Une équation fonctionnelle coriace (IMO15 Pb5)

Marc SAGE

août 2015

Énoncé. *Déterminer les applications* $f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$ *telles que*

$$\forall a,b\in\mathbf{R},\quad \begin{array}{l} f\left(a+f\left(a+b\right)\right)+f\left(ab\right)\\ =a+f\left(a+b\right)+f\left(a\right)b\end{array}.$$

Soit un tel f. L'identité étant clairement solution, notons $\delta:=f-\mathrm{Id}$ et appelons Z son lieu d'annulation. On notera les images par δ avec des barres coiffantes, l'équation se réécrivant alors[1]

$$\forall a,b\in\mathbf{R},\ \delta\left(2a+b+\overline{a+b}\right)=\overline{a}b-\overline{ab}.$$

Remplacer $b\leftarrow 1$ donne $\delta\left(2a+1+\overline{a+1}\right)=0$, çàd (remplacer $a\leftarrow c-1$) $2c-1+\overline{c}\in Z$.
Si Z est inclus dans $\{1\}$, alors $\overline{c}=2-2c$ et $f=2-\mathrm{Id}$, laquelle est bien solution vu les égalités

$$2-(a+(2-a-b))+2-ab=b-ab=a+(2-(a+b))+(2-a)\,b.$$

Supposons désormais le contraire et montrons l'égalité $Z=\mathbf{R}$.

En conclusion, les applications recherchées seront Id et $2-\mathrm{Id}$.

Remplacer $a\leftarrow 0$ donne $\delta\left(b+\overline{b}\right)=(b-1)\,\overline{0}$. Évoquer un $\zeta\neq 1$ dans Z puis remplacer $b\leftarrow\zeta$ livre alors les égalités $(\zeta-1)\,\overline{0}=\delta\left(\zeta+\overline{\zeta}\right)=\delta\left(\zeta+0\right)=\overline{\zeta}=0$, d'où les égalité et appartenances

$$\overline{0}=0,\qquad b+\overline{b}\in Z\qquad\text{et}^2\qquad -1\in Z.$$

Échanger a et b, noter $s:=a+b$ puis soustraire fournit $\delta\left(s+a+\overline{s}\right)-\delta\left(2s-a+\overline{s}\right)=(s-a)\,\overline{a}-a\overline{s-a}$.
Remplacer[3] $s\leftarrow 0$ donne $\overline{a}-\overline{-a}=-a\overline{a}-a\overline{-a}$, çàd $(1+a)\,\overline{a}=(1-a)\,\overline{-a}$. Remplacer $a\leftarrow 1$ livre

$$\overline{1}=0$$

et les égalités $\forall a\neq 1,\ \overline{-a}=\frac{1+a}{1-a}\overline{a}$ montrent (avec l'appartenance $-1\in Z$)

la stabilité de Z par opposition.

Remplacer $a\leftarrow 1$ donne $\delta\left(2+b+\overline{1+b}\right)=\overline{1}b-\overline{b}=-\overline{b}$, çàd (remplacer $b\leftarrow c-1$)

$$\delta\left(c+1+\overline{c}\right)=-\overline{c-1}.$$

Nous allons montrer que Z est stable par incrémentation, ce qui (avec l'égalité précédente et sachant $c+\overline{c}\in Z$) livrera l'appartenance $c-1\in Z$ et la nullité de δ. Il suffit pour cela d'établir la stabilité de Z par décrémentation[4].

Soit donc $z\in Z\setminus\{1,2\}$ et notons d le décrémenté $z-1$ (les décrémentés 0 et 1 sont déjà dans Z). Remplacer $\left\{\begin{array}{l} a\leftarrow -1\\ b\leftarrow z+1\end{array}\right.$ donne $\delta\left(d+\overline{z}\right)=-\overline{-z-1}\overset{\text{remplacer}}{\underset{c\leftarrow -z}{=}}\delta\left(-z+1+\overline{-z}\right)$, d'où (vu que $z,-z\in Z$) l'égalité $\overline{d}=\overline{-d}$.
Or l'hypothèse $d\neq 1$ permet[5] d'écrire $\overline{-d}=\frac{1+d}{1-d}\overline{d}$ et l'hypothèse $d\neq 0$ de conclure $\overline{d}=0$.

[1] Nous encourageons la lectrice trouvant cette réécriture inélégante et coûteuse à traduire notre preuve entièrement en termes de f. Le coût de la traduction augmentera sensiblement vers la fin, ce qui fera d'autant apprécier le point de vue de δ.

[2] Dans l'appartenance $2c-1+\overline{c}\in Z$, remplacer $c\leftarrow 0$ montre que Z contient $2\cdot 0-1+\overline{0}$.

[3] À a fixé, ce s peut être imposé *à volonté* en remplaçant $b\leftarrow s-a$.

[4] Incrémenter revient en effet à opposer, décrémenter puis opposer.

[5] On a vu plus haut comment δ agissait sur l'opposition.