Une équation fonctionnelle alternative (IMO24 Pb6)

Marc SAGE

15 août 2024

Énoncé. *On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications $f : \mathbf{Q} \longrightarrow \mathbf{Q}$ telles que*

$$\forall a, b \in \mathbf{Q},\ \left\{ \text{ou} \begin{array}{l} f(a + f(b)) = f(a) + b \\ f(f(a) + b) = a + f(b) \end{array} \right. . \qquad \textit{Déterminer } \max_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{Card}\left(\{ f(q) + f(-q) \}_{q \in \mathbf{Q}} \right).$$

Soit $f \in \mathcal{F}$ et soient $q, r, s, t \in \mathbf{Q}$. Les images par f seront notées avec des primes, eg $t' := f(t)$.

Introduisons les applications $\varphi := a \mapsto a + a'$ (phi comme "*phi*xe", à voir bientôt) et $\chi := a \mapsto a' + (-a)'$ dont on cherche à majorer le cardinal de l'image.

En notant $\leftrightarrows$ la relation (symétrique) « *est (par f) une image ou un antécédent de* », l'hypothèse se réécrit

$$\forall \begin{array}{c} a \\ b \end{array} \in \mathbf{Q}, \quad \begin{array}{c} a' \\ +b \end{array} \leftrightarrows \begin{array}{c} a \\ +b' \end{array}.$$

Fil directeur : si l'un des membres de l'hypothèse $\leftrightarrows$ est fixe[1] (cela peut se forcer ou arriver par chance), un tel $\leftrightarrows$ deviendra alors un $=$.

(forcer un $=$) Remplacer $\binom{a}{b} \leftarrow \binom{q}{q}$ livre la fixité de φ_q, d'où (imposer $q := 0$) l'égalité $0'' = 0'$.

(des φ_r et φ_q par chance) Montrons l'injectivité de f, l'égalité précédente devenant alors $0' = 0$. Supposons $q' = r'$: remplacer $\binom{a}{b} \leftarrow \binom{q}{r}$ donne alors la relation $\begin{array}{c} q' + r \\ = \varphi_r \end{array} \leftrightarrows \begin{array}{c} q + r' \\ = \varphi_q \end{array}$ dont les deux membres sont fixes, donc ce $\leftrightarrows$ devient un $=$, d'où $q = r$.

(forcer 0) Remplacer $\binom{a}{b} \leftarrow \binom{q}{-q'}$ livre $0 \leftrightarrows q + (-q')'$ dont le membre de gauche est fixe (et à antécédent unique), donc ce $\leftrightarrows$ devient un $=$, d'où[2] l'assignation $-q' \mapsto -q$.

(forcer φ_t) En notant $t^* := -(-t)'$ l'antécédent de t, remplacer $\binom{a}{b} \leftarrow \binom{t^*}{t'}$ donne $\varphi_t \leftrightarrows t'' + t^*$, où le $\leftrightarrows$ est encore un $=$, d'où $t'' = \varphi_t - t^* = t + \chi_t$.

(forcer[3] t') Supposons $\chi_s \chi_t \neq 0$ et imposons par exemple $s' + t \mapsto s + t'$. Remplacer $\binom{a}{b} \leftarrow \binom{s' + t}{-s}$ livre alors $\begin{array}{c} (s' + t)' \\ -s \end{array} \leftrightarrows \begin{array}{c} (s' + t) \\ +(-s)' \end{array}$, çàd $t' \leftrightarrows t + \chi_s \overset{\chi_s \neq 0}{\neq} t$. Par unicité de l'antécédent t de t', ce dernier $\leftrightarrows$ doit être un $\mapsto$, ce qui s'écrit $t'' = t + \chi_s$, çàd $\chi_t = \chi_s$. Il y a par conséquent *au plus une* image par χ non nulle et le maximum cherché vaut au plus 2. Montrons qu'il vaut 2.

(cadeau providentiel[4]) Notons opf l'application qui agit *en opposant la partie fractionnaire* (sans toucher à la partie entière) et supposons $f = \operatorname{opf}$: il serait alors aisé d'établir que χ est nulle sur $\mathbf{Z}$ et vaut -2 partout ailleurs, d'où $\# \operatorname{Im} \chi = 2$.

Il reste pour conclure à établir[5] l'appartenance $\operatorname{opf} \in \mathcal{F}$. Soient donc $\begin{array}{c} a = A + \alpha \\ b = B + \beta \end{array}$ deux rationnels où les lettres majuscules (resp. grecques) dénotent les parties entières (resp. fractionnaires) et prouvons la relation $\begin{array}{c} a' \\ +b \end{array} \overset{?}{\leftrightarrows} \begin{array}{c} a \\ +b\prime \end{array}$. En abrégeant $\begin{pmatrix} E \\ \delta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A + B \\ \beta - \alpha \end{pmatrix}$, on veut $\begin{array}{c} E \\ +\delta \end{array} \overset{?}{\leftrightarrows} \begin{array}{c} E \\ -\delta \end{array}$, çàd[6] $\begin{array}{c} E \\ +|\delta| \end{array} \overset{?}{\leftrightarrows} \begin{array}{c} E \\ -|\delta| \end{array}$; vu l'encadrement $0 \leq |\delta| < 1$ et l'intégralité de E, ce dernier $\overset{?}{\leftrightarrows}$ est réalisé par un $\mapsto$, ce qui conclut.

[1] et à antécédent unique – mais l'injectivité de f sera bientôt un acquis

[2] En d'autres termes, le graphe de f est symétrique par rapport à la *seconde* bissectrice. Viendrait également à travers les relations $\left(-(-q)'\right)' = q$ la surjectivité de f et, partant, *sa bijectivité*.

[3] contrairement à notre fil directeur, l'intérêt de t' n'est pas quelque fixité mais *la simplicité* de son antécédent

[4] voir le texte *bonus* pour éclairer l'orgine d'un tel parachutage

[5] *point rigueur* : à établir en dehors bien sûr de la supposition $f = \operatorname{opf}$ du paragraphe précédent – nous serions sinon à la merci de la supposition $f \in \mathcal{F}$ du tout début !

[6] on utilise l'égalité $\{\delta, -\delta\} = \{|\delta|, -|\delta|\}$ et la symétricité de $\leftrightarrows$