Démystifier un contre-exemple (compléments sur IMO24 Problème 6)

Marc SAGE

août 2024

1 Contexte

$\underline{\underline{\text{Soient } a, b, c, d \in \mathbf{R}}}$ (sur lequels on pourra au besoin quantifier universellement) et $\underline{\underline{\text{soit } f : \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}}}$ bijective[1].
Sauf mention contraire, chaque fixité ou assignation sera relative à l'application f exclusivement.
Les $\begin{matrix}\text{images}\\ \text{antécédents}\end{matrix}$ par f seront notées resp. avec des $\begin{matrix}\text{primes}\\ \text{astérisques}\end{matrix}$, eg $\begin{matrix}\underline{\underline{a' := f(a)}}\\ \underline{\underline{b^* := f^{-1}(b)}}\end{matrix}$.

On introduit les noms et supposons les faits suivants[2] (détail des deux obèles † en footnote[3]) :

$\leftrightarrows$ est la relation « *est (par f) l'image ou l'antécédent de* »

$$\boxed{\textbf{HYPP} : \begin{matrix} a \\ +b' \end{matrix} \leftrightarrows \begin{matrix} a' \\ +b \end{matrix}} \qquad -a' \mapsto -a$$

$$\textbf{HYP–} : \begin{matrix} c \\ -d \end{matrix} \leftrightarrows \begin{matrix} c' \\ -d' \end{matrix}$$

$$\textbf{ALT} : \begin{cases} & b-a \mapsto b'-a' \\ \text{ou} & \\ & a-b \mapsto a'-b' \end{cases}$$

$$\textbf{QADD} : \begin{matrix} (a+b)' \\ -a'-b' \end{matrix} \in \{0, -\chi_a\}$$

$$\dagger\textbf{FixADD} : \begin{matrix} a \in \operatorname{Fix} f \Longrightarrow \\ (a+b)' = a+b' \end{matrix}$$

$$0' = 0$$

$$\varphi := \operatorname{Id} + f \qquad \underline{\underline{\varphi_a = a + a'}} \text{ est fixe}$$

† $\operatorname{Fix} f$ est un sous-groupe (additif) de $\mathbf{R}$ sur lequel χ s'annule

$$\chi := f + f \circ (-\operatorname{Id}) \qquad \underline{\underline{\chi_a = a' + (-a)'}}$$

$$\boxed{\# \operatorname{Im} \chi \leq 2}$$

$$f^{-1} = f - \chi \qquad f'' = f + \chi$$

La question originelle – reformulée – était :

> *sous la seule hypothèse HYPP (dont découle tout le reste), l'application χ est-elle nécessairement nulle ?*

Si c'était le cas, la quasi-additivité QADD deviendrait alors additivité de f, laquelle (restreinte à $\mathbf{Q}$) serait une homothétie, la relation $-a' \mapsto -a$ imposant le rapport de carré 1, d'où $f_{|\mathbf{Q}} = \pm \operatorname{Id}$. Ces deux homothéties étendues à tout $\mathbf{R}$ vérifient réciproquement bien HYPP.

Or n'importe quelle solution en ligne de cet exercice nous parachutera un exemple contredisant cette dernière égalité ! Tâchons d'en clarifier la genèse afin de démystifier l'effet parachute, à l'aide de symétries $\mathbf{Q}$-linéaires : la fixité du milieu $\frac{\varphi_a}{2}$ y sera centrale. Nous clorons, enfin, par quelques questions ouvertes.

[1] la bijectivité sera une conséquence de l'hypothèse HYPP à venir

[2] *cf.* notre 2e texte (compléments) pour des justifications de ces faits & noms (exception faite des deux obèles † précisées plus loin)

[3] La fixité de 0 a été prouvée dans le premier texte, ainsi que dans le deuxième (*cf.* variante pour établir la surjectivité). La stabilité de $\operatorname{Fix} f$ par opposition découle des assignations $-a' \mapsto -a$ (*cf.* preuve du lemme ZÉRO). Cette stabilité équivaut à la nullité $\chi_{|\operatorname{Fix} f} = 0$ vu quand a est fixe les équivalences $\chi_a = 0 \Longleftrightarrow a' + (-a)' = 0 \overset{a'=a}{\Longleftrightarrow} (-a)' = -a \Longleftrightarrow -a$ fixe. De cette nullité et de QADD découle FixADD, d'où – enfin – la stabilité de $\operatorname{Fix} f$ par addition.

2 À la pêche aux contre-exemples

Notation $\oplus$. Soient[4] $P, Q \subset \mathbf{R}$. Rappelons que la somme $P+Q$ désigne l'ensemble des nombres de la forme $\underbrace{p}_{\in P} + \underbrace{q}_{\in Q}$. Nous *entourerons* le signe $+$ pour signifier de plus l'*unicité* pour chaque nombre d'un tel couple (p,q). Ainsi l'égalité $\mathbf{R} = P \oplus Q$ traduira-t-elle la bijectivité de l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} P \times Q & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (p,q) & \longmapsto & p+q \end{array} \right.$.

Resserrer les hypothèses. Pour trouver des applications autres que $\pm\,\mathrm{Id}$ satisfaisant aux hypothèses, restreignons ces dernières à l'instar des mailles d'un filet : nous y verrons plus clair quant à ce qui reste pris au piège − quitte à ne trouver *que* $\pm\,\mathrm{Id}$. Remplaçons pour cela l'alternation définissant $\leftrightarrows$ par une *conjonction*. La quasi-additivité QADD devient alors additivité, çàd $\mathbf{Q}$-linéarité[5], d'où la nullité de χ, çàd l'involutivité de f. Cette dernière est donc une symétrie $\mathbf{Q}$-linéaire par rapport à $\mathrm{Fix}\, f$ parallèlement à $\mathrm{AntiFix}\, f$, çàd AGIT sur c décomposé en la somme[6] d'une partie fixe $\frac{c+c'}{2}$ et d'une partie "anti-fixée" $\frac{c-c'}{2}$ EN OPPOSANT CETTE DERNIÈRE.

Réciproquement, *s'il y a deux parties P et Q de $\mathbf{R}$ stables par $+$ et $-$ telles que $\mathbf{R} = P \oplus Q$, alors opposer la composante suivant Q va convenir*[7] : en effet, une fois décomposés les nombres $\left\{ \begin{array}{l} a = A + \alpha \\ b = B + \beta \end{array} \right.$ selon $P+Q$, la somme $\begin{array}{c} a' \\ +b \end{array} = \begin{array}{c} A-a \\ +B+\beta \end{array} = \begin{array}{c} A+B \\ +\beta-\alpha \end{array}$ sera envoyée (vu que P est stable par $+$ et Q par $-$) sur $\begin{array}{c} A+B \\ -(\beta-\alpha) \end{array} = \begin{array}{c} A+\alpha \\ +B-\beta \end{array} = \begin{array}{c} a \\ +b' \end{array}$ (l'assignation réciproque $\begin{array}{c} a \\ +b' \end{array} \mapsto \begin{array}{c} a' \\ +b \end{array}$ tombant de la même manière).

S'inspirer de la pêche "restreinte". Notre filet est toutefois trop serré pour permettre la non-nullité de χ. Ne pourrait-on pas néanmoins adapter ce qui précède en "assouplissant" les symétries ci-dessus ? Toujours avec deux parties P et Q telles que $\mathbf{R} = P \oplus Q$ et f agissant en opposant la composante selon Q, il suffit (avec les notations ci-dessus) pour avoir $\begin{array}{c} a' \\ +b \end{array} \leftrightarrows \begin{array}{c} a \\ +b' \end{array}$: d'une part que le nombre $A+B$ reste dans P, ce qui sera assuré en gardant P stable par $+$, d'autre part que $\beta - \alpha$ OU SON OPPOSÉ reste dans Q (sans nécessairement avoir stabilité par $-$).

De tels Q sont par exemple les intervalles de la forme $[0, \lambda[$, et un P possiblement associé (pour avoir $\mathbf{R} = P \oplus Q$) est $\lambda\mathbf{Z}$. Quand $\lambda = 1$, l'application associée *oppose* alors simplement la partie fractionnaire[8], action qui coïncide avec celle de $2\lfloor\cdot\rfloor - \mathrm{Id}$, ce qui constitue un contre-exemple souvent parachuté − lequel nous espérons avoir rendu plus "naturel" et ainsi "devinable".

Résumé. *Soient P et Q deux parties de $\mathbf{R}$ telles que :*

1. $\mathbf{R} = P \oplus Q$ *;*
2. *P est stable par addition*[9] *;*
3. $\forall {}^{\alpha}_{\beta} \in Q, \left\{ \text{ou} \begin{array}{l} \beta - \alpha \in Q \\ \alpha - \beta \in Q \end{array} \right.$.

Alors l'application $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ qui agit $\begin{array}{c} \textit{en opposant les éléments de } Q \\ \textit{(sans toucher à ceux de } P\textit{)} \end{array}$ *vérifie HYPP*[10].

Il y a cependant (beaucoup) mieux : notre f pourra *toujours* être décrite de la façon précédente pour certaines parties P et Q, la nullité de χ allant équivaloir à la stabilité de Q par opposition. Par conséquent, *n'importe quel exemple* − et ce seront les seuls ! − avec Q *instable par opposition* vérifiera $\chi \neq 0$, à l'instar des intervalles $[0, \lambda[$ sus-mentionnés dans le cas réel.

Démontrons tout cela.

---

[4] P comme "**p**artie", la lettre suivante étant Q

[5] équivalence classique laissée aux soins de la lectrice

[6] la lectrice vérifiera l'unicité de cette décomposition

[7] nos deux solutions connues $\pm\,\mathrm{Id}$ correspondent aux cas où P ou Q est la partie nulle $\{0\}$

[8] les éléments de P sont alors "**p**leins" (au sens d'être entiers) et ceux de Q sont des "**q**uotients" (des fractions < 1), d'où une nouvelle mnémonique pour les lettres P et Q

[9] en fait un tel P sera nécessairement un *sous-groupe*, en tant qu'ensemble des points fixes d'une application vérifiant HYPP

[10] on aura bien sûr, dans la définition de HYPP, remplacé f par l'application considérée

3 Théorème central : en quoi le contre-exemple $2\lfloor\cdot\rfloor - \mathrm{Id}$ est générique

Annonçons tout de suite la couleur, à savoir le « (beaucoup) mieux » précédemment déclaré.

Théorème central (action symétrique de f). *Chaque réel s'écrit d'une unique manière comme somme d'un réel fixe et d'un réel opposé (par f). En d'autres termes, on a l'égalité*

$$\mathbf{R} = \mathrm{Fix}\, f \oplus \mathrm{AntiFix}\, f.$$

Corollaire (description des cas où $\#\,\mathrm{Im}\,\chi = 1$). *L'application χ est nulle ssi la partie* $\mathrm{AntiFix}\, f$ *est stable par opposition. En d'autres termes, on a l'égalité $\#\,\mathrm{Im}\,\chi = 2$ ssi*[11] *il y a un réel antifixé dont l'opposé ne l'est pas.*

Notre preuve se fera en deux bouts enchaînés et très indépendants, dont nous présentons d'abord *le second* à des fins d'allègement. (Ce second bout viendra en temps et en heure s'enchâsser naturellement dans le premier.)

Bout de théorème (nullité de $\chi\left(\frac{a+a'}{2}\right)$). *Notons*[12] $\mu := \frac{a+a'}{2}$ *puis* $i := \chi_\mu$. *On suppose l'égalité* $\mu' = \mu + \frac{i}{2}$. *Alors l'image i doit être nulle.*

Lemme 1. *Sous les mêmes hypothèses que ci-dessus, la demi-image $\frac{i}{2}$ est fixe.*

Lemme 2. *Il y a un entier N (*a priori *fonction de c) tel que* $2\left(\frac{c}{2}\right)' = c' + N\chi\left(\frac{c}{2}\right)$.

Preuve du lemme 1 : dans l'hypothèse $\mu' = \mu + \frac{i}{2}$, ajouter $\mu = \frac{\varphi_a}{2}$ donne $\varphi_\mu = \varphi_a + \frac{i}{2}$ et il reste à se souvenir que $\mathrm{Fix}\, f$ est un sous-groupe incluant $\mathrm{Im}\,\varphi$.

Preuve du lemme 2 : remplacer $a, b \leftarrow \frac{c}{2}$ dans QADD livre un entier $N \in \{0,1\}$ tel que $\left(\frac{c}{2}+\frac{c}{2}\right)' = \left(\frac{c}{2}\right)' + \left(\frac{c}{2}\right)' - N\chi\left(\frac{c}{2}\right)$.

Preuve du bout de théorème. Supposons par l'absurde $i \neq 0$. Vu la majoration $\#\,\mathrm{Im}\,\chi \leq 2$, on peut alors affirmer les inclusions $\mathrm{Im}\,\chi \subset \{0, i\} \subset \mathbf{Z}i$, d'où (par le lemme 2 où l'on a remplacé c resp. par a et a') trois entiers A, B, C tels que

$$2\left(\frac{a}{2}\right)' = a' + Ai \qquad \text{et} \qquad 2\left(\frac{a'}{2}\right)' = \underbrace{(a')'}_{=a+\chi_a=a+Ci} + Bi = a + (B+C)\, i.$$

Montrons alors que l'entier $A+B+C$ est à la fois pair ET impair, ce qui conclura à l'absurdité :

1. QADD livre un entier D tel que

$$\begin{aligned} \mu' &= \left(\frac{a}{2}+\frac{a'}{2}\right)' \overset{\text{QADD}}{=} \left(\frac{a}{2}\right)' + \left(\frac{a'}{2}\right)' - Di\,; \\ \text{doubler donne } 2\mu' &= (a' + Ai) + (a + (B+C)\, i) - 2Di, \\ \text{çàd } 2\mu + i &= 2\mu + (A+B+C-2D)\, i, \text{ d'où l'imparité de } A+B+C = 2D+1\,; \end{aligned}$$

2. exprimer $\left(\frac{a}{2}\right)''$ de deux façons différentes donne un entier E tel que

$$\underbrace{\left(\frac{a}{2}\right)''}_{=\frac{a}{2}+\chi\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a}{2}+Ei} = \left[\left(\frac{a}{2}\right)'\right]' = \left[\frac{a'}{2} + A\frac{i}{2}\right]' \underset{\substack{A \text{ entier} \\ \text{lemme 1}}}{\overset{\text{FixADD}}{=}} \left(\frac{a'}{2}\right)' + A\frac{i}{2} = \frac{a + (B+C)\, i + Ai}{2},$$

d'où (doubler) l'égalité $a + 2Ei = a + (A+B+C)\, i$ et la parité de $A+B+C = 2E$.

Preuve du théorème central. Notons $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathrm{Fix}\, f \\ \mathrm{AntiFix}\, f \end{pmatrix}$.

Montrons d'abord l'unicité d'une décomposition selon $P+Q$. Soient ${}^{A}_{B} \in P$ et ${}^{\alpha}_{\beta} \in Q$ tels que $A+\alpha = B+\beta$. Puisque P est un sous-groupe, la différence $\alpha - \beta = B - A$ et son opposé sont fixes ; or le lemme ALT appliqué à α et β montre que l'une de ces différences est antifixée, *a fortiori* nulle, d'où l'égalité $\alpha = \beta$ voulue.

[11] le sens réciproque est élémentaire (*cf.* preuve à venir), c'est bien le sens *direct* qui constitue la substance de ce corollaire, à savoir : les contraintes sur $\mathrm{AntiFix}\, f$ imposées systématiquement par les contre-exemples à la nullité de χ

[12] μ comme "**m**ilieu de a et a'"

Établissons à présent l'appartenance $a \in P+Q$. [*Micro-analyse* : si $\begin{cases} a = p+q \\ \binom{p}{q} \in P \times Q \end{cases}$, alors FixADD livre l'égalité $a' = p + q' = p - q$, d'où $\begin{cases} \frac{a+a'}{2} = p \\ \frac{a-a'}{2} = q \end{cases}$ *(fin de la micro-analyse)*]. En abrégeant[13]

$$\mu := \frac{a+a'}{2} \quad \text{et} \quad \nu := \frac{a-a'}{2},$$

l'égalité $a = \mu + \nu$ est immédiate et il s'agit d'établir la fixité de μ et l'"antifixité" de ν.

Or, dès que μ est fixe, l'égalité $\nu = a - \mu$ et la fixité de $-\mu$ donnent (*via* FixADD) $\nu' = a' - \mu = -\nu$, de sorte que seule reste à montrer l'égalité $\mu' \overset{?}{=} \mu$. Par ailleurs, l'égalité $\mu = \varphi_a - \mu$ et FixADD donnent $\mu' = \varphi_a + (-\mu)'$, d'où (ajouter μ' et diviser par 2) l'égalité $\mu' = \mu + \frac{\chi_\mu}{2}$. Le bout de théorème ci-dessus trouve alors sa place et permet de conclure.

Preuve du corollaire. Gardons les mêmes notations μ, ν, P, Q.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $q \in Q$: on a alors les égalités $\boxed{-q}' = \chi_q - q' \underset{q \in Q}{\overset{\chi=0}{=}} -\boxed{-q}$, d'où $\boxed{-q} \in Q$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ La stabilité de Q par opposition montre que $\mu - \nu$ est LA décomposition de a' selon $P \oplus Q$, lequel a' a donc pour image $\mu - (-\nu) = a$. Or cette image vaut aussi $a'' = a + \chi_a$, d'où la nullité voulue.

Pour la route (fixité de $\frac{\chi_a}{2}$). Comment obtenir, lorsque AntiFix f N'est PAS stable par opposition, la décomposition de a' selon Fix $f \oplus$ AntiFix f ? D'après la preuve du théorème central, la partie fixe de a' sera le milieu de ce réel et de son image, à savoir $\frac{a'+a''}{2} = \frac{a'+(a+\chi_a)}{2} = \mu + \frac{\chi_a}{2}$, d'où (par complémentaire à $a' = \mu - \nu$) sa partie antifixée $-\nu - \frac{\chi_a}{2}$. On obtient ainsi les assignations

$$a = \mu + \nu \mapsto \mu - \nu = \overbrace{\underbrace{\mu + \frac{\chi_a}{2}}_{\text{fixe}} + \underbrace{(-\nu) - \frac{\chi_a}{2}}_{\text{antifixé}}}^{cf.\ \text{théorème central}} \mapsto \left(\mu + \frac{\chi_a}{2}\right) - \left(-\nu + \frac{\chi_a}{2}\right) = a + \chi_a.$$

On retrouve lorsque $f = 2\lfloor \cdot \rfloor - \mathrm{Id}$ et a non entier le décalage de ± 1 apparaissant dans les assignations

$$\underbrace{a}_{\text{non entier}} = \mu + \underbrace{\nu}_{\in]0,1[} \mapsto \mu - \nu = \underbrace{\mu - 1}_{\text{entier}} + \underbrace{1 - \nu}_{\in]0,1[} \mapsto (\mu - 1) - (1 - \nu) = a - 2,$$

décalage destiné à "faire rentrer" l'image de la partie fractionnaire dans $]0,1[\subset Q$. Toujours dans ce cas, le décalage de $\frac{\chi_a}{2}$ est un entier (-1), çàd est fixe : une fixité valide dans le cas général en écrivant $\frac{\chi_a}{2} = \frac{\varphi_{a'}}{2} - \frac{\varphi_a}{2}$ et se rappelant (*cf.* théorème central) la fixité des milieux $\frac{\varphi_b}{2}$.

Sanity checks. Le double χ_a du point fixe $\frac{\chi_a}{2}$ est encore fixe, ce que l'on avait de façon beaucoup plus élémentaire en écrivant $\chi_a = \varphi_a + \varphi_{-a}$. L'inclusion $\mathrm{Im}\, \chi \subset \mathrm{Fix}\, f$ livre par ailleurs la nullité $\chi_{|\mathrm{Im}\, \chi} = 0$ et nous redonne ainsi le lemme ZÉRO (çàd un zéro non nul pour χ) : ce dernier est en effet trivial si $\mathrm{Im}\, \chi \neq \{0\}$ et le cas contraire livre la nullité de χ, en particulier hors de 0.

4 Quelques perspectives

1. Dans tout notre exposé, source et but de f étaient le corps des réels. Nous invitons la lectrice à regarder ce qui reste valide en remplaçant $\mathbf{R}$ par un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel voire par un espace vectoriel sur un autre corps.
2. Il est aisé d'établir l'équivalence entre HYPP et la conjonction de HYP− avec les assignations $-a' \mapsto -a$. La question se pose naturellement de trouver d'autres conséquences de HYPP dont la conjonction lui équivaut, et plus généralement de tisser des liens logiques entres toutes les conséquences récoltées (avec contre-exemples à l'appui pour réfuter les implications "fausses").
3. Revenons aux parties $Q \subset \mathbf{R}$ (non vides) telles que $\forall^{\alpha}_{\beta} \in Q$, $\begin{cases} & \beta - \alpha \in Q \\ \text{ou} & \alpha - \beta \in Q \end{cases}$. En dehors de celles stables par opposition (çàd des sous-groupes de $\mathbf{R}$), peut-on en trouver d'autres mis à part les intervalles $[0, \lambda[$? Cette question revient précisément à trouver des contre-exemples autres que $2\lfloor \cdot \rfloor - \mathrm{Id}$. Sans doute la plus gratifiante !

[13] μ comme ci-dessus et ν comme la lettre suivante

4. On peut décrire – par exemple pour montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe – le lieu $\chi^{-1}(\{0\})$ comme l'ensemble des réels g vérifiant l'une au choix des quatre généralités suivantes :

$$\text{(sous-entendu "}\forall\lambda\in\mathbf{R}\text{")}\qquad \begin{array}{ll} (g+\lambda)'=g'+\lambda' & \chi_{g+\lambda}=\chi_g+\chi_\lambda \\ (g+\lambda)'=g+\lambda' & \chi_{g+\lambda}=\chi_\lambda \end{array}.$$

Peut-on *alléger* ces conditions séparantes ? En particulier, peut-on restreindre la quantification "$\forall\lambda\in\mathbf{R}$" à $\mathbf{Z}g$ ou $\mathbf{N}g$? Nous laissons à la lectrice le soin de préciser les huit questions ainsi posées dont nous allons en aborder trois.

Concernant $(g+\lambda)'=g'+\lambda'$, la question est close pour $\mathbf{Z}g$ (regarder $-g$) mais nous ignorons la validité de l'implication

$$\forall n\in\mathbf{N},\ (na)'=na' \quad\overset{?}{\Longrightarrow}\quad \chi_a=0.$$

Quant à $\chi_{g+\lambda}=\chi_\lambda$, la question est close dès $\mathbf{Z}g$: lorsque $f=2\lfloor\cdot\rfloor-\mathrm{Id}$, on a $\chi\left(\mathbf{Z}\sqrt{2}\right)=-2$, ce qui réfute l'implication $\forall z\in\mathbf{Z}$, $\chi_{za}=\chi_a\overset{?}{\Longrightarrow}\chi_a=0$. *Idem* pour $\chi_{g+\lambda}=\chi_g+\chi_\lambda$ de façon bien plus simple : en effet, les égalités $\forall n\in\mathbf{N}$, $\chi_{na}=n\chi_a$ fourniraient si χ_a était non nul autant d'éléments distincts dans $\mathrm{Im}\,\chi$ qui n'en possède qu'au plus deux !

5. Voici quelques autres résultats (aisés à établir) qui ne nous ont pas servi et que nous livrons à la lectrice en guise d'outils pour explorer les perspectives ci-dessus :

(a) $\chi_{a'}=\chi_a$ $\quad$ (*sanity check* : $(a')''=(a'')'$)

(b) $\forall z\in\mathbf{Z},\ \begin{cases} a^{(2z)}-a=z\ \chi_a \\ a^{(2z+1)}-a'=z\ \chi_a \end{cases}$ $\quad$ (récurrence)

(c) $\forall n\in\mathbf{N},\ \delta(nc')=\delta(-nc)$ où $\delta:=f-\mathrm{Id}$ $\quad$ (partir de $nc'=n\varphi_c-nc$)

(d) $\forall n\in\mathbf{N},\ \chi_{na'}=\chi_{na}$ $\quad$ (remplacer c par $\pm a$)

Le point 5c est digne d'intérêt en cela qu'il permet d'illustrer un bon réflexe – hélas ici tué dans l'œuf. Remplaçons en effet n par b et observons l'égalité obtenue

$$\delta(bc')=\delta(-bc)\ \text{ : le membre de droite ne dépend que du produit } bc\ !$$

Exploitons : lorsque $f\neq-\mathrm{Id}$, évoquer un point fixe[14] non nul γ et remplacer $\binom{b}{c}\leftarrow\binom{a/\gamma}{\gamma}$ donne $\delta(a)=\delta(-a)$, çàd $(-a)'=a'-2a$, ou encore $\chi_a=2a'-2a$; retirer $2\varphi_a$ conserve la fixité et donne $-4a$, d'où la fixité de chaque réel. La conclusion $f=\pm\,\mathrm{Id}$ est évidemment contredite par les contre-exemples que l'on connaît... et l'erreur a été d'oublier que notre "réel" b était en fait astreint aux *entiers*[15] – ce qui permettait *via* FixADD de faire sortir le $n\varphi_c$ de l'image $(n\varphi_c-nc)'=n\varphi_c+(-nc)'$.

[14] s'il n'y en a pas, le point fixe $a+a'$ sera alors nul et f vaudra $-\mathrm{Id}$

[15] on peut à la rigueur élargir aux *demi*-entiers vu la fixité des milieux $\frac{\varphi_c}{2}$ obtenue au théorème central