Divers

Marc SAGE

Table des matières

1 Sur les notations $W,\ \delta W,\ dW,\ \Delta W$

- δW désigne un travail élémentaire (infinitésimal, donc exprimable en fonction de différentielles).
- ΔW désigne une variation non-élémentaire d'une fonction : On peut par exemple écrire : $W = -P_{ext}\Delta V$ dans le cas où la pression extérieure est constante.
- dV désigne une différentielle (soit une variation infinitésimale de V). On peut donc écrire $\delta W = -P_{ext}dV$. Si on intègre cette équation on obtient celle qui précède.

Autrement dit, la différence entre δW et dV, qui justifie le changement de notation, c'est que si on intègre δW, on obtient W, le travail total réalisé, alors que si on intègre dV, on obtient ΔV, variation du volume.

Pour expliquer à mes élèves que cela marche, j'interprète les différentielles comme de petites variations (tendant vers 0). A ce moment là, le fait que la dérivée de f par rapport à x s'écrive $\frac{df}{dx}$ découle simplement de la définition de la dérivée.

Le point le plus délicat à mon avis est l'intégration subséquente. Il s'agit en fait d'un changement de variable qui ne dit pas son nom. L'interprétation "physicienne" que j'en fais, est que l'intégration n'est pas autre chose qu'une somme infinie de petites variations, et ce, entre deux évènements A et B.

Quand on a une égalité entre différentielles, on peut donc sommer (intégrer) cette égalité, en prenant pour bornes de l'intégrale les valeurs de la fonction différentiée en A et en B.

Cela permet d'avoir une compréhension plus intuitive de ce qui est fait ici (ce qui peut être intéressant pour tes élèves) et les maths derrière sont tout à fait rigoureuses (ce n'est qu'un changement de variable déguisé).

taz, 4 nov 08, 15h58, 16h08

(Attention, planquez les mouches et les portes ouvertes.)

Bah en fait, tu as l'ensemble des états du système qui est une variété, et une variable d'état est une fonction de cette variété dans $\mathbb{R}$. (En l'occurence, pour le volume, c'est un peu de l'enculage de mouches à la hâche à deux mains, parce que V est une des coordonnées de l'espace des états, enfin bon...)

Si X est une variable d'état, dX est la différentielle de X, c'est à dire la fonction qui à tout état associe l'approximation au premier ordre de X au voisinage de l'état considéré.

Maintenant, on considère une transformation du système, i.e. une trajectoire $t \mapsto E(t)$ dans l'espace des états. La dérivée par rapport au temps de $X\left(E\left(t\right)\right)$ vaut $d_{E(t)}X \cdot E'\left(t\right)$, donc si on reprend les notations classiques de physique, la variation élémentaire pendant le temps dt est $dX\left(E\left(t\right)\right)E'\left(t\right)dt$, et en fait, c'est chiant d'écrire tout ça, donc on le note juste dX.

On peut aussi considérer une fonction f associant un sblurb à un couple (état, vecteur tangeant en l'état considéré), et vouloir la totaliser sur une trajectoire. On se retrouve à intégrer $f\left(E\left(t\right), E'\left(t\right)\right)$ par rapport au temps. On appelle F une primitive de cette fonction, et on note δF pour $f\left(E\left(t\right), E'\left(t\right)\right)dt$.

Bref, écrire dV est un abus de langage pour aléger les notations. Donc je ne vois pas où serait le mal à écrire dW puisque quitte à faire des abus de langages, autant ne pas se faire chier à multiplier les notations quand il n'y a pas ambiguité. Tiens, d'ailleurs, est-ce que les physiciens se font vraiment chier entre eux avec ça, ou est-ce juste une lubie de l'éducation nationale qui a peur que les taupins croient que W est une variable d'état ?

Luc, 2 nov 2008, 23h15

La notion de différentielle est assez abstraite. La première fois que j'ai vu des différentielles, c'était en Sup', pour énoncer et « démontrer » qu'un gaz vérifie $\alpha\beta\gamma = -1$ où $\alpha = \frac{dp}{dV}_T$, $\beta = \frac{dV}{dT}_p$ et $\gamma = \frac{dT}{dp}_V$

Bien sûr, on ne nous disait pas ce qu'étaient ces dV, dp et dT. Mathématiquement, je comprends le problème du début de l'enfilade en disant que l'on travaille sur la variété différentielle abstraite X incarnant les états du système (au cours du temps). Les variables temps t et hauteur d'eau h définissent des fonctions $X \longrightarrow \mathbb{R}$. Ces deux fonctions t et h induisent des 1-formes différentielles dt et dh sur X (*). Mais on a aussi la fonction $\frac{dh}{dt} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ et elle est caractérisée par définition $dh = \frac{dh}{dt}dt$ entre 1-formes. La 1-forme $\frac{dh}{\sqrt{h}}$ peut être écrite comme la différentielle d'une certaine fonction de h, à savoir $2\sqrt{h}$ (c'est l'intégration). On se retrouve avec $d\left(2\sqrt{h}\right) = d\left(-t\right)$, autrement dit $d\left(2\sqrt{h} + t\right) = 0$, d'où il sort que $2\sqrt{h} + t$ est une constante.

Expliquer véritablement le concept de 1-forme différentielle sur une variété différentielle abstraite me paraît quelque chose d'un peu audacieux (je suppose que c'est pour des L1). On peut faire comme Luc ou d'autres l'on décrit. Une autre manière de faire consiste à privilégier dans un premier temps un système de coordonnées, ici, le choix évident est celui de la variable de temps t. Définir une 1-forme différentielle ω comme étant quelque chose de la forme $g(t)dt$ où $g(t)$ est une fonction C^∞, expliquer comment on multiplie une 1-forme par une fonction C^∞ h : si $\omega = g(t)dt$, alors $h(t).\omega = (h(t)\,g(t))\,dt$. Après, définir la différentielle d, elle associe à une fonction C^∞ une 1-forme différentielle, on pose : $d(g) = g\prime dt$; la différentielle de la fonction t est bien dt. Après, vérifier que l'on a les relations $d(fg) = f.dg + g.df$, que si $\varphi(x)$ est une fonction et h en est une autre, alors $d(\varphi \circ h) = (\varphi' \circ h)\,dh$, etc. Au bout d'un moment passé à manipuler ces 1-formes, on se rend compte que finalement, la variable t que l'on a privilégiée ici dans la construction n'est pas très importante, bref, vu que la différentiation fait intervenir des dérivées, que cela permet de parler intrinsèquement de choses qui ont à voir avec des dérivées mais indépendamment de systèmes de coordonnées.

En tout cas, à l'époque, j'eusse bien aimé qu'on prît un peu de temps pour expliquer ce qu'était 1-forme différentielle plutôt que de faire ce qui ressemblait à de la bidouille. (**)

(*) Cela suppose des choix d'unités de longueur et de temps. En toute rigueur, il faudrait tensoriser le fibré vectoriel cotangent avec un espace vectoriel de dimension 1 intrinsèque dont les éléments sont des grandeurs de temps (resp. de longueur).

(**) Cela dit, en géométrie algébrique, la définition des 1-formes différentielles revient rigoureusement à énoncer les règles de calcul que l'on a le droit d'appliquer. En fait, c'est aussi vrai en géométrie différentielle, mais encore faut-il savoir que cela a un sens.

2 Sur la trace d'un segment dans le plan

Soit P l'ensemble des plans affines de l'espace affine réel de dimension 3.

Soit $f : I -> P$ un chemin continu.

Je note abusivement $\mathrm{Im}\, f$ la trace parcourue par les plans $f(t)$, lorsque t décrit I : $\mathrm{Im}\, f = \bigcup_{t \in I} f(t)$

Sauf dans le cas trivial où $Im(f)$ est un plan, peut-on dire que l'intérieur de $Im(f)$ est non vide ? Contient un demi-plan ? ... ?

C'est presque plus simple à faire en travaillant avec un segment qui se ballade. I.e., on prend deux chemins $u(t)$ et $v(t)$ dans le plan, continus, avec $u(t)$ distinct de $v(t)$ pour tout t, et on reagrde la trace du segment $[u(t), v(t)]$.

Alors, j'affirme que le seul cas où elle est d'intérieur non vide est le cas où le déplacement est parallèle au segment (et alors la trace est contenue dans une droite).

Preuve : supposons donc que $u(0) = (0,0)$ et $v(0) = (3,0)$, et que, au voisinage de 0, $u(t)$ n'est pas toujours réel (on peut se ramener à ce cas).

On se place pour t au voisinage de 0, de telle façon que les extrémités ne bougent pas trop ($u \in \{x < 1\}$ et $v \in \{x > 2\}$

Supposons par l'absurde que la trace du segment soit d'intérieur vide. C'est donc que son complémenatire est dense.

Soit (t, a) dans le complémentaire, avec $1 < t < 2$.

Alors, on voit que (t, a) limite les mouvement possibles. Je peux écrire des inégalités explicites, mais
je préfère un dessin.
X X X X
X X X
X X X X
o———————————————o
X X X
X X X
X X X XX

Les X sont les éléments du complémentaire de la trace dans l'ouvert $\{1 < x < 2\}$, et o——-o désigne le segment.

Le segment ne pourra jamais traverser les X, ce qui s'interprète comme une certaine inégalité.

En utilisant la densité des (t, a), d'une part pour $a > 0$, d'autre part pour $a < 0$, on obtient que le segment est contraint à rester sur sa ligne.

Un argument plus constructif montre même que, si, au voisinage du temps $t = 0$, le segment ne reste pas sur sa ligne, alors il existe un voisinage U du segment $]0,1[$ tel que, ou bien $U \cap \{y > 0\}$, ou bien $U \cap \{y < 0\}$soit dans l'intérieur de la trace

3 Définitino des foyers d'une conique

J'ai trouvé très jolie cette définition des foyers d'une conique, alors je la recopie ici :

Soit C une conique dans un plan euclidien, dont on note l la droite à l'infini et q la forme quadratique. On appelle I et J les deux points (complexes !) isotropes de q sur l. Par chacun de ces deux points I et J il passe deux tangentes à C (complexifiée). Ces quatre tangentes définissent, outre I et J eux-mêmes, quatre points d'intersection : on les appelle *foyers* de la conique ; et les droites polaires respectives des foyers s'appellent *directrices* de la conique.

Une conique typique (ellipse ou hyperbole) a deux foyers réels et deux foyers complexes conjugués : on appelle *axe majeur* l'axe reliant les deux foyers réels et *axe mineur* celui qui relie les deux complexes conjugués (leur intersection est le *centre* de la conique, c'est-à-dire le polaire de la droite l'infini $l = IJ$). Le cercle a tous ses foyer au centre (et pour directrice la droite à l'infini).

Et la parabole, si je ne m'abuse (il faut passer à la limite donc c'est un chouïa moins évident) a pour foyers le foyer au sens usuel, le point de tangence avec la droite à l'infini et les deux points I et J eux-mêmes.

4 Sur des demi-cercles s'intersectant au-dessus d'une droite

1/12/98 14h38

"on se donne 10 points régulièrement espacés sur une droite, on trace tous les demi-cercles possibles entre deux points au-dessus de la droite, combien cela fait-il d'intersections hors de la droite ?"

En fait ça peut faire un petit exo de colle (conti ?) rigolo en généralisant à n points : il y a $\binom{n}{4}$ intersections, moins les intersections multiples. Là il faut démontrer qu'un triangle avec tous ses côtés entiers a tous ses angles aigus (j'espère que je me suis pas gouré **et 2 3 4 ? ? ?**). Il ne reste alors que des relations pythagoriciennes : si $a^2 + b^2 = c^2$ avec $2(a + c) < n$ (un "bon" triplet"), il faut enlever $n - 2(a + c)$; si on a k bons triplets avec le même c (typiquement échange de a et b), il faut encore enlever $k - 1$.

>Comment obtiens-tu un triplet pythagoricien ?

Si tu regardes un triangle 3 4 5, tu obtiens une intersection triple avec deux cercles de rayon 5 et un cercle de rayon 4, et il faut une base de largeur 2*(3+5) (ça tient après dilatation).

Avec mon lemme on démontrait que c'était le seul cas à considérer...

Là en fait je sèche un peu.

JML

5 Sur les triangulations

demontrer que si un carre est pave par des triangles d'aires egales, le nombre de triangle est pair.

D'abord, la partie la plus interessante, c'est de supposer que les points sont à coordonnees rationnelles, et qu'on a une vraie triangulation. On repartit les points de la triangulation en 3 classes bien choisies A B et C, selon que les valuations 2-adiques de leurs coordonnees verifient certaines conditions. Si ces conditions sont bien choisies, elles permettent dans un premier temps d'appliquer le lemme de Sperner, qui fournit un triangle dont les sommets sont de types A B et C exactement, et ensuite, elles impliquent qu'un tel triangle a une aire de valuation 2-adique strictement negative, ce qui termine la preuve.

Si je me souviens bien, les choix suivants conviennent :

type A si les deux coordonnees sont de valuation > 0, et sinon, type B ou C selon que l'abscisse est de valuation strirctment .inf ou sup a celle de l'ordonnee.

Ainsi $(0, 0)$ est de type A, $(1, 0)$ de type B, et $(0, 1)$ et $(1, 1)$ de type C.

Maintenant si on n'a pas une vraie triangulation, on se ramene au cas precedent en rajoutant des triangles degeneres. Ca ne modifie pas la demonstration puisqu'ils sont d'aire nulle, donc de valuation positive.

Si les coordonnees ne sont pas rationnelles, on commence par montrer qu'elles sont algebriques (la je ne sais pas trop comment on fait, en fait les hypotheses font que les coordonnees doivent verifier un systeme d'equations algebriques ; un calcul montre qu'il y a autant d'inconnues que d'equations, mais je ne sais pas montrer que ces dernieres sont independantes), et on etend la valuation 2-adique au corps qu'elles engendrent.

Voila. Cette solution n'est pas de moi, elle est connue depuis une trentaine d'annee. Pour plus de precisions et une bibliographie, consulter le dernier numero du Mathematical Intelligencer.

6 Sur les partitions en cercles

Peut-on partitionner le plan R^2 par des disques fermés de rayon strictement positif ?

Je sais que par un argument de connexité, ce n'est pas possible avec des disques ouverts.

Si tel était le cas, tu prends deux disques distincts et le segment d'extremité leurs centre. Ce segment est alors réunion d'intervalles fermés, ce qui est impossible.

(Note : « dénombrable » signifie « au plus dénombrable ».)

L'ensemble des disques est dénombrable puisque chacun contient un point dont les coordonnées sont rationnelles et qu'un tel point ne peut se trouver que dans un disque au plus. (Hip !)

Donc ton segment est censé être partitionné en un nombre dénombrable strictement supérieur à 1 de segments, éventuellement réduits à des singletons. Or ça c'est impossible (il y a plein de raisons possibles, l'une d'elle sera donnée ci-dessous, mais elle torsche directement le problème de départ sans passer par la construction de Gaëtan). (Hop !)

On sait en fait qu'on ne peut pas écrire un segment, la droite ou le plan comme réunion d'un nombre dénombrable strictement supérieur à 1 de fermé deux à deux disjoints (ceci permet soit de conclure quant au truc du segment soit, modulo ma première remarque, de torscher le problème de départ). Mieux, voir Nicolas Bourbaki, Topologie Générale, chapitre IX, page 113, exercice 12 de la section 5, « un espace totalement inépuisable, connexe et localement connexe ne peut pas être réunion d'une suite infinie de fermés non vides et deux à deux disjoints ». (Un espace totalement inépuisable, c'est un espace dans lequel aucun fermé non vide n'est maigre relativement à lui-même ; le théorème de Baire montre qu'un métrique complet ou bien un espace localement compact est totalement inépuisable.)

Démonstration. Si F_n sont les fermés en question, H_n leurs frontières, H la réunion des H_n, les H_n sont fermés et H aussi (car son complémentaire est la réunion des intérieurs des F_n) ; or H n'est pas vide (car aucun des H_n ne l'est, par connexité) ; donc pour arriver à une contradiction il suffit de montrer que H est maigre relativement à lui-même. H étant la réunion des H_n, il suffit de montrer que H_n est rare (i.e., s'agissant d'un fermé, d'intérieur vide) dans H ; or sinon il existerait un voisinage V qu'on peut supposer connexe (par locale connexité) d'un point x de H_n dont l'intersection avec H soit incluse dans H_n. Mais V doit rencontrer un F_m avec $m \neq n$ (car m est à la frontière de F_n), et comme V est connexe et qu'il rencontre F_m et son complémentaire, il rencontre aussi H_m (Bourbaki, TG, I, p.81, prop 3), contradiction.

Moi, je demande : une partition en disques fermés ou ouverts ? (de rayon fini, >0) ? J'y ai déjà beaucoup reflechi sans succès.

La reponse est non : il existe au moins un disque ouvert dans la partition.

Le bord est un cercle dont tout point appartient a un disque necessairement ferme et un seul.De plus, la partition est necessairement denombrable.le cercle est un ensemble indenombrable...

OK, joli, ça marche aussi dans le cas du disque, et ça marche d'ailleurs en dim n avec des sphères.

Je crois que j'ai le résultat suivant :

(Disons qu'une partie F du plan vérifie (P) s'il existe une partition de F en cercles tq 2 de ces cercles sont non emboîtés.)

Alors toute partie F vérifiant (P) est contenue dans une partie $F\prime$ partitionable en > 1 disques ouverts et fermés.

Et, grâce à ce que tu montres, le complémentaire de F contient des cercles privés d'un ensemble dénombrable.

Idem avec un disque ouvert ou fermé à la place du plan entier (en exigeant une partition non triviale).

? ? ? ?

Autre question (qui lui est liée)

Peut-on partitionner le plan privé d'un ensemble D en cercles (de rayon $>> 0$) avec $n \in \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$?

-Si $|D| = 0$, c'est classique que non
-Si $|D| = 1$, c'est évident que oui
-Si $1 < |D| < \infty$, non (en bidouillant un peu, on arrive à ses fins)
-Si $|D| = \aleph_0$ infini dénombrable : ça dépend de D ; ma question est précisément :
Existe-t-il une partie dénombrable D infinie du plan telle que le complémentaire de D se partitionne en cercle ?

Le lien, c'est que si on a une partition du plan en disques indifféremment ouverts ou fermés de rayon > 0, on en déduit une partition en cercles du complémentaire d'une partie dénombrable (et même discrète) du plan (l'ensemble des centres). Mais aussi la réciproque : peut-être on peut se ramener à la 1ere question, quitte à réduire la taille de la partie infinie considérée (en "remplissant" des cercles), en s'assurant juste de garder 2 pts.

7 Aire d'un carré via petite larme

On trace le demi-cercle superieur de centre 1 et de rayon 1, puis son symetrique par rapport à 0 (soit le demi-cercle inferieur de centre -1 et de rayon 1). on ajoute a la figure le demi-cercle superieur de centre 0 et de rayon 2. les poetes de tangente appellent ca "la petite larme"

question : "quelle est l'aire du carre dont les sommets sont sur le pourtour de la petite larme"

Indication : montrer que le milieu du cote joignant les deux points situes sur les petits demi-cercles est precisement l'origine du repere.
(on trouve alors $\frac{16}{5}$)

La mediatrice des deux sommets situes sur le grand cercle doit passer par l'origine, et est un axe de symetrie du carre. Trace les symetriques des deux petits cercles et conclus.

8 Géométrie hyperbolique

Il y a deux façons (enfin, il y en a nettement plus que deux, mais je vais en mentionner deux) de projeter la sphère sur le plan. La projection stéréographique identifie la sphère à la sphère de Riemann, i.e. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et c'est une projection conforme, donc sortie de l'analyse complexe. On la réalise en posant la sphère sur le plan, pôle sud en bas (par exemple), et on fait une projection cônique partant du pôle nord. Cette projection conserve les angles, et conserve les cercles (y compris les droites, qui sont des cercles dégénérés). La projection gnomonique, elle, se fait par une projection cônique dont le centre est le centre de la sphère. Là , on identifie la sphère (quotientée par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ mais peu importe) au plan projectif réel $\mathbb{P}^2(R)$. Cette projection conserve donc les droites (mais pas les angles).

Pour le demi-plan de Poincaré (espace hyperbolique), c'est pareil : on a une projection stéréographique qui conserve les cercles et les angles, et une projection gnomonique, qui conserve les droites ; la première provient de l'analyse complexe, la second de la géométrie projective réelle.

Il est quand mà^{a}me bien plus simple, pour faire des dessins en géométrie Lobatchevskienne, d'utiliser la projection gnomonique, et donc de faire des vraies droites. Pour ce qui est de l'orthogonalité, qui ne se traduit pas (comme pour la projection stéréographique) par une orthogonalité sur la figure, la règle est que deux droites sont orthogonales ssi l'une passe par le point polaire de l'autre (polaire par rapport au cercle à l'infini : dois-je rappeler ce que c'est ?).

Quand on a un point en projection gnomonique, il est facile de trouver (à la règle et au compas) quelle serait sa position en projection stéréographique : on trace la corde dont ce point est le milieu, puis le cercle dont le centre est le point polaire de la corde, et qui rencontre le cercle à l'infini en les deux mà^{a}me points que la corde, et son intersection avec le rayon passant par le point initial est le point voulu. Pour la réciproque je ne vois pas de méthode simple.

Bien entendu, le centre du cercle (arbitraire) et les points à l'infini ne bougent pas d'une projection à l'autre.

Enfin bref, mon message initial était faux parce que je confondais ces deux projections.

20 Oct 1999 14 :17 :07

Finalement, on s'en sort. C'est même assez joli.

Je résumeÂ :

On appellera Â«Â cercle Ã l'infiniÂ Â» le cercle qu'on considère pour commencer, et on appellera O son centre.

Si M est un point du disque, censé représenter un point du demi-plan de Poincaré en projection stéréographique, on peut trouver un point M' représentant le même point du demi-plan mais en projection gnomonique cette fois, par le procédé suivant : la perpendiculaire à (OM) par M coupe le cercle en deux points, N_1 et N_2 ; les tangentes au cercle par N_1 et N_2 (i.e. les perpendiculaires à (ON_1) et (ON_2) par N_1 et N_2 respectivement :-) se croisent un un point K de (OM), qui est le point polaire de N_1N_2. Le cercle de centre K et de rayon KN_1 coupe le rayon $[OM]$ en un point, qui est le point M' recherché.

On peut aussi faire la transformation inverse : donné M dans le disque on peut chercher $M`$ tel que $M`' = M$. Pour cela, on fait comme ceci : on trace la perpendiculaire à (OM) passant par O et on appelle Z un de ses points d'intersection avec le cercle ; on complète ZOM en un rectangle, on appelle Y le quatrième point (qui est donc sur la perpendiculaire à (OM) par M). On appelle X le point de $[OY]$ qui est sur le cercle. On double l'angle (OZ, OX) en un angle (OZ, OT) (T étant encore un point du cercle). Le projeté de T sur OM donne le point $M`$ recherché.

(Réflexion faite, on peut faire plus simple : la droite ZM coupe le cercle en un deuxième point, T, qui convient très bien.) La raison de ces constructions ? Pour ce qui est de la première, les deux points à l'infini N_1 et N_2 ont même image dans les deux projections ; le point polaire K est tel que ON_1K et ON_2K soient rectangles, donc le cercle de centre K passant par N_1 et N_2 sera bien perpendiculaire au cercle à l'infini, donc représente la droite N_1N_2 (de la projection gnomonique) dans la projection stéréographique.

Mais dans cette opération, on peut constater que tout ce qu'on a fait c'est bissecter un angle (l'angle complémentaire de (ON_1, OM)) par le fameux théorème qui dit que l'angle au centre est le double de l'angle inscrit (programme de géométrie de la classe de 3e), et pour inverser la construction il suffit de redoubler l'angle en question.

Analytiquement, si x, x' et $x`$ désignent les rayons (distances à O !) de $M$, $M'$ et $M`$ respectivement, on a $x' = \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$ et donc $x` = \frac{2x}{1+x^2}$, dans laquelle formule on reconnaît la formule donnant le cosinus en fonction du cosinus de l'angle moitié (formule qui sert à montrer que le cercle a un paramétrage rationnel).

Une fois qu'on a ces deux constructions, on peut résoudre le problème initial : donnés M_1 et M_2, représentant des points dans la projection stéréographique, on commence par tracer $M_1`$ et $M_2`$, leurs analogues gnomoniques (2e construction), puis on trace la droite reliant ces deux points, et les deux points d'intersection de celle-ci avec le cercle à l'infini donnent deux points sur le cercle qu'on veut tracer en définitive (et dont le centre est le point polaire de la droite par $M_1`$ et $M_2`$). Ce Qu'il Fallait Construire.

20 Oct 1999 15 :06 :53

9 Sur les cercles et ellipses

On a deux points A et B dans un disque, quel est le plus court chemin de A à B passant par un point du cercle ?

C'est le chemin passant par le point de tangence du cercle et de l'unique ellipse de foyers A et B tangente intérieurement au cercle

Caractérsation ? ? ? ?