Une majoration "moins ou plus" symétrique
(IMO21 Pb2)

Marc SAGE

août 2021

Énoncé. *Soit $n \in \mathbf{N}$, soit $a \in \mathbf{R}^n$. Prouver la comparaison*

$$\sum_{i,j} \sqrt{|a_i - a_j|} \leq \sum_{i,j} \sqrt{|a_i + a_j|}.$$

Notons $\boxed{r} := \sqrt{|r|}$ pour chaque réel r. L'application $t \mapsto \boxed{t}$ est alors concave sur $\mathbf{R}_+$ et paire (*a fortiori* concave sur $\mathbf{R}_-$), les seules hypothèses[1] que nous utiliserons pour établir la comparaison voulue :

$$\sum_{i,j} \boxed{a_i - a_j} \overset{?}{\leq} \sum_{i,j} \boxed{a_i + a_j}.$$

Idée 1 (symétries du problème) Translater les a_i d'un même réel ne change pas le membre de gauche, donc le membre de droite vu comme fonction du vecteur translateur doit (si l'énoncé est correct) être minimum en 0. Étudions donc les *mimima* de cette application $f := t \mapsto \sum_{i,j} \boxed{(a_i - t) + (a_j - t)}$.

Idée 2 (*minima* et convexité) La fonction f est somme de fonctions de la forme $t \mapsto \boxed{\alpha - 2t}$, chacune concave sur chaque intervalle de $\mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\alpha}{2} \right\}$, donc est concave sur chaque intervalle de $\mathbf{R} \Big\backslash \left\{ \frac{a_p + a_q}{2} \right\}_{p,q}$, *a fortiori* minorée par le plus petite des images des milieux $\frac{a_p + a_q}{2}$. Regardons donc ces n^2 images et montrons que chacune majore le minorant souhaité $\sum_{i,j} \boxed{a_i - a_j}$, en commençant par[2] le cas diagonal $p = q$.

Idée 3 (récurrence) Soit $p \in [1, n]$ entier : le milieu $\frac{a_p + a_q}{2}$ valant a_p, il s'agit de minorer

$$f(a_p) \overset{?}{\geq} \sum_{i,j} \boxed{a_i - a_j}, \quad \text{çàd } \sum_{i,j} \boxed{a'_i + a'_j} \overset{?}{\geq} \sum_{i,j} \boxed{a_i - a_j} \qquad \begin{array}{c} \text{où l'on a noté } a'_i := a_i - a_p \\ \text{pour chaque entier } i \in [1, n]. \end{array}$$

Raisonner par récurrence sur les $(a'_i)_{i \neq p}$ permet déjà de minorer

$$\sum_{i,j \neq p} \boxed{a'_i + a'_j} \geq \sum_{i,j \neq p} \boxed{a'_i - a'_j}.$$

Ensuite, sur la "croix" restante ($i = p$ ou $j = p$), la nullité de a'_p livre les égalités

$$p \in \{i, j\} \Longrightarrow \boxed{a'_i + a'_j} = \boxed{a'_i - a'_j} \qquad \begin{array}{l} \text{(pour la ligne "}i = p\text{", on a} \\ \text{utilisé la parité de } t \mapsto \boxed{t}) \end{array}.$$

Vu enfin les égalités (inconditionnelles) $\boxed{a'_i - a'_j} = \boxed{a_i - a_j}$, additionner le tout livre la minoration souhaitée.

Idée 4 (combinatoire de sommes) Soient à présent $p \neq q$ deux entiers de $[1, n]$ et évaluons f en $\frac{a_p + a_q}{2}$. En procédant comme ci-dessus et en gardant les notations $a'_i := a_i - \frac{a_p + a_q}{2}$, il suffit d'établir sur la "double-croix" [i-ou-j égale p-ou-q] la minoration

$$\sum_{\substack{p \in \{i,j\} \\ \text{ou } q \in \{i,j\}}} \boxed{a'_i + a'_j} \overset{?}{\geq} \sum_{\substack{p \in \{i,j\} \\ \text{ou } q \in \{i,j\}}} \boxed{a_i - a_j},$$

[1] Nous verrons lors du peafinage final une hypothèse supplémentaire (et nécessaire) qui est passée entre les mailles du filet... Saurez-vous la débusquer d'ici là ?

[2] cas plus simple tout en donnant l'idée du cas hors diagonale

la somme restante $\sum_{i,j\notin\{p,q\}}$ se réglant par récurrence (comme pour le cas diagonal). Montrons que la minoration désirée $\overset{?}{\geq}$ est en fait une *égalité*, en réarrangement simplement des termes identiques.

En effet, sur la ligne $[i=p]$, le terme général de la somme de gauche vaut

$$\boxed{a'_p + a'_j} = \boxed{\begin{array}{c} a_p + a_j \\ -\left(a_p + a_q\right) \end{array}} = \boxed{a_j - a_q} = \boxed{a_q - a_j},$$

çàd le terme général de la somme de droite sur l'*autre* ligne "$i = q$" (et sur la même colonne) : échanger ces lignes $p \leftrightarrow q$ puis sommer le tout livre alors l'égalité des sommes de gauche et de droite sur la "double-ligne" $i \in \{p, q\}$:

$$\sum_{\substack{i\in\{p,q\} \\ j=1,\ldots,n}} \boxed{a'_i + a'_j} = \sum_{\substack{i\in\{p,q\} \\ j=1,\ldots,n}} \boxed{a_i - a_j}.$$

On montrerait de même l'égalité des sommes de gauche et de droite sur la "double-colonne" $j \in \{p, q\}$ privée des 4 cases $\{i, j\} \subset \{p, q\}$ (lesquelles apparaissent déjà sur la double-ligne précédente), ce qui conclut.

Idée 5 (rigueur) N'oublions pas d'initialiser notre récurrence... Lorsque n est nul, on veut majorer $0 \overset{?}{\leq} 0$ (trivial) ; lorsque $n = 1$ (notons alors $\alpha := a_1$), on veut majorer $\boxed{\alpha - \alpha} \leq \boxed{2\alpha}$, et cela pour chaque réel α, ce qui revient à dire que notre application $t \mapsto \boxed{t}$ est minimale en 0. Or, vu le contre-exemple $t \mapsto -|t|$, cela ne découle pas de nos seules hypothèses affirmées ! Nous devons donc, outre la concavité sur $\mathbf{R}_+$ et la parité, rajouter la croissance sur $\mathbf{R}_+$ pour enclencher notre récurrence à deux crans. (Tout cela est bien entendu vérifié par la fonction originelle $t \mapsto \sqrt{|t|}$ de l'énoncé.)