

Une équation fonctionnelle "optimale" (IMO22 Pb2)

Marc SAGE

24 juillet 2022

Énoncé. Trouver toutes les applications $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ telles que, pour chaque réel $a > 0$, il y a un unique réel $b > 0$ tel que $af(b) + bf(a) \leq 2$.

Soit un tel f . À $a > 0$ fixé, appelons $F_a := af + f(a)\text{Id}$ et notons a^* le b comme dans l'énoncé, de sorte que

$$F_a > 2 \text{ sauf en } a^* \text{ où } 2 \geq F_a(a^*).$$

Heuristique : si f C0, alors F_a aussi, donc ne peut PAS passer UNE SEULE fois < 2 , donc son min ne peut pas < 2 , çàd $\min F_a \geq 2$, d'où l'égalité $\forall a > 0, \min F_a = 2$. On en déduira pour chaque $t > 0$ les majorations

$$2 = \min F_t \leq F_t(t) = 2tf(t), \text{ d'où } f(t) \geq \frac{1}{t},$$

puis à $a > 0$ fixé l'encadrement

$$2 = F_a(a^*) = af(a^*) + a^*f(a) \geq \frac{a}{a^*} + \frac{a^*}{a} \geq 2,$$

d'où égalité partout, ce qui force en particulier l'égalité dans $f(a) \geq \frac{1}{a}$ utilisée (et au passage $a^* = a$ mais OSEF).

Réciproquement, si $f = \frac{1}{\text{Id}}$, alors $F_a(t) = \frac{a}{t} + \frac{t}{a} \geq 2$ avec $=$ ssi $t = a$, d'où la condition voulue avec $a^* := a$.

Retour à la case départ : nous allons établir une hypothèse de monotonie qui fera office de continuité afin de raccrocher les wagons.

Mq $t \mapsto t^*$ involutive : pour chaque $a, b > 0$, on a les équivalences

$$b = a^* \iff F_a(b) \leq 2 \iff F_b(a) \leq 2 \iff a = b^*,$$

d'où (remplacer $b \leftarrow a^*$) l'égalité $a = a^{**}$.

Mq f décroît strictement. Soient par l'absurde $r < s$ tq $f(r) \leq f(s)$. Alors

$$F_r(s^*) = rf(s^*) + s^*f(r) \leq sf(s^*) + s^*f(s) = F_s(s^*) \leq 2,$$

d'où l'égalité $s^* = r^*$, çàd $r = s$, contredisant l'hypothèse $r < s$.

Concluons $\forall a > 0, \min F_a = 2$. Soit $a > 0$. On sait déjà majorer $\min F_a \leq 2$. Soit ensuite $\varepsilon > 0$: alors $a^* + \varepsilon$ n'est pas là où F_a minimum, donc

$$2 < F_a(a^* + \varepsilon) = a \underbrace{f(a^* + \varepsilon)}_{< f(a^*)} + (a^* + \varepsilon)f(a) < a \underbrace{f(a^*) + a^*f(a)}_{= F_a(a^*)} + \varepsilon f(a) = \min F_a + \varepsilon f(a),$$

d'où (faisant "tendre $\varepsilon \rightarrow 0$ ") la majoration $2 \leq \min F_a$, CQSD.