut prendre que deux valeurs[22]. Le membre de droite ne peut donc prendre qu'au plus deux valeurs, *a fortiori* C_z également[23] ; or deux termes de la suite C consécutifs ne diffèrent[24] que d'au plus 1 : l'un dans l'autre, deux termes *quelconques* de C diffèrent[25] d'au plus 1.

Concluons. Remplacer dans les égalités ci-dessus z par n puis par 0 et soustraire nous livre comme annoncé $\chi_a = (C_0 - C_n)\,\chi_\blacksquare$. La parenthèse est non nulle (vu l'hypothèse $A \neq 0$), bornée par 1 (d'après la fin du dernier paragraphe) et entière : elle vaut donc ± 1, CQFD.

Remarque : l'égalité $\chi_\blacksquare = \pm A$ établie ci-dessus *équivaut* en fait à l'existence $\exists i \in \mathbf{K}, \operatorname{Im}\chi \subset \{-i, 0, i\}$. En effet, quand $\operatorname{Im}\chi$ est de cette forme, les deux éléments A et $\chi_\blacksquare$ non nuls de $\operatorname{Im}\chi$ tombent dans $\{-i, 0, i\} \setminus \{0\} \subset \{\pm i\}$, donc doivent égaler i au signe près.

Réfuter $\#\operatorname{Im}\chi = 3$ (cas $\mathbf{K} \subset \mathbf{R}$) *(feat KHI±).* La distinction de $0, A, B$ (hypothèse) permet d'expliciter l'image $\operatorname{Im}\chi = \{0, A, B\}$.

Si $AB > 0$, alors $|A+B| > |A|, |B|, 0$, donc tombe hors $\operatorname{Im}|\chi|$, ce qui contredit KHI+. Si $AB < 0$, alors même conclusion cette fois pour $|A - B| \notin \operatorname{Im}|\chi|$, ce qui contredit KHI–.

Réfuter $\#\operatorname{Im}\chi = 3$ (cas plus simple, mais K général) *(feat KHI–).* La longue alternative nous conduisait plus précisément à une $\operatorname{Im}\chi$ de la forme $\{-i, 0, i\}$ où $i \neq 0$. En notant α et β les antécédents respectifs de i et $-i$, on obtient une contradiction en écrivant

$$\chi_{\alpha+\beta} \overset{\text{KHI–}}{=} \pm\left(\chi_\alpha - \chi_\beta\right) = \pm 2i \notin \operatorname{Im}\chi .$$

Remarque : les deux réfutations ci-dessus utilisent KHI– exactement dans le même esprit que dans la variante 5 (point 3).

[21] nous n'aurons pas besoin de regarder dans la boîte noire $\blacksquare$, à l'exception des deux premières égalités réécrivant a' et $-(-a)'$

[22] a' moins peut-être χ_a

[23] diviser par $\chi_\blacksquare$ qui est non nul (*cf.* observation du début)

[24] pour passer de $z-1$ à z, on perd peut-être l'indice $z-n$ et on gagne peut-être l'indice z (les indices strictement entre sont les mêmes), d'où une variation cardinale de -1, 0 ou 1

[25] Soient $p < q$ tels que $C_p \neq C_q$ (il n'y a rien à faire si $C_p = C_q$). Quitte à remplacer p par $\max\{i \ge p\ ;\ C_i = C_p\} < q$, on peut supposer $C_{p+1} \neq C_p$, çàd $C_{p+1} = C_q$, d'où l'on tire $|C_q - C_p| = |C_{p+1} - C_p| \le 1$.