Une équation fonctionnelle "toute relative" (IMO19 Pb1)

Marc SAGE

août 2021

Énoncé. *Trouver toutes les applications* $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}$ *telles que*

$$\forall a, b \in \mathbf{Z},\ f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Stratégie :

1. déterminer les solutions affines (les solutions linéaires étant clairement de rapport 0 ou 2) ;
2. montrer que chaque solution est affine (*outils* : deux symétries[1] de l'argument $a+b$ apparaissant à droite).

---

1. Soient $p, C \in \mathbf{Z}$ et notons $f := p\,\mathrm{Id} + C$. On a alors pour chaques $a, b \in \mathbf{Z}$ les égalités

$$\begin{aligned} f(2a) + 2f(b) &= p(2a) + C + 2(pb + C) = 2p\boxed{a+b} + 2C\underline{\underline{+C}} \\ \text{et } f(f(a+b)) &= p(p(a+b) + C) + C = p^2\boxed{a+b} + pC\underline{\underline{+C}}, \end{aligned}$$

d'où les équivalences[2]

$$\begin{aligned} f \text{ solution} &\iff \forall s \in \mathbf{Z},\ 2ps + 2C = p^2 s + pC \\ &\iff \begin{cases} 2p = p^2 \\ 2C = pC \end{cases} \iff \begin{cases} p \in \{0, 2\} \\ C = 0 \text{ ou } 2 = p \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} p \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou } p = 2 \iff \begin{cases} f = 0 \text{ ou} \\ f = 2\,\mathrm{Id} + C \end{cases}. \end{aligned}$$

Les solutions affines sont donc l'applications nulles et les binômes affines de pente 2.

2. Soit f une solution. Pour chaque $z \in \mathbf{Z}$, notons $z' := f(z)$. En abrégeant $\lambda := 0'$, il s'agit de montrer la linéarité de l'application $f - \lambda$, çàd son additivité (sa source étant $\mathbf{Z}$). Soient donc $a, b \in \mathbf{Z}$. En notant $z^* := f(z)$ pour chaque relatif z, il s'agit d'établir l'égalité $(a+b)^* = a^* + b^*$.

Exploitation de la symétrie de transposition. L'énoncé se réécrit

$$(2a)' + 2b' = (a+b)''.$$

Le membre de droite étant symétrique en a et b, celui de gauche aussi, laquelle symétricité s'écrit[3] $(2a)' + 2b' = (2b)' + 2a'$, ou encore (en regroupant les a et les b d'une part et d'autre) $(2a)' - 2a' = (2b)' - 2b'$, d'où la constance de l'application $z \mapsto (2z)' - 2z' \overset{\text{évaluer en } 0}{=} \lambda - 2\lambda = -\lambda$. En résulte l'égalité $(2a)' = 2a' - \lambda$, ce qui permet de réécrire l'énoncé sous la forme[4]

$$2(a' + b') - \lambda = (a+b)''.$$

Exploitation de la symétrie "des vases communicants". La somme $a^* + b^* = \frac{(a+b)'' - 3\lambda}{2}$ ne dépend que de $a+b$, donc vaut également[5] $(a+b)^* + 0^*$, ce qui conclut vu la nullité de 0^*.

---

[1] Ces symétries seront la transposition $\binom{a}{b} \mapsto \binom{b}{a}$ et la symétrie "des vases communiquants" $\binom{a}{b} \mapsto \binom{a+1}{b-1}$.

[2] quantifier sur deux relatifs a et b un prédicat ne dépendant que de la somme $a+b$ revient à quantifier sur un seul relatif s le même prédicat évalué en s

[3] *Proprement* : soient $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, notons $C := (\alpha + \beta)''$, alors remplacer $\begin{matrix} a \leftarrow \alpha \\ b \leftarrow \beta \end{matrix}$ et $\begin{matrix} a \leftarrow \beta \\ b \leftarrow \alpha \end{matrix}$ donne $(2\alpha)' + 2\beta^* = C = (2\beta)' + 2\alpha'$.

[4] Les deux membres de l'énoncé étant désormais symétriques (au sens de la transposition), il n'y plus rien à tirer de cette symétrie.

[5] "Remplir entièrement le vase a" correpond à la symétrie $\binom{a}{b} \mapsto \binom{a+b}{0}$. *Proprement* : soient $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, notons $C := \frac{(\alpha+\beta)'' - 3\lambda}{2}$, alors remplacer $\begin{matrix} a \leftarrow \alpha \\ b \leftarrow \beta \end{matrix}$ et $\begin{matrix} a \leftarrow \alpha + \beta \\ b \leftarrow 0 \end{matrix}$ donne $(\alpha + \beta)^* + 0^* = C = \alpha^* + \beta^*$.