Espaces préhilbertiens

Marc SAGE

10 juin 2007

Table des matières

1 Sur l'existence d'un adjoint **2**

2 Endomorphismes "seulement" orthogonaux **2**

3 Sur les applications invariantes sous le produit scalaire **3**

4 Sur les applications invariantes sous le produit vectoriel **3**

5 Polynômes orthogonaux **4**

6 Matrices de Gram **4**

7 Inégalité d'Hadamard et une majoration du déterminant **5**

8 Théorème d'Auerbach **7**

9 Un peu de réduction **7**

10 Modulo le groupe orthogonal... **8**

11 Un peu de topologie **8**

12 Une optimisation **9**

13 CNS pour que $\left\|\int f\right\| = \int \|f\|$ **10**

14 Compacité séquentielle faible de la boule unité de $l^2(\mathbb{C})$ **11**

15 Morphismes pour le produit vectoriel **12**

Notations.

b.o. : base orthogonale
b.o.n. : base orthonormée
b.o.n.d. : base orthonormée directe

A^* : transconjuguée de la matrice A, qui s'identifie avec la transposée dans le cas réel

1 Sur l'existence d'un adjoint

Montrer qu'une application d'un espace euclidien dans lui-même admettant un adjoint est nécessairement linéaire.

Solution proposée.
Notons f notre application et f^* son adjoint (qui, rappelons-le, est unique). On part de $f(\lambda a + b)$ et on essaie de faire sortir tout le monde : pour cela, il suffit de faire sauter le f et donc d'utiliser l'hypothèse (couplée à la linéarité du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \langle f(\lambda a + b) \mid c \rangle &= \langle \lambda a + b \mid f^*(c) \rangle = \lambda \langle a \mid f^*(c) \rangle + \langle b \mid f^*(c) \rangle = \lambda \langle f(a) \mid c \rangle + \langle f(b) \mid c \rangle \\ &= \langle \lambda f(a) + f(b) \mid c \rangle . \end{aligned}$$

Le vecteur $f(\lambda a + b) - (\lambda f(a) + f(b))$ est donc orthogonal à tout le monde, en particulier à lui-même, donc est nul, *CQFD*.

Remarque. La preuve ci-dessus marche en dimension quelconque. Si notre espace est de plus complet, (*i.e.* un Hilbert), on peut montrer que l'existence de l'adjoint implique en outre la continuité de notre endomorphisme (c'est une application du théorème du graphe fermé, corollaire du théorème de Banach – cf. seconde feuille sur les evn).

2 Endomorphismes "seulement" orthogonaux

Que dire d'un endomorphisme f d'un espace euclidien E qui préserve l'orthogonalité, i.e. tel que

$$\forall a, b \in E,\ a \perp b \implies f(a) \perp f(b)\ ?$$

Que dire si f est juste une application non nécessairement linéaire ?

Solution proposée.
On regarde comment f agit sur le produit scalaire. Pour cela, on fait apparaître de l'orthogonalité en décomposant un vecteur $b = \lambda a + a_\perp$ selon un vecteur a non nul et son orthogonal $a^\perp$:

$$\langle f(a) \mid f(b) \rangle = \langle f(a) \mid \lambda f(a) + f(a_\perp) \rangle = \lambda \|f(a)\|^2 + \underbrace{\langle f(a) \mid f(a_\perp) \rangle}_{=0 \text{ car } a \perp a_\perp} = \lambda \|f(a)\|^2 = \langle a \mid b \rangle \frac{\|f(a)\|^2}{\|a\|^2}.$$

Par symétrie, en simplifiant par $\langle a \mid b \rangle$ pour a et b non orthogonaux, on aura

$$\frac{\|f(a)\|^2}{\|a\|^2} = \frac{\|f(b)\|^2}{\|b\|^2}.$$

Si a et b sont orthogonaux (et non nul), en passant par le vecteur $a + b$ qui n'est orthogonal ni à a ni à b, on montre quand même l'égalité ci-dessus. Finalement, il y a un scalaire k tel que

$$\langle f(a) \mid f(b) \rangle = k \langle a \mid b \rangle ,$$

égalité qui tient toujours si a ou $b = 0$. Ainsi $\frac{f}{k}$ est une rotation, donc f est une similitude de rapport k.

? ? ? ? ?

3 Sur les applications invariantes sous le produit scalaire

Soit f une application d'un espace euclidien dans lui-même (non nécessairement linéaire). Si f est invariante sous action du produit scalaire, montrer que f est un automorphisme orthogonal.

Solution proposée.
Il s'agit de montrer que f est linéaire.
On part de $f(\lambda a + b)$ et on essaie de faire sortir tout le monde : pour cela, il suffit de faire sauter le f et donc d'utiliser l'hypothèse (couplée à la linéarité du produit scalaire) :

$$\begin{aligned} \langle f(\lambda a + b) \mid f(c)\rangle &= (\lambda a + b) \mid c = \lambda (a \mid c) + b \mid c = \lambda (f(a) \mid f(c)) + f(b) \mid f(c) \\ &= (\lambda f(a) + f(b)) \mid f(c). \end{aligned}$$

On en déduit que $f(\lambda a + b) - (\lambda f(a) + f(b))$ est orthogonal toutes les images par f, *i.e.*

$$f(\lambda a + b) - (\lambda f(a) + f(b)) \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}.$$

Ainsi, si cette dernière contient $\dim E$ vecteurs libres, l'orthogonal est nul et on a gagné. Mais l'image d'une base orthonormée reste orthonormée, donc libre, *CQFD*.

Remarque. On aurait également pu regarder la norme de $f(\lambda a + b) - (\lambda f(a) + f(b))$:

$$\|f(\lambda a + b) - (\lambda f(a) + f(b))\|^2 = \langle f(\lambda a + b) - \lambda f(a) - f(b) \mid f(\lambda a + b) - \lambda f(a) - f(b)\rangle.$$

Lorsque l'on développe le produit scalaire, la linéarité de ce dernier et l'hypothèse sur f permettent en fait de se débarasser de tous les f qui trainent, d'où (en remontant les calculs)

$$\|f(\lambda a + b) - (\lambda f(a) + f(b))\|^2 = \|\lambda a + b - (\lambda a + b)\|^2 = 0, \ \textit{CQFD}.$$

Cette preuve a l'avantage de ne pas utiliser la finitude de la dimension de E.

4 Sur les applications invariantes sous le produit vectoriel

Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même. Que dire de f si elle est invariante par action du produit vectoriel, i.e. *si*

$$f(a) \wedge f(b) = a \wedge b\,?$$

?

Solution proposée.
Montrons déjà que f est linéaire. On part de $f(\lambda a + b)$ et on essaie de faire sortir tout le monde : pour cela, il suffit de faire sauter le f et donc d'utiliser l'hypothèse (couplée à la linéarité du produit vectoriel) :

$$\begin{aligned} f(\lambda a + b) \wedge f(c) &= (\lambda a + b) \wedge c = \lambda a \wedge c + b \wedge c = \lambda f(a) \wedge f(c) + f(b) \wedge f(c) \\ &= \lambda f(a) + f(b) \wedge f(c). \end{aligned}$$

On en déduit que $f(\lambda a + b) - (\lambda f(a) + f(b))$, s'il n'est pas nul, est colinéaire à $f(c)$ pour tout vecteur c, *i.e.*

$$f(\lambda a + b) - (\lambda f(a) + f(b)) \in \bigcap_{c \in \mathbb{R}^3} \mathbb{R} f(c).$$

Ce dernier espace est clairement de dimension ≤ 1 comme intersection de droites. S'il n'est pas nul, toutes ces droites sont confondues, ce qui revient à dire que deux images par f sont toujours colinéaires, donc de produit vectoriel nul. Il suffit alors de prendre deux antécédents x et y libres pour avoir une contradiction :

$$0 = f(x) \wedge f(y) = x \wedge y \neq 0.$$

Ceci étant fait, utilisons le rapport entre produit vectoriel et produit scalaire. On a

$$\begin{aligned}
\text{d'une part, } [f(a), f(b), f(c)] &= \langle f(a) \wedge f(b) \mid f(c) \rangle = \langle a \wedge b \mid f(c) \rangle, \\
\text{d'autre part, } [f(a), f(b), f(c)] &= \det f \cdot [a, b, c] = \langle \det f \cdot a \wedge b \mid c \rangle,
\end{aligned}$$

ce qui permet d'écrire

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \ \langle x \mid f(y) \rangle = \langle \det f \cdot x \mid y \rangle$$

(en effet, tout vecteur x s'écrit sous forme d'un produit vectoriel : si $x = 0$, on prend deux vecteurs égaux, sinon on considère une b.o.n. $\left(u, v, \frac{x}{\|x\|}\right)$ de sorte que $\frac{x}{\|x\|} = u \wedge v$). On voit ainsi que f admet un adjoint

$$f^* = \det f \cdot \mathrm{Id}\,, \text{ d'où } f = \det f \cdot \mathrm{Id}\,.$$

En prenant le déterminant, $\det f$ est racine de $X = X^3$, donc vaut 0 ou ± 1.

Réciproquement, seules les solutions $f = \pm \mathrm{Id}$ conviennent.

5 Polynômes orthogonaux

6 Matrices de Gram

Soit E un espace préhilbertien et $(e_1, ..., e_n)$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle *matrice de Gram* associée à $(e_1, ..., e_n)$ la matrice

$$G(e_1, ..., e_n) := (\langle e_i \mid e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \langle e_1 \mid e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1 \mid e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n \mid e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n \mid e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Le *déterminant de Gram* de la famille $(e_1, ..., e_n)$ est le déterminant de la matrice de Gram associée

$$g(e_1, ..., e_n) := \det G(e_1, ..., e_n)\,.$$

• *Montrer qu'une famille finie de vecteurs et sa matrice de Gram ont même rang.*

• *Montrer qu'une matrice G est de Gram ssi il y a une matrice carrée A telle que $G = A^*A$, ou encore ssi G est auto-adjointe positive.*

Énoncer une propriété analogue pour les matrice de Gram inversibles.

• *Soit maintenant F un sev de dimension finie n et a un point de E. En considérant $(f_1, ..., f_n)$ une base de F (non nécessairement orthogonale), montrer que la distance d'un point a de E au sev F est donnée par la formule*

$$d(a, F) = \sqrt{\frac{g(a, f_1, ..., f_n)}{g(f_1, ..., f_n)}}.$$

Solution proposée.

• Soit r le rang de la famille $(e_1, ..., e_n)$. Quitte à réindicer, on peut supposer que $e_1, ..., e_r$ engendrent tout le monde. Notons $C_1, ..., C_n$ les colonnes de la matrice de Gram :

$$C_j = (e_i \mid e_j)_{i=1,...,n}\,.$$

Il est clair que $C_1, ..., C_r$ engendrent toutes les autres : si e_{j_0} se décompose en $\sum_{j=1}^r \lambda_j e_j$, on a la même décomposition pour C_{j_0}. Montrons à présent qu'elles sont libres, en partant d'une relation de liaison :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^r \lambda_j C_j = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall i, \ \sum_{j=1}^r \lambda_j \langle e_i \mid e_j \rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \forall i, \ \left\langle e_i \mid \sum_{j=1}^r \lambda_j e_j \right\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^r \lambda_j e_j = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (\lambda_j) = 0 \text{ par liberté des } e_j.
\end{aligned}$$

• Soit G une matrice de Gram, disons associée à une famille $(e_1, ..., e_n)$. En prenant A la matrice des e_i dans une b.o.n. quelconque de E, il est clair que $G = A^*A$. Réciproquement, soit G une matrice du type A^*A. Dans une b.o.n. quelconque de E, A décrit une famille $(e_1, ..., e_n)$ dont G est alors la matrice de Gram associée.

Par ailleurs, il est clair qu'une matrice de la forme A^*A est auto-adjointe positive G. Réciproquement, une matrice G auto-adjointe positive se diagonalise en

$$G = PDP^* = P\sqrt{D}\sqrt{D}P^* = P\sqrt{D}^*\sqrt{D}P^* = A^*A \text{ avec } A = \sqrt{D}P^*.$$

On vient de donner deux caratérisations des matrices auto-adjointes positives, le cas "défini" s'en déduisant sans peine :

$$G = G^* \text{ positive } \iff G \text{ de Gram } \iff \exists A,\, G = A^*A,$$
$$G = G^* \text{ définie positive } \iff G \text{ de Gram inversible } \iff \exists A \text{ inversible},\, G = A^*A.$$

• La distance à F est atteinte en le projeté orthogonal de a sur F, mettons $p = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$ (qui vérifie $\overrightarrow{pa} \perp F$). On va faire apparaître cette combinaison linéaire dans le calcul de

$$g(a, u_1, ..., u_n) = \begin{vmatrix} \langle a \mid a \rangle & \langle a \mid u_1 \rangle & \cdots & \langle a \mid u_n \rangle \\ \langle u_1 \mid a \rangle & \langle u_1 \mid u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1 \mid u_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle u_n \mid a \rangle & \langle u_n \mid u_1 \rangle & \cdots & \langle u_n \mid u_n \rangle \end{vmatrix},$$

en faisant $C_0 \longleftarrow C_0 - \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i$ (avec des notations évidentes pour désigner les colonnes). Les termes $\langle u_k \mid a \rangle$ vont devenir

$$\langle u_k \mid a \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle u_k \mid u_i \rangle = \left\langle u_k \mid a - \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\rangle = \left\langle \underbrace{u_k}_{\in F} \mid \overrightarrow{pa} \right\rangle = 0,$$

et terme $\langle a \mid a \rangle$ va donner

$$\langle a \mid \overrightarrow{pa} \rangle = \langle p \mid \overrightarrow{pa} \rangle + \langle \overrightarrow{pa} \mid \overrightarrow{pa} \rangle = 0 + \|\overrightarrow{pa}\|^2 = d(a, F)^2.$$

Il en résulte

$$g(a, u_1, ..., u_n) = \begin{vmatrix} d(a, F) & \langle a \mid u_1 \rangle & \cdots & \langle a \mid u_n \rangle \\ 0 & \langle u_1 \mid u_1 \rangle & \cdots & \langle u_1 \mid u_n \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \langle u_n \mid u_1 \rangle & \cdots & \langle u_n \mid u_n \rangle \end{vmatrix} = d(a, F)^2 g(u_1, ..., u_n), \textit{ CQFD.}$$

Pour être propre, il faut dire pourquoi on peut diviser par $g(f_1, ..., f_n)$: la famille $(f_1, ..., f_n)$ étant libre, son rang est n, donc celui de $G(f_1, ..., f_n)$ aussi d'après la première question, *i.e.* $G(f_1, ..., f_n)$ inversible, donc son déterminant $g(f_1, ..., f_n)$ est non nul.

Remarque. Le grand intérêt de la formule donnant la distance à un sev est que l'on peut prendre n'importe quelle base de ces sev (pas besoin de se facir l'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la main). À bon entendeur...

7 Inégalité d'Hadamard et une majoration du déterminant

• *Montrer que le produit mixte d'une famille $(x_1, ..., x_n)$ de vecteurs d'un espace euclidien est majoré par le produit de leurs normes :*

$$|[x_1, ..., x_n]| \leq \|x_1\| ... \|x_n\| \text{ ;}$$

déterminer le cas d'égalité.

• *En déduire la majoration suivante pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$:*

$$\sqrt[n]{|\det(A)|} \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty .$$

Expliquer pourquoi cette majoration est meilleure que la façon "naturelle" de majorer le déterminant.

Solution proposée.

• Rappelons que le produit mixte d'une famille $(x_1, ..., x_n)$ est défini comme le déterminant de la famille $(x_1, ..., x_n)$ dans n'importe quelle b.o.n.d., ce que l'on note aussi $\operatorname{Det}(x_1, ..., x_n)$ (le "grand" déterminant).

On peut toujours supposer les x_i libres, vu que dans le cas contraire le déterminant de gauche est nul.

Le calcul du grand déterminant appelle à considérer une base orthornomée (directe ou indirecte, peu importe, vu que le signe du Det ne joue pas). On pense évidemment à orthonormaliser la famille $x_1, ..., x_n$ selon Gram-Schmidt, disons en

$$x_i' = \lambda_i x_i + (*)$$

où le $(*)$ est engendré par $x_1, ..., x_{i-1}$. On a donc

$$\underset{(x_1,...,x_n)}{\operatorname{Mat}}(x_1', ..., x_n') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(c'est l'intérêt de Gram-Schmidt que d'obtenir une forme triangulaire!), ce qui en inversant donne la matrice de $(x_1, ..., x_n)$ dans la b.o.n. (x_i'). En particulier, son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux :

$$|\operatorname{Det}(x_1, ..., x_n)| = \prod \frac{1}{\lambda_i}.$$

Maitenant, en scalairisant la relation $x_i' = \lambda_i x_i + (*)$ par x_i', on obtient une majoration de $\frac{1}{\lambda_i}$ par Cauchy-Schwarz :

$$1 = \|x_i'\|^2 = \lambda_i \langle x_i' \mid x_i \rangle \implies \frac{1}{\lambda_i} = \langle x_i' \mid x_i \rangle \leq \|x_i'\| \|x_i\| = \|x_i\|.$$

Cela conclut la preuve de l'inégalité.

Si les x_i sont liés, on a égalité ssi l'un des x_i est nul. Sinon, le cas d'égalité s'obtient en considérant tous les cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz (on fait un produit d'inégalités avec des termes *strictements* positifs) : les x_i doivent être positivement colinéaires aux x_i', lesquels sont orthonormés, donc les x_i doivent former une famille orthogonale, et ce cas de figure consitue bien un cas d'égalité.

• Concernant la majoration, le déterminant de A peut être vu comme le déterminant de la famille de ses vecteurs colonnes C_i dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, laquelle est une b.o.n.d., d'où $\det A = [C_1, ..., C_n]$. Hadamard nous permet alors de majorer

$$|\det A| = |[C_1, ..., C_n]| \leq \prod \|C_i\|,$$

et il reste à observer que

$$\|C_i\| = \sqrt{\sum_j a_{i,j}^2} \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty,$$

ce qui donne

$$\sqrt[n]{|\det A|} \leq \sqrt[n]{\prod \|C_i\|} \leq \sqrt[n]{\prod \sqrt{n} \|A\|_\infty} = \sqrt{n} \|A\|_\infty, \textit{ CQFD.}$$

La façon naturelle de majorer le déterminant serait d'utiliser une bête inégalité triangulaire :

$$\sqrt[n]{|\det A|} \leq \sqrt[n]{\left| \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} \right|} \leq \sqrt[n]{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n \|A\|_\infty} = \sqrt[n]{n!} \|A\|_\infty,$$

et il s'agit donc de montrer que $\sqrt{n} \overset{?}{\leq} \sqrt[n]{n!}$. On réécrit cela en tuant les racines $n^n \overset{?}{\leq} n!^2$, puis on écrit les deux côtés comme produit de n termes (comme Gauss l'aurait fait pour calculer $1 + 2 + ... + n$) :

$$n \cdot n \cdot ... \cdot n \overset{?}{\leq} [n \cdot 1] \; [(n-1) \cdot 2] \; [(n-2) \cdot 3] ... [1 \cdot n - 1].$$

Il suffit donc de montrer que $n \overset{?}{\leq} (n - k + 1) k$ pour tout entier $k = 1, ..., n-1$. Ceci se remanie en $(k-1) k \overset{?}{\leq} (k-1) n$, ce qui devient trivial. On a même égalité stricite pour $k \geq 2$, d'où $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$ dès que $n > 2$.

Remarque. L'inégalité d'Hadamard a bien sûr une interprétation géométrique qu'il ne faut pas rater : *le volume d'un parallépipède est majoré par le produit des longueurs de ses côtés.*

8 Théorème d'Auerbach

Une *base d'Auerbach* d'un evn de dim finie est une base normée $(e_1, ..., e_n)$ telle que la base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$ soit également normée.

- *Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base d'Auerbach ssi*

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}^n,\ \forall i,\ \|\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n\| \geq |\lambda_i| .$$

- *Montrer qu'une base d'Auerbach dans un espace euclidien est nécessairement orthogonale.*
- *En déduire l'existence d'une base Auerbach dans un evn quelconque (de dim finie).*

Solution proposée.

• La condition voulue se réécrit

$$\forall x \in E,\ |e_i^* (x)| \leq \|x\| ,$$

ce qui, en prenant le sup, équivaut à $\|e_i^*\| \leq 1$. Comme le cas d'égalité est toujours atteint (prendre $x = e_i$), la condition cherchée s'écrit $\|e_i^*\| = 1$.

• Prenons deux vecteurs u et v d'une base d'Auerbach. On les perturbe à l'aide d'un $\varepsilon > 0$:

$$\|u + \varepsilon v\| \geq 1 \implies \|u\|^2 + 2\varepsilon \langle u \mid v \rangle + \varepsilon^2 \|v\|^2 \geq 1 \implies 2 \langle u \mid v \rangle + \varepsilon \|v\|^2 .$$

Faisant tendre ε vers 0 donne $\langle u \mid v \rangle \geq 0$, et en prenant $\varepsilon < 0$ on obtiendrait l'inégalité dans l'autre sens, d'où $u \perp v$ comme souhaité.

• Pour un evn quelconque, dont on notera $\mathbb{S}$ la sphère unité, l'idée est naturellement – au vu de ce qui précède – de trouver l'analogue des familles orthogonales. Or, c'est chose aisée si l'on pense à l'inégalité d'Hadamard : le grand déterminant d'une famille normée est ≤ 1 avec $=$ ssi la famille est orthogonale. On va donc considérer une famille $(e_1, ..., e_n)$ maximisant son déterminant dans une base $\mathcal{B}$ arbitraire (impossible de parler de grand déterminant sans produit scalaire) sur le compact $\mathbb{S}^n$. Vérifions que cela fonctione. Pour un vecteur u unitaire, on a

$$|e_i^* (x)| = \left| \frac{\det_{\mathcal{B}} (e_1, ..., e_{i-1}, x, e_{i+1}, ..., e_n)}{\det_{\mathcal{B}} (e_1, ..., e_n)} \right| \leq 1$$

par maximalité de $\det (e_1, ..., e_n)$, avec égalité pour $x = e_i$, *CQFD.*

9 Un peu de réduction

Soit $u_0, ..., u_n$ des vecteurs distincts d'un espace euclidien de dimension n et α un réel tels que

$$G (u_0, ..., u_n) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

Que vaut α ? Montrer qu'une telle famille de vecteurs existe.

Solution proposée.

Notons G la matrice de Gram considérée. On a

$$\operatorname{rg} [G - (1 - \alpha) I_{n+1}] = 1,$$

donc $(1 - \alpha)$ est valeur propre de G et le sous-espace propre associé de K^{n+1} est de dimension n par le théorème du rang. G étant diagonalisable par le théorème spectral, son rang est le nombre de valeurs propres non nulles.

Excluons tout d'abord le cas $\alpha = 1$: cela impliquerait l'égalité $\langle u_i \mid u_j \rangle = \|u_i\| \|u_j\|$ dans Cauchy-Schwarz, donc les u_i seraient positivement colinéaires, mais étant unitaires ils seraient tous égaux, ce qui est exclu.

Ceci étant fait, le rang de G est le rang de la famille $(u_0, ..., u_n)$, donc doit être inférieur à la dimension n de l'espace. Comme $1 - \alpha$ est une valeur propre non nulle d'ordre n, on dispose de l'inégalité inverse. On a donc $\operatorname{rg} G = n$, donc la dernière valeur propre est nulle. En prenant la trace, on obtient

$$n + 1 = n (1 - \alpha) \implies \alpha = -\frac{1}{n}.$$

G est alors une matrice symétrique de valeurs propres 0 et $1+\frac{1}{n}$, donc positive, donc de Gram, d'où l'existence des vecteurs souhaitée. Par exemple, pour $n=3$, on prendra les quatre sommets d'un tétraèdre régulier de centre l'origine, dont les produits scalaires font $-\frac{1}{3}$.

10 Modulo le groupe orthogonal...

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace euclidien E. Montrer l'équivalence

$$\|u(\cdot)\| = \|v(\cdot)\| \iff \exists \omega \in \mathcal{O}(E),\ v = \omega u$$

Solution proposée.

Le sens $\boxed{\Longleftarrow}$ est trivial compte tenu de la définition d'un endomorphisme orthogonal.

Montrons donc $\boxed{\Longrightarrow}$. On aimerait bien définir ω par vu^{-1}, mais évidemment u n'a aucune raison d'être inversible. En revanche, ce sera le cas sur un supplémentaire du noyau. Le cadre étant euclidien, il y un supplémentaire qui s'impose tout naturellement : l'orthogonal. On a donc un isomorphisme $\widetilde{u}$ de $(\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ sur $\operatorname{Im} u$. Par conséquent, on peut (et doit !) définir ω sur $\operatorname{Im} u$ par

$$\omega = v\widetilde{u}^{-1} : \operatorname{Im} u \longrightarrow \operatorname{Im} v.$$

Pour compléter la définition de ω, et ce afin d'avoir un isomorphisme, on le définit en envoyant un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ sur un supplémentaire $\operatorname{Im} v$: autant prendre $(\operatorname{Im} u)^{\perp}$ et $(\operatorname{Im} v)^{\perp}$! Et pour que ω aie une chance d'être orthogonal, on envoie plus précisément une b.o.n. de $(\operatorname{Im} u)^{\perp}$ sur une b.o.n. de $(\operatorname{Im} v)^{\perp}$: cela est possible car l'hypothèse implique l'égalité des noyau $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} v$ et donc celle des dimensions de $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$.

Vérifions que tout fonctionne. On a directement $v = \omega u$ par construction. Soit maintenant $x = i + i_{\perp}$ un vecteur de E que l'on décompose selon $\operatorname{Im} u \oplus (\operatorname{Im} u)^{\perp}$. Montrons que $\|\omega(x)\| = \|x\|$, ce qui prouvera que ω est orthogonal :

$$\|\omega(x)\|^2 = \|\omega(i+i_{\perp})\|^2 = \Bigg\|\underbrace{\omega(i)}_{\in \operatorname{Im} v} + \underbrace{\omega(i_{\perp})}_{\in (\operatorname{Im} v)^{\perp}}\Bigg\|^2 = \|\omega(i)\|^2 + \|\omega(i_{\perp})\|^2 \text{ par Pythagore};$$

le terme $\|\omega(i_{\perp})\|$ se simplifie en $\|i_{\perp}\|$ puisque ω envoie une b.o.n. de $(\operatorname{Im} u)^{\perp}$ sur une b.o.n. de $(\operatorname{Im} v)^{\perp}$, et le terme $\|\omega(i)\|$ se simplifie en $\|i\|$ en utilisant l'hypothèse de départ :

$$\|\omega(i)\| = \left\|v\widetilde{u}^{-1}(i)\right\| = \left\|u\widetilde{u}^{-1}(i)\right\| = \|i\|.$$

Finalement, toujours par Pythagore, on trouve

$$\|\omega(x)\|^2 = \|i\|^2 + \|i_{\perp}\|^2 = \|x\|^2, \textit{ CQFD.}$$

11 Un peu de topologie

Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Décrire l'exponentielle de l'application $a \wedge \cdot$.

Solution proposée.

On commence par regarder la matrice de notre application π (π comme "**p**roduit vectoriel") dans une b.o.n. $\left(\frac{a}{\|a\|}, b, c\right)$:

$$\operatorname{Mat} \pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\|a\| \\ 0 & \|a\| & 0 \end{pmatrix}.$$

π est donc antisymétrique, donc son exponentielle est une isométrie :

$$e^{\pi}\left(e^{\pi}\right)^{*}=e^{\pi}e^{\pi^{*}}=e^{\pi+\pi^{*}}=e^{0}=\mathrm{Id}\,.$$

Par isotropie de l'espace, l'axe de cette rotation ne peut être que $\mathbb{R}a$. Pour obtenir l'angle, on sait que $\operatorname{tr}e^{\pi}=e^{\lambda}+e^{\mu}+e^{\nu}$ où (λ,μ,ν) sont les valeurs propres (complexes) de π : son polynôme caractéristique valant $X\left(X^2+\alpha^2\right)$ où α désigne la norme de a, on trouve $\operatorname{tr}e^{\pi}=1+2\cos\alpha$, d'où l'angle $\pm\alpha$. Il faut trancher le signe : on regarde pour cela le signe du produit mixite

$$[b,\pi(b),a]=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&\alpha&0\end{vmatrix}=\alpha>0.$$

Finalement, e^{π} est une rotation d'angle $\|a\|$ autour de a.

Remarque. On aurait également pu calculer directement l'exponentielle de la matrice de π. Il suffit pour cela d'avoir celle de $R=\begin{pmatrix}0&-\alpha\\\alpha&0\end{pmatrix}$. Or, un calcul immédiat donne $R^2=-\alpha^2I_2$, d'où

$$e^{R}=\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-...\right)I_2+\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-...\right)R=(\cos\alpha)\,I_2+(\sin\alpha)\,R$$

et

$$\underset{\left(\frac{a}{\|a\|},b,c\right)}{\mathrm{Mat}}\;e^{\pi}=\begin{pmatrix}1&&\\&\cos\alpha&-\sin\alpha\\&\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

12 Une optimisation

Déterminer

$$\min_{a\in\mathbb{R}^n}\int_0^1\left(x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0\right)^2dx.$$

Solution proposée.

On considère l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ muni du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 fg.$$

En notant $F=\mathrm{Vect}\left\{1,x,...,x^{n-1}\right\}$ le sev des polynômes de degré $<n$, le minimum recherché est en fait la distance de la fonction x^n au sev F. L'exercice 6 nous donne un moyen efficace de calculer cette distance à l'aide de déterminants : il s'agit de calculer le quotient de Gram

$$\sqrt{\frac{g\left(1,x,...,x^n\right)}{g\left(1,x,...,x^{n-1}\right)}}.$$

Pour cela, on notera que

$$\left\langle x^{\alpha}\mid x^{\beta}\right\rangle=\int_0^1x^{\alpha+\beta}dx=\frac{1}{\alpha+\beta+1}.$$

On reconnait là un déterminant de Cauchy (cf. feuille sur les déterminants) :

$$g\left(1,x,...,x^n\right)=\det\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0\le i,j\le n}=\frac{\prod_{i<j}(i-j)^2}{\prod_{i,j}(i+j+1)}.$$

Le minimum cherché vaut donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{g\left(1,x,...,x^{n}\right)}{g\left(1,x,...,x^{n-1}\right)}} &= \sqrt{\frac{\prod_{0\leq i<j\leq n}(i-j)^{2}}{\prod_{0\leq i<j<n}(i-j)^{2}}\frac{\prod_{0\leq i,j<n}(i+j+1)}{\prod_{0\leq i,j\leq n}(i+j+1)}} \\
&= \sqrt{\frac{\prod_{0\leq i<n}(n-i)^{2}}{2n+1}\frac{1}{\prod_{0\leq i<n}(i+n+1)\prod_{0\leq j<n}(n+j+1)}} \\
&= \sqrt{\frac{n!n!}{(2n)!\,(2n)!}\frac{n!^{2}}{2n+1}} \\
&= \frac{n!^{2}}{(2n)!}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}
\end{aligned}$$

13 CNS pour que $\left\|\int f\right\| = \int \|f\|$

Soit E un espace préhilbertien et f une application continue définie sur un segment à valeurs dans E. Donner une CNS sur f pour que

$$\left\|\int f\right\| = \int \|f\|.$$

On pourra regarder les cas $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exhiber un contre-exemple si la norme n'est plus issue d'un produit scalaire.

Solution proposée.

Regardons les petites dimensions pour intuiter le résultat.

Le principal problème est que l'expresion $\left\|\int f\right\|$ est trop rigide pour travailler : on ne peut rien sortir de la norme à moins de majorer (mais on perd alors de l'information car on perd le signe =).

Dans le cas réel, $\left\|\int f\right\|$ s'écrit $\varepsilon \int f$ où $\varepsilon^2 = 1$, ce qui rend le terme $\left\|\int f\right\|$ plus malléable et permet d'utiliser la linéarité de l'intégrale afin d'écrire

$$\int |f| - \varepsilon f = 0\,;$$

le signe de $|f| - \varepsilon f$ étant constant, $|f| - \varepsilon f$ doit être nul, d'où $f = \varepsilon\,|f|$ de signe constant, ce qui est bien un cas d'égalité.

Dans le cas complexe, on procède de même pour faire sauter la norme dans $\left\|\int f\right\|$: on peut toujours écrire $\left\|\int f\right\| = u \int f$ pour un complexe u unitaire bien choisi. On écrit de même

$$\int |f| - uf = 0\,;$$

en prenant la partie réelle $|f| - \mathrm{Re}\,(uf)$, qui est positive, on doit avoir $|f| = \mathrm{Re}\,(uf)$, ce qui impose $uf \geq 0$. On peut donc écrire $f = \lambda u$ où λ est une application scalaire positive, ce qui bien un cas d'égalité. Voilà notre CNS.

Dans le cas général, il faut utiliser utiliser le produit scalaire de notre evn au vu de la dernière question. Cela tombe bien, c'est un bon moyen pour se débarasser de la norme dans $\left\|\int f\right\|$; un simple Cauchy-Schwarz va nous permettre de conclure :

$$\left\|\int f\right\|^{2} = \left\langle \int f \mid \int f \right\rangle = \int \left\langle f \mid \int f \right\rangle \leq \int \|f\| \left\|\int f\right\| = \left\|\int f\right\|^{2},$$

ce qui impose f positivement colinéaire à $\int f$. Si $\int f = 0$, on doit avoir $\int \|f\| = 0$ d'où $f = 0$, sinon on peut écrire $f = \lambda \int f$; dans les deux cas, f est portée par une demi-droite, *CQFD*.

Pour un contre-exemple, il est bon de chercher des evn où les boules contiennent des plats (cf. remarque plus bas). Par exemple, intégrer le vecteur $(1, t)$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie pour $|t| \leq 1$.

Remarque. Comme le montre la dernière question, le résultat tombe en défaut dans le cas d'un evn quelconque. Plus précisément, si l'énoncé est conservé pour toute fonction f intégrable sur un segment, il donne le cas discret d'égalité triangulaire : étant donnés deux vecteurs a et b tels que $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$, en posant $f = a$ sur $[-1, 0[$ et $f = b$ sur $]0, 1]$ (ce qui, au passage, est la seule manière raisonnable de modéliser continûment du discret), on obtient

$$\left\| \int_{-1}^{1} f \right\| = \|a+b\| = \|a\| + \|b\| = \int_{-1}^{1} \|f\|,$$

donc f doit être portée par une demi-droite (sauf peut-être en 0), d'où a et b positivement colinéaires.

Ce cas d'égalité a lieu ssi les boules de l'evn considéré ne contiennent pas de plat (cf. seconde feuille sur les evn pour plus de précisions), et le cas de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie est un contre-exemple naturel (on veut des boules plates, autant en prendre des carrées).

14 Compacité séquentielle faible de la boule unité de $l^2(\mathbb{C})$

On considère l'evn $l^2(\mathbb{C})$ des suites complexes de carré sommable normé par $\|u\| = \sqrt{\sum_{i\geq 0} |u_i|^2}$. On dira qu'une suite (u^n) *converge faiblement* vers un u si pour tout x on a $\langle x \mid u^n \rangle \longrightarrow \langle x \mid u \rangle$. La convergence usuelle entrainant clairement la convergence faible, on l'appellera également *convergence forte.*

Montrer qu'une suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $l^2(\mathbb{C})$ uniformément bornée converge faiblement, quitte à extraire. Montrer qu'il n'y a pas toujours convergence forte.

Solution proposée.

Il faut observer que la convergence faible entraine la convergence ponctuelle il suffit de prendre pour x dans l'énoncé un dirac en la i-ième coordonnée. Cela nous donne une piste pour construire la limite faible : toute limite ponctuelle est un bon candidat.

L'hypothèse d'uniforme bornitude implique que les $\sum_{i\geq 0} |u_i^n|^2$ sont bornés par un même M^2 indépendant de n. En particulier, tous les u_i^n sont uniformément bornés lorsque i et n varient.

Fixons alors une coordonnée i et faisons varier l'indice de la suite $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient une suite $(u_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, bornée par ce qui précède, dont on peut par conséquent extraire une sous-suite convergente. En faisant $i = 0, 1, 2...$ et en extrayant successivement, on construit par récurrence des extractrices $\varphi_1, ..., \varphi_n, ...$ telles que

$$\forall i,\ u_i^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ...\circ\varphi_i(n)} \overset{n\infty}{\longrightarrow} u_i^\infty$$

où u^∞ est une suite de complexes.

On effectue alors un *procédé diagonal* en considérant l'extratrice

$$\psi(n) = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ ... \circ \varphi_n(n).$$

Ainsi, la suite $\left(u_i^{\psi(n)}\right)_{n\geq i}$ est une sous-suite de $\left(u_i^{\varphi_1\circ\varphi_2\circ...\circ\varphi_i(n)}\right)_{n\geq i}$, donc converge vers la même limite u_i^∞. Ceci montre que $\left(u^{\psi(n)}\right)$ converge simplement vers u^∞, d'où un bon candidat pour la limite faible : montrons qu'en effet u^∞ est bien la limite faible de $\left(u^{\psi(n)}\right)$.

Regardons déjà si u^∞ est bien dans $l^2(\mathbb{C})$. Les sommes partielles $\sum_{i=0}^{N} \left|u_i^{\psi(n)}\right|^2$ étant majorées par $\left\|u^{\psi(n)}\right\|_2^2 < M^2$, passer à la limite en n donne

$$\sum_{i=0}^{N} |u_i^\infty|^2 < M^2,$$

puis on fait tendre N vers l'infini pour avoir $u^\infty \in l^2(\mathbb{C})$.

Soit ensuite $x \in l^2(\mathbb{C})$. On veut $\left\langle x \mid u^{\psi(n)} \right\rangle \longrightarrow \langle x \mid u^\infty \rangle$, *i.e.* $\left\langle x \mid u^{\psi(n)} - u^\infty \right\rangle \longrightarrow 0$. On développe le produit scalaire en coupant la somme en deux et en utilisant Cauchy-Schwarz pour faire appaître des normes 2 (sur lesquelles on a de l'information) :

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle x \mid u^{\psi(n)} - u^\infty \right\rangle\right| &\leq \sum_{i=0}^{N} |x_i| \left|u_i^{\psi(n)} - u_i^\infty\right| + \sum_{i>N} |x_i| \left|u_i^{\psi(n)}\right| + \sum_{i>N} |x_i| |u_i^\infty| \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} |x_i| \left|u_i^{\psi(n)} - u_i^\infty\right| + \sqrt{\sum_{i>N} |x_i|^2} \left(\sqrt{\sum_{i>N} \left|u_i^{\psi(n)}\right|^2} + \sqrt{\sum_{i>N} |u_i^\infty|^2} \right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} |x_i| \left|u_i^{\psi(n)} - u_i^\infty\right| + 2M \sqrt{\sum_{i>N} |x_i|^2}.
\end{aligned}$$

On prend alors N assez grand pour négliger le second terme (cela est possible car $x \in l^2(\mathbb{C})$), puis on prend n assez grand pour tuer le premier (par convergence simple de $u^{\psi(n)}$ vers u^∞).

En notant u^n le Dirac en n, *i.e.* la suite nulle partout sauf en n où elle vaut 1, on vérifie que $\langle x \mid u^n \rangle = x_n \longrightarrow 0$ pour tout $x \in l^2(\mathbb{C})$, d'où convergence faible des u^n, tandis que la condition $\|u^n\|_2 = 1$ empêche tout convergence uniforme vers 0.

Remarque. Pourquoi l'exercice porte-t-il un nom aussi exotique ?

Lorsque l'on a un evn E, l'on dispose de son dual topologique E', ensemble des formes linéaires continues sur E. Il se trouve que, topologiquement, ce sont ces formes linéaires qui nous intéressent le plus, ce qui incite à mettre sur E une topologie qui soit juste assez fine pour rendre continues ces formes linéaires : on l'appelle *topologie faible*, par opposition à la topologie d'evn sur E qui est aussi appelée *topologie forte*.

On dira alors qu'une suite $(a_n) \in E^N$ *converge faiblement* vers un $a \in E$ si elle converge vers a pour la topologie faible, *i.e.* si $\langle \varphi, a_n \rangle$ converge vers $\langle \varphi, a \rangle$ pour tout $\varphi \in E'$. Dans un espace de Hilbert, ce qui est le cas de $l^2(\mathbb{C})$, toute forme linéaire continue est la projection scalaire sur un vecteur, ce qui permet de retrouver la définition posée dans l'énoncé.

Pourquoi maintenant parler de "séquentielle compacité" ? En dimension finie, topologie faible et forte coïncident, mais en dimension infinie les topologies faibles ne sont jamais métrisables, ce qui oblige à distinguer compacité au sens de Borel-Lebesgue ou de Bolzano-Weiertrass. L'énoncé revient alors à montrer que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence pour la topologie faible, *i.e.* (quitte à normaliser) que la boule unité est faiblement compacte au sens de Bolzano-Weiertrass.

15 Morphismes pour le produit vectoriel

On considère une application $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ non nulle qui respecte le produit vectoriel, *i.e.* telle que

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

On veut montrer que f est une rotation.

- *Conclure si f est supposée linéaire.*
- *Étudier les zéros de f.*
- *Montrer que f préserve l'orthogonalité (on pourra établir l'identité $f\left(x^\perp\right) = f(x)^\perp$ valable pour un vecteur $x \neq 0$ que l'on écrira sous plusieurs formes $a \wedge b$).*
- *À l'aide d'un double produit vectoriel, montrer qu'il y a un morphisme multiplicatif $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$f(\lambda a) = p(\lambda) f(a).$$

- *Montrer que f* est additive*.*
- *Conclure.*

Solution proposée.

- On utilise le lien entre produits mixte, scalaire et vectoriel : on a

$$\begin{aligned} \text{d'une part, } [f(a), f(b), f(c)] &= \langle f(a) \wedge f(b) \mid f(c) \rangle = \langle f(a) \wedge f(b) \mid f(c) \rangle, \\ \text{d'autre part, } [f(a), f(b), f(c)] &= \det f \cdot [a, b, c] = \langle \det f \cdot a \wedge b, c \rangle, \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \det f \cdot \langle x, y \rangle \text{ pour tous } x, y \in \mathbb{R}^3$$

(en effet, tout vecteur x s'écrit sous forme d'un produit vectoriel : si $x = 0$, on prend deux vecteurs égaux, sinon on considère une b.o.n. $\left(u, v, \frac{x}{\|x\|}\right)$ de sorte que $\frac{x}{\|x\|} = u \wedge v$). Ainsi, au déterminant près, f est une isométrie. Passer en écriture matricielle permet de récupérer le déterminant : avec les notations évidentes, l'égalité ci-dessus se réécrit

$$(AX)^* AY = \delta \cdot X^* Y, \ i.e.\ X^* (A^* A - \delta I_3) Y = 0 \text{ pour tout } X, Y \in \mathbb{R}^n.$$

On en déduit $A^* A = \delta I_3$, d'où en prenant le déterminant $|A|^2 = |A|^3$ et

$$\det f = 0 \text{ ou } 1.$$

Si $\det f = 1$, alors f conserve le produit scalaire et est donc une rotation, sinon, on a $\langle f(x), f(y)\rangle = 0$ pour tout x, y, en particulier pour $x = y$, d'où $\|f(x)\|^2 = 0$ pour tout x et f est nulle, ce qu'on a exclu.

On aura donc terminé si l'on montre que f est linéaire. Ce n'est pas gagné...

• Soit a un antécédent de 0, supposé non nul.On a donc $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) = 0$ pour tout vecteur b, ce qui montre que f est nulle sur le plan $a^\perp$. On propage ainsi le lieu des zéros de f :

$$f \text{ nulle au point } a \implies f \text{ nulle sur tout le plan } a^\perp.$$

Ceci va suffire à montrer que f est nulle partout, ce qu'on a exclu par hypothèse. En effet, soit x un vecteur quelconque. S'il n'est pas colinéaire à a, il y a un u non nul orthogonal à a et x (par exemple $u = a \wedge x$), ce qui permet de relier la nullité en a à celle en x :

$$f(a) = 0 \implies f(u) = 0 \implies f(x) = 0.$$

Si x est lié à a, on considère n'importe quel vecteur $u \perp a$ (donc $u \perp x$), et on réécrit la même chose.

Finalement, $a = 0$ est le seul candidat possible. On vérifie aisément qu'il convient :

$$f(0) = f(0 \wedge 0) = f(0) \wedge f(0) = 0.$$

• Soit $x \neq 0$. On peut écrire $x = a \wedge b$ avec une multitude de choix pour a et b, qui donne plein d'information. En particulier, a peut être pris quelconque dans le plan $x^\perp$ (privé de l'origine, quand même), et le résultat $f(x) = f(a) \wedge f(b)$ doit être orthogonal à $f(a)$. Ceci tenant encore pour $a = 0$, on obtient

$$f(x) \in f\left(x^\perp\right)^\perp, \; i.e. \; \mathbb{R} f(x) \subset f\left(x^\perp\right)^\perp.$$

Pour avoir égalité (et donc l'égalité voulue en reprenant l'orthogonal), il suffit de montrer que $f\left(x^\perp\right)^\perp$ est une droite, $i.e.$ que sa dimension est ≤ 1 (puisqu'il contient déjà la droite $\mathbb{R} f(x)$). Ceci se réécrit

$$\dim f\left(x^\perp\right) \overset{?}{\geq} 2.$$

Par l'absurde : si $f\left(x^\perp\right) = \{0\}$, f s'annule en dehors de 0, ce qui contredit le point précédent ; si $f\left(x^\perp\right)$ est une droite, toujours en écrivant $x = a \wedge b$, on note que $f(a)$ et $f(b)$ sont dans $f\left(x^\perp\right)$, donc colinéaires, donc de produit vectoriel $f(x)$ nul, ce qui impose $x = 0$ par le second point, et c'est encore une contradiction. Finalement, on a la bonne dimension.

Il reste à montrer que f préserve l'orthogonalité, mais c'est maintenant immédiat :

$$a \perp b \implies a \in b^\perp \implies f(a) \in f\left(b^\perp\right) = f(b)^\perp \implies f(a) \perp f(b).$$

• On rappelle la formule du double-produit vectoriel :

$$(a \wedge b) \wedge c = \langle a \mid c\rangle b - \langle b \mid c\rangle a.$$

En appliquant f, et en notant systématiquement les images avec des $'$ (par exemple $f(a) = a'$), on obtient

$$\begin{array}{rcl} f(\langle a \mid c\rangle b - \langle b \mid c\rangle a) & = & \langle a' \mid c'\rangle b' - \langle b' \mid c'\rangle a', \\ \text{ou encore } f(\lambda b - \mu a) & = & \lambda' f(b) - \mu' f(a) \end{array}$$

avec les notations évidentes. Ceci ressemble à de la linéarité : si l'on pouvait choisir les coefficients λ et μ et montrer qu'il sont inchangés par f, on aurait gagné.

Cherchons déjà à extraire plein d'information de cette égalité en faisant jouer les paramètres. Fixons b non nul. En prenant $b \perp c$ pour tuer les seconds produits scalaires, on trouve

$$f(\langle a \mid c\rangle b) = \langle a' \mid c'\rangle b'$$

(noter que l'on utilise le troisième point). On prend ensuite $a = \lambda c$ et c unitaire pour obtenir un $f(\lambda b)$ à gauche :

$$f(\lambda b) = \underbrace{\langle f(\lambda c) \mid f(c)\rangle}_{:= p_c(\lambda)} f(b).$$

Il s'agit d'observer que le $p_c(\lambda) = \frac{\langle f(\lambda b) | f(b)\rangle}{\|f(b)\|^2}$ sus-défini ne dépend pas de c. Mais c ne se balade pas n'importe où : il a été pris unitaire et orthogonal à b, donc décrit un cercle unité de vecteur normal b. Lorsque b varie, ce cercle unité recouvre toute la sphère unité. Ainsi, la quantité $p_c(\lambda)$ définie pour c unitaire est constante sur tout cercle unité, donc constante sur toute la sphère, deux points de la sphère se trouvant toujours sur un tel cercle. Par conséquent, la dépendance en c tombe :

$$f(\lambda b) = p(\lambda) f(b),$$

relation qui tient encore pour $b = 0$, *CQFD.*

Le fait que p préserve la multiplication est immédiat en simplifiant pour $x \neq 0$

$$p(\lambda\mu) f(x) = f(\lambda\mu x) = p(\lambda) f(\mu x) = p(\lambda) p(\mu) f(x).$$

Évidemment, notre but est de montrer $p = \mathrm{Id}$.

• Reprenons l'égalité (valable pour $b \perp c$)

$$f(\langle a \mid c\rangle b) = \langle a' \mid c'\rangle b'.$$

En utilisant la définition de p, on voit comment f agit sur le produit scalaire :

$$\langle f(a) \mid f(c)\rangle = p(\langle a \mid c\rangle),$$

ce que l'on s'empresse de réinjecter au départ :

$$f(\lambda b - \mu a) = p(\lambda) b' - p(\mu) a' \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \langle a \mid c\rangle \\ \mu = \langle b \mid c\rangle \end{array} \right. .$$

Pour simplifier, on choisit c tel que $(\lambda, \mu) = (1, 1)$: il s'agit de l'intersection de deux plans affines de vecteurs normaux a et b, donc ceci sera possible pour a et b non colinéaires, d'où

$$f(b - a) = f(b) - f(a).$$

Pour obtenir cette relation sur tout le monde, on passe par un vecteur intermédiaire : si a et b sont colinéaires, on prend un troisième vecteur c à choisir judicieusement, ce afin d'écrire

$$\begin{array}{rcl} f(b - a) & = & f((b - c) + (c - a)) \\ & \stackrel{?}{=} & f(b - c) + f(c - a) \\ & \stackrel{?}{=} & (f(b) - f(c)) + (f(c) - f(a)) \\ & = & f(b) - f(a). \end{array}$$

Il suffit de choisir c tel que les trois familles $(b - c, c - a)$, (b, c) et (c, a) soient libres, ce que l'on fait en cherchant à nier le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz. Pour évaluer le produit scalaire $\langle b - c \mid c - a\rangle$, il est commode de choisir c dans l'orthogonal de a et b, ce qui a le bon goût d'en outre libérer c de a et b (il faut pour cela prendre a et b non nuls). On trouve ainsi

$$\begin{array}{rcl} \langle b - c \mid c - a\rangle & = & 0 - \langle a \mid b\rangle - \|c\|^2 + 0 \\ & = & \pm \|a\| \|b\| - 1 \text{ quitte à prendre } c \text{ unitaire,} \end{array}$$

que l'on doit comparer à

$$\|b - c\| \|c - a\| = \sqrt{\|b\|^2 + 1}\sqrt{1 + \|a\|^2}.$$

En notant α et β les normes de a et b, on veut donc

$$\begin{array}{rl} & \langle b - c \mid c - a\rangle^2 \stackrel{?}{<} \|b - c\|^2 \|c - a\|^2 \\ \iff & (1 \mp \alpha\beta)^2 \stackrel{?}{<} \left(\alpha^2 + 1\right)\left(\beta^2 + 1\right) \\ \iff & 1 \mp 2\alpha\beta + \alpha^2\beta^2 \stackrel{?}{<} \alpha^2\beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 1 \\ \iff & \mp 2\alpha\beta \stackrel{?}{<} \alpha^2 + \beta^2 \\ \iff & (\alpha \pm \beta) \stackrel{?}{>} 0, \end{array}$$

ce qui est toujours vérifié sauf si $\alpha = \beta$, ce qui correspond à $a = b$, mais ce cas est trivial à vérifier (tout comme $a = 0$).

Finalement, on a montré
$$\forall a, \forall b \neq 0,\ f(b-a) = f(b) - f(a).$$
Pour $b = 0$, on veut $f(-a) = -f(a)$, *i.e.* $p(-1) = -1$. Or, on sait que $p(-1)$ vaut ± 1 car son carré vaut $p\left((-1)^2\right) = p(1) = 1$; le cas gênant est donc $p(-1) = 1$, *i.e.* f est paire. Si cela a lieu, on peut écrire
$$f(a) - f(b) = f(a-b) = f(b-a) = f(b) - f(a),$$
d'où f constante en dehors de 0, ce qui contredit le respect du produit vectoriel (prendre $a \perp b$ par exemple).

• L'additivité de f se propage à p :
$$p(\lambda+\mu) f(x) = f((\lambda+\mu)x) = f(\lambda x + \mu x) = f(\lambda x) + f(\mu x) = (p(\lambda) + p(\mu)) f(x).$$
On en déduit que p est un morphisme du corps $\mathbb{R}$, donc vaut l'identité, ce qui permet d'écrire
$$f(\lambda x) = p(\lambda) f(x) = \lambda f(x).$$
Ceci conclut la démonstration de la linéarité de f.