Géométrie affine

Marc SAGE

10 mai 2007

Table des matières

Une jolie vision d'un espace affine est celle d'un espace vectoriel dont on a effacé l'origine. Pour pouvoir dilater un vecteur, il faut alors choisir une origine. Ceci peut se résumer en :

$$\text{affine} = \text{vectoriel} + \text{constante}.$$

1 Applications affines et barycentres

Montrer qu'une application est affine ssi elle conserve le barycentre.

Solution proposée.

Le sens direct est plus ou moins du cours : si f s'écrit $\overrightarrow{f}+a$ où $\overrightarrow{f}$ est linéaire et $a=f(0)$ une consante, on a

$$f(\lambda x+\mu y)=\overrightarrow{f}(\lambda x+\mu y)+a=\lambda\overrightarrow{f}(x)+\mu\overrightarrow{f}(y)+(\lambda+\mu)a=\lambda f(x)+\mu f(y).$$

Pour la réciproque, il s'agit de montrer que la différence $\delta=f-f(0)$ est linéaire. Pour cela, on fait apparaitre un barycentre en considérant le vecteur nul :

$$\begin{aligned}\delta(\lambda x+\mu y) &= f(\lambda x+\mu y+(1-\lambda-\mu)0)-f(0)\\ &= \lambda f(x)+\mu f(y)+(1-\lambda-\mu)f(0)-f(0)\\ &= \lambda(f(x)-f(0))+\mu(f(y)-f(0))\\ &= \lambda\delta(x)+\mu\delta(y),\ \mathit{CQFD}.\end{aligned}$$

2 Un peu de géométrie

• *Soit ABC un triangle. La bissectrice issue de A coupe $[BC]$ en A'. On définit de même B' et C'. En exprimant de deux manières différentes l'aire de $AA'B$, montrer que les trois bissectrices sont concourantes.*

• *Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note I,J,K les milieux respectifs de $[AB],[AC],[AD]$ et I',J',K' les miliex des arêtes opposées. Montrer que les droites $(II'),(JJ')$ et (KK') sont concourantes en le centre du tétraèdre.*

Solution proposée.

Dans ces histoires de concours, tout se plie à coups de barycentres : pour prouver qu'un point est sur une droite (PQ), on montre que ce point est barycentre de P et Q.

• En notant h la hauteur de ABC issue de A et α le demi-angle au sommet, l'aire $AA'B$ s'exprime par

$$\frac{1}{2}\ h\ A'B=\frac{1}{2}AB\ AA'\ \sin\alpha.$$

De même pour $AA'C$, d'où en prenant le quotient

$$\frac{A'B}{A'C}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

avec les notations classiques du triangle. Ceci montre que A' s'exprime comme le barycentre

$$A'=\operatorname{bar}\begin{vmatrix}B & C\\ b & c\end{vmatrix}.$$

Par permutation cyclique, on a évidemment des expressions similaires pour B' et C'. Ainsi, en considérant le point

$$I:=\operatorname{bar}\left|\begin{array}{ccc}A & B & C\\ a & b & c\end{array}\right|,$$

l'associativié permet d'écrire $I = \operatorname{bar}\begin{vmatrix} A & A' \\ a & b+c \end{vmatrix}$, ce qui montre que I est sur la droite (AA'). Par permutation circulaire, I est à l'intersection recherchée.

• Le centre du tétraèdre est défini par $G := \operatorname{bar}\left|\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right|$. On peut associer les sommets pour faire apparaitre les points voulus :

$$G = \operatorname{bar}\left|\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \operatorname{bar}\left|\begin{array}{cc} I & I' \\ 2 & 2 \end{array}\right| \in (II'),$$

d'où $G \in (II')$ et de même pour (JJ') et (KK'), *CQFD.*

3 Pour se rôder aux parties linéaires

- *Montrer qu'une application affine f commute à une translation t_u ssi u est fixé par $\overrightarrow{f}$.*
- *En déduire les applications affines dont la partie linéaire est une symétrie.*

Solution proposée.

• Le résultat est clair en comparant les deux expressions :

$$\left\{\begin{array}{c} ft_u = \overrightarrow{f}(\cdot + u) + f(0) = \overrightarrow{f} + \overrightarrow{f}(u) + f(0) \\ t_u f = \left(\overrightarrow{f} + f(0)\right) + u = \overrightarrow{f} + u + f(0) \end{array}\right. .$$

• On peut écrire $f = t_u s$ où s est une symétrie linéaire et t_u la translation de vecteur $u = f(0)$. Le carré de $\overrightarrow{f}$ valant l'identité, f^2 est une translation de vecteur v. Pour obtenir v, on regarde

$$f^2 = s(s+u) + u = \mathrm{Id} + \underbrace{u + s(u)},$$

d'où $v = u + s(u)$ qui a le bon goût d'être fixe par s. On en déduit que f et t_v commutent par le premier point, ce qui permet de calculer facilement les puissances du produit ft_v. Mais s fixe plus généralement toute la droite $\mathbb{R}v$, donc f commute avec $t_{\lambda u}$ pour tout scalaire λ : choisissons λ de sorte que le résultat du calcul des puissances de $ft_{\lambda u}$ soit gentil :

$$\begin{array}{rcl} (ft_{\lambda v})^2 & = & (ft_{\lambda v})(t_{\lambda v} f) = ft_{2\lambda v} f = s((s+u) + 2\lambda v) + u \\ & = & \mathrm{Id} + s(u) + u + 2\lambda s(v) = \mathrm{Id} + (2\lambda + 1) v. \end{array}$$

Le choix $\lambda = -\frac{1}{2}$ s'impose de lui-même. $ft_{\lambda v} = t_{\lambda v} f$ est donc une symétrie affine σ, ce qui permet d'écrire f comme le produit d'une symétrie par une translation qui commutent. Cette écriture est de plus unique car le vecteur de translation vaut $\frac{u+s(u)}{2}$ où s et u sont entièrement déterminés par f – on obtient σ en posant $\sigma = f\tau^{-1}$.

Réciproquement, l'écriture $f = \sigma\tau$ implique $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\sigma}\overrightarrow{\tau} = \overrightarrow{\sigma}$ symétrie.

4 Une idée à retenir

Soit G un sous-groupe fini du groupe affine sur un ev E. Montrer qu'il y a un point de E fixe par tous les éléments de G.

Solution proposée.

Avec les groupes finis, une idée vriament classique est que les translations sont des automorphismes ; imaginez un cercle qui tourne sur lui-même : il ne change pas. Cela permet de montrer que la somme sur tous les éléments du groupe (lorqu'elle a un sens) est invariante par translation. Généralement, pour homogénéniser, on préfèrera prendre la moyenne.

Considérons donc la moyenne des images d'un point a donné par les éléments du groupe :

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(a).$$

Cela a un sens car on prend un barycentre dans un espace affine. Appliquons un élément g_0 de G :

$$g_0(m) = g_0\left(\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g(a)\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g_0 g(a) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h(a) = m.$$

m est donc fixe par G, *CQFD.*

5 Théorème de Carathéodory

Soit E un ev de dim finie n. On appelle *barycentre* d'une famille de points toute combinaison linéaire de ces points dont la somme des coefficients (qui seront pris *positifs*) vaut 1. On appelle *enveloppe convexe* d'une partie $A \subset E$ le plus petit convexe qui contient A ; on la note $\operatorname{Conv} A$.

• *Montrer qu'une partie est convexe ssi elle est par passage au barycentre positif. En déduire que* $\operatorname{Conv} A$ *est l'ensemble des barycentres positifs des points de A.*
• *Soit une A une partie de E. Montrer que tout point de* $\operatorname{Conv} A$ *peut s'écrire comme barycentre d'au plus* $n+1$ *points de A.*

Solution proposée.
Soit $c \in \operatorname{Conv} A$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble des familles de points de A dont c est un barycentre. En considérant une famille $(a_0, ..., a_m)$ de $\mathcal{B}$ de cardinal minimal $m+1$, le problème revient à montrer que $m \leq n$

Si ce n'est pas le cas, les $m \geq n+1$ vecteurs $\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, ..., \overrightarrow{a_0a_m}$ sont liés dans E, d'où des scalaires non tous nuls λ_i tels que $\sum_{i=1}^m \lambda_i \overrightarrow{a_0a_i} = 0$, ce qui s'écrit en regroupant les termes en a_0 et en posant $\lambda_0 = -\lambda_1 - ... - \lambda_m$

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i = 0 \text{ avec } \sum_{i=0}^m \lambda_i = 0$$

(on dit que les points $a_0, ..., a_m$ sont *affinement liés* : ceci est un argument classique de géométrie affine, à retenir donc...).

On sait de plus que c s'écrit comme barycentre de $\{a_0, ..., a_m\}$, disons $c = \sum_{i=0}^m \mu_i a_i$ avec les $\mu_i > 0$ (par minimalité de m) de somme 1. L'idée consiste à perturber les coefficients μ_i pour en tuer un afin de contredire la minimalité de m. Pour cela, noter qu'étant donné un scalaire t on a

$$c = \sum_{i=0}^m \mu_i a_i - t\left(\sum_{i=0}^m \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=0}^m \underbrace{(\mu_i - t\lambda_i)}_{:=\nu_i} a_i \text{ avec } \sum_{i=0}^m \nu_i = \sum_{i=0}^m \mu_i - t\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1.$$

Il suffit donc de prendre pour t un $\frac{\mu_i}{\lambda_i}$ (pour annuler un ν_i) tel que tous les coefficients ν_i restent positifs. Pour cela, il est judicieux de prendre t minimal (car pour t petit $\nu_i \simeq \mu_i > 0$). Si $t = \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}}$ désigne le minimum des $\frac{\mu_i}{\lambda_i}$ pour $\lambda_i \neq 0$ (qui existe car les λ_i ne sont pas tous nuls), on constate en effet que

$$\nu_i = \mu_i - t\lambda_i = \underbrace{\lambda_i}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{\mu_i}{\lambda_i} - \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_{i_0}}\right)}_{\geq 0} \geq 0,$$

la condition restant valable pour $\lambda_i = 0$ (car alors $\nu_i = \mu_i > 0$), *CQFD.*

Remarque. Un corollaire classique de Carathéodory est que l'enveloppe convexe d'un compact d'un ev normé de dim finie est compacte.

En effet, soit K notre compact et (c_k) une suite dans l'enveloppe convexe $\operatorname{Conv} K$. Carathéodory permet d'écrire $c_k = \sum_{i=0}^n \lambda_i^k x_i^k$ où n est la dimension de notre ev normé, les λ_i^k étant dans $[0,1]$ et de somme $\sum_{i=0}^n \lambda_i^k = 1$ pour tout k. On extrait alors de la suite $\left(\lambda_0^k, ..., \lambda_n^k, x_0^k, ..., x_n^k\right)$ du compact $[0,1]^{n+1} \times K^{n+1}$ une sous-suite convergente vers un $(\lambda_0^\infty, ..., \lambda_n^\infty, x_0^\infty, ..., x_n^\infty) \in [0,1]^{n+1} \times K^{n+1}$, d'où une valeur d'adhérence $c^\infty = \sum_{i=0}^n \lambda_i^\infty x_i^\infty$ avec $\sum_{i=0}^n \lambda_i^\infty = 1$ par passage à la limite et $\lambda_i^\infty \in [0,1]$.

On peut montrer réciproquement que cette propriété caractérise la dim finie : un ev normé est de dim finie ssi l'enveloppe convexe de tout compacte est compacte (une démonstration utilise le théorème de prolongement de Hahn-Banach).

6 Théorème de Radon et théorème de Helly

On se place dans $\mathbb{R}^n$. On se donne un ensemble de $n+2$ points. Montrer qu'on peut les partionner en deux parties d'enveloppes convexes se rencontrant (théorème de Radon*).*

On se donne à présent $n+2$ convexes C_i de $\mathbb{R}^n$ tels que l'intersection de $n+1$ quelconques d'entre eux soit non vide. Montrer à l'aide de ce qui précède que les C_i ont un point en commun (théorème de Helly*).*

Solution proposée.

Soient $a_0, ..., a_{n+1}$ les points en question. On raisonne comme pour Carathéodory : les $n+1$ vecteurs $\overrightarrow{a_0a_1}, \overrightarrow{a_0a_2}, ..., \overrightarrow{a_0a_{n+1}}$ étant liés dans $\mathbb{R}^n$, il y a des scalaires non nuls λ_i de somme nulle tels que $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i a_i = 0$.

En posant $\left\{ \begin{array}{l} A = \{a_i \ ; \lambda_i > 0\} \\ B = \{a_i \ ; \lambda_i \leq 0\} \end{array} \right.$ (qui sont bien non vides car les λ_i sont non tous nuls et de somme nulle), on remarque que le point

$$\frac{\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i a_i}{\sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i} = \frac{0 - \sum_{\lambda_i \leq 0} \lambda_i a_i}{0 - \sum_{\lambda_i \leq 0} \lambda_i} = \frac{\sum_{\lambda_i \leq 0} (-\lambda_i) a_i}{\sum_{\lambda_i \leq 0} (-\lambda_i)}$$

appartient aux enveloppes convexes de A et B, *CQFD*.

Les hypothèses nous donnent pour tout i un point a_i dans $\bigcap_{j \neq i} C_j$. Si deux de ces points coïncident, alors le point en commun est chez tous les C_i. Sinon, on peut appliquer Radon aux points a_i : on peut partitionner $\{a_0, ..., a_{n+1}\}$ en deux parties A et B dont les enveloppes convexes se rencontrent, mettons en c. Soit maintenant un indice i quelconque. Considérons la partie A ou B qui ne contient pas a_i, disons $a_i \in B \backslash A$. Alors les points de A sont des a_j avec $j \neq i$, donc sont dans C_i par définition de ces derniers, d'où $A \subset C_i$; or, c est dans $\operatorname{Conv} A$, donc dans $\operatorname{Conv} C_i = C_i$. Ceci tenant pour tout i, on a trouvé un point commun à tous les C_i.

Remarque. Le théorème de Helly reste valable pour une famille finie de $m \geq n+2$ convexes (il suffit de récurrer en considérant les convexes $C_i \cap C_{i+1}$), et même pour une famille quelconque si l'on suppose en outre les C_i compacts (la compacité permettant de.se ramener au cas fini). La seule chose à vérifier est donc que l'intersection de $n+1$ convexes est non vide, indépendament du cardinal de la famille de convexes ! On voit ici le rôle crucial joué par la dimension n.

Helly permet de montrer de très jolis choses, cf. les livres de géométrie de Berger. On citera le problème classique du visiteur de musée qui désire trouver un point d'où il pourrait voir tous les tableaux (pour s'asseoir...). Il suffit pour cela qu'il trouve un point (qui peut varier) d'où il peut voir trois tableaux quelconques : c'est un cas particulier du théorème de Krasnosel'skiĭ.

Théorème de Krasnosel'skiĭ.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ tels que $n+1$ points quelconques de K sont visibles depuis un autre point de K :

$$\forall a_0, ..., a_n \in K, \ \exists a \in K, \ \forall i = 0, ..., n, \ [aa_i] \subset K.$$

Alors K est étoilé :

$$\exists a \in K, \ \forall a_0, ..., a_n \in K, \ \forall i = 0, ..., n, \ [aa_i] \subset K.$$

Le problème du visiteur du musée correspond au cas $n = 2$.