Une jolie équation fonctionnelle (IMO17 Pb2)

Marc SAGE

août 2017

Énoncé. *Déterminer les applications* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *telles que*

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ f(a+b) + f(f(a) f(b)) = f(ab).$$

Débrouissallage. Deux remarques préliminaires :

1) l'application nulle est solution ; 2) si f est solution alors $-f$ aussi.

Soit f une solution non nulle (*cf.* rq 1), par lequelle on note les images avec des primes, l'égalité ci-dessus se réécrivant alors

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ f(a+b) = f(ab) - f(a'b').$$

(antécédents de 0*)* Si $0' = 0$, remplacer $b \leftarrow 0$ donne alors $a' = 0' - f(0) = 0$, d'où l'*absurde* nullité de f. Ainsi, si 0 admet un antécédent $a \neq 1$, remplacer $b \leftarrow \frac{a}{a-1}$ livre alors $ab = a + b$ et $f(0) = f(a'b') = f(ab) - f(a+b) = 0$, égalité que l'on vient de réfuter. En résultent les implications

$$\forall r \in \mathbf{R},\ r' = 0 \Longrightarrow r = 1.$$

(images de 0 *et* 1*)* Remplacer $a, b \leftarrow 0$ donne $ab = a + b$, d'où $f(a'b') = 0$, donc $a'b' = 1$, çàd $0'^2 = 1$, d'où $1' = 0$ et $0' = \pm 1$. On peut alors imposer (*cf.* rq 2)

$$0' = -1 \text{ et } 1' = 0.$$

(respect de l'in/dé-crémentation) Remplacer $b \leftarrow 1$ livre $f(a+1) = a' - f(0) = a' + 1$, d'où (remplacer $a \leftarrow c - 1$) l'égalité $f(c-1) = c' - 1$.

Une heuristique. Remplacer $b \leftarrow 0$ donne $a' = -1 - f(-a')$, d'où $f = \operatorname{Id} - 1$ sur $-\operatorname{Im} f$. Il n'est donc pas déraisonnable à ce stade d'espérer l'égalité $f \overset{?}{=} \operatorname{Id} - 1$ sur tout $\mathbf{R}$.

Reformulation. Notons $\underline{\underline{F := 1 + f}}$. Nous allons montrer l'égalité $\boxed{F \overset{?}{=} \operatorname{Id}}$.

Les images par F seront notées avec des astérisques, de sorte que les résultats précédents se réécrivent

$$\underline{\underline{0^* = 0}} \qquad \underline{\underline{1^* = 1}} \qquad \underline{\underline{a^* = 1 \implies a = 1}} \qquad \underline{\underline{F(a \pm 1) = a^* \pm 1}} \qquad \text{d'où } \underline{\underline{(-1)^* = -1}}.$$

L'équation originelle avec remplacement $\begin{matrix} a \leftarrow \alpha + 1 \\ b \leftarrow \beta + 1 \end{matrix}$ se réécrit alors

$$f(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) = f(\alpha + \beta + 1) + 1 + f(\ f(\alpha + 1)\ \ f(\beta + 1)\ ),$$

$$\text{çàd}^1\ \underline{\underline{F(\alpha\beta + \alpha + \beta) = F(\alpha + \beta) + F(\alpha^* \beta^*)}}.$$

[1] Bien que la présence de $\alpha + \beta$ à gauche soit plus compliquée que l'équation initiale sur f, tout ce qui suit d'exprimera plus simplement avec F (censée valoir Id, valeur plus simple que celle $\operatorname{Id} - 1$ attendue pour f).

Prépartion du 4-quarts (incrémenter, décrémenter, inverser, opposer).

(inversion) Imposer $\alpha\beta = 1$ donne $1 + F(\alpha+\beta) = F(\alpha+\beta) + F(\alpha^*\beta^*)$, d'où $F(\alpha^*\beta^*) = 1$, çàd $\alpha^*\beta^* = 1$. On en déduit les égalités[2]

$$\forall\alpha \neq 0,\ F\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^*}.$$

L'idée est alors de montrer l'additivité de F, ce qui conclura d'après un exercice classique[3]. Pour cela, nous allons montrer que F préserve les doubles puis confronter cette forme d'homogénéité à la non-homogénéité de l'équation de F.

(opposition) Pour chaque réel $\gamma \notin \{0,1\}$, remplacer[4] $\alpha \leftarrow \frac{\gamma}{1-\gamma}$ fournit $F\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) = \frac{1}{F\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} = \frac{1}{F\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} = \frac{1}{F\left(\frac{1}{\gamma}\right)-1} = \frac{1}{\frac{1}{\gamma^*}-1} = \frac{\gamma^*}{1-\gamma^*} = \frac{1}{1-\gamma^*} - 1$, le membre de gauche se réécrivant par ailleurs $F\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) = F\left(\frac{1}{1-\gamma} - 1\right) = \frac{1}{1+F(-\gamma)} - 1$, d'où l'égalité $F(-\gamma) = -\gamma^*$, valide même si $\gamma \in \{0,1\}$.

(idempotence) Remplacer $\beta \leftarrow -1$ livre $F(-\alpha+\alpha-1) = F(\alpha-1) + F\left((-1)^*\alpha^*\right)$, çàd $-1 = \alpha^* - 1 + F(-\alpha^*)$, d'où[5] $\alpha^{**} = \alpha^*$.

(doubler) Remplacer $\beta \leftarrow 1$ donne $F(2\alpha+1)) = F(\alpha+1) + F(1^*\alpha^*)$, çàd $F(2\alpha) + 1 = \alpha^* + 1 + \alpha^{**}$, d'où $(2\alpha)^* = 2\alpha^*$.

Cuisson. Remplacer enfin $\left\{\begin{array}{l}\alpha \leftarrow 2a\\ \beta \leftarrow 2b\end{array}\right.$ livre $F(4ab+2a+2b) = F(2a+2b) + F(4a^*b^*)$ et diviser par 4 en notant $\left\{\begin{array}{l}p := ab\\ \sigma := \frac{a+b}{2}\end{array}\right.$ fournit

$$F(p+\sigma) - F(\sigma) = F(a^*b^*) = F(ab+a+b) - F(2\sigma) = F(p+2\sigma) - 2F(\sigma),$$

égalités tenant pour chaques réels p, σ vérifiant[6] $\sigma^2 \geq p$. Or, étant donnés deux réels p et σ (sans condition), on aura la comparaison $(\sigma+N)^2 > p$ pour N assez grand, donc (après simplification[7] par N) l'égalité ci-dessus est valide *sans condition* sur p et σ et se réécrit $F(p+\sigma) + F(\sigma) = F((p+\sigma)+\sigma)$. En particulier, remplacer $\left\{\begin{array}{l}\sigma \leftarrow v\\ p \leftarrow u-v\end{array}\right.$ livre $F(u) + F(v) = F(u+v)$, *CQFD.*

Dégustation. Les trois applications recherchées sont 0, $\mathrm{Id} - 1$ et $1 - \mathrm{Id}$.

Autre piste[8]**.** Une fois imposées les égalités $0' \underline{\underline{=}} 1$ et $1' = 0$, il serait possible de partir de l'égalité $a'' = 1 - a'$ (obtenue en remplaçant $b \leftarrow 0$), d'en déduire celles

$$f(1-a')' = [a'']' = a''' = [a']'' = 1 - [a']' = 1 - a'' = f(a)$$

et de conclure $a' = 1 - a$ en montrant l'*injectivité* de f. On a déjà l'injectivité "en 0" vu les implications

$$a' = 0' \Longrightarrow f(a+1) \overset{b \leftarrow 1}{=} a' - 0' = 0 \Longrightarrow a + 1 = 1 \Longrightarrow a = 0.$$

Soient ensuite $s, p \in \mathbf{R}$ tels que $s' = p'$ et soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $\left\{\begin{array}{l}a+b = s\\ ab = p-1\end{array}\right.$. Une telle évocation est permise si $s^2 \geq 4(p-1)$, comparaison valide en incrémentant suffisament s et p à la fois (cela ne change pas l'hypothèse $s' = p'$ puisque f respecte l'incrémentation !). On a alors les égalités

$$f(a'b') = f(ab) - f(a+b) = f(p-1) - f(s) = p' + 1 - s' = 1,$$

d'où[9] $a'b' = 0$, mettons (par symétrie) $a' = 0$, d'où $a = 1$ et $s = a + b = 1 + b = 1 + ab = p$, *CQFD.*

---

[2] L'inversivité de F permettrait de montrer qu'elle fixe chaque rationnel par récurrence sur le dénominateur réduit (un peu comme l'on appliquerait la loi de réciprocité quadratique), renforçant ainsi notre confiance en l'égalité $F = \mathrm{Id}$ désirée.

[3] Écrire par exemple $\left[\frac{a+b}{ab}\right]^* = \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right]^* = \frac{1}{a^*} + \frac{1}{b^*} = \frac{[a+b]^*}{a^*b^*}$, puis imposer $a + b = 1$ pour obtenir (après simplification) $\left[a^2\right]^* = a^{*2}$, d'où la croissance de F et sa linéarité.

[4] L'idée est de mélanger l'inversion, l'incrémentation, la décrémentation et l'opposition, tout en sachant que F en préserve au moins trois sur les quatre.

[5] remplacer $\gamma \leftarrow \alpha^*$ dans l'égalité $F(-\gamma) = -\gamma^*$ venant d'être établie

[6] remplacer en effet $a, b \leftarrow \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - p}$

[7] Une récurrence immédiate montrerait à a réel fixé les égalités $\forall z \in \mathbf{Z},\ F(a+z) = a^* + z^*$.

[8] inspirée de https ://www.quora.com/How-do-you-solve-P2-from-the-2017-International-Math-Olympiad

[9] C'est ici que l'on comprend le décalage $p\underline{\underline{-\mathbf{1}}}$ imposé dans l'évocation de a et b.