Coniques

Marc SAGE

1$^{\text{ier}}$ juillet 2008

Table des matières

1 Rotations des axes

1.1 Comment se débarasser du terme croisé

On se donne une conique dans le plan régie par l'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Montrons que l'on peut se débarasser du terme en xy par une rotation des axes bien choisie.

Solution proposée.
Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point dans la base correspondant à l'équation de la conique et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ ses nouvelles coordonées après rotation des axes d'un angle θ.

On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos\theta - v\sin\theta \\ u\sin\theta + v\cos\theta \end{pmatrix},$$

et en substituant dans l'équation de la conique on obtient (en ne regardant que le terme en uv)

$$\begin{aligned} 0 &= a\left(u\cos\theta - v\sin\theta\right)^2 + b\left(u\cos\theta - v\sin\theta\right)\left(u\sin\theta + v\cos\theta\right) + c\left(u\sin\theta + v\cos\theta\right)^2 \\ &\quad + d\left(u\cos\theta - v\sin\theta\right) + e\left(u\sin\theta + v\cos\theta\right) + f \\ &= (*)\,u^2 + (*)\,v^2 + \left[-2a\cos\theta\sin\theta + b\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2c\cos\theta\sin\theta\right]uv + (*)\,u + (*)\,v + f. \end{aligned}$$

On regarde le terme en uv, que l'on veux faire sauter pour un θ bien choisi :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} -2a\cos\theta\sin\theta + b\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2c\cos\theta\sin\theta \\ 0 &\overset{?}{=} -a\sin 2\theta + b\cos 2\theta + c\sin 2\theta \\ \tan 2\theta &\overset{?}{=} \frac{b}{a-c} \\ \theta &= \frac{1}{2}\operatorname{atn}\frac{b}{a-c} \end{aligned}$$

avec des conventions évidentes $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ si $a = c$.

1.2 Invariance du discriminant par rotation des axes

On se donne toujours une conique d'équation

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Montrons que le discriminant

$$\Delta := b^2 - 4ac$$

est inchangé par une rotation quelconque des axes.

Solution proposée.
On reprend les même notations qu'à l'exercice précédent. Travaillons chacun des termes afin de calculer le nouveau discriminant $\Delta' = b'^2 - 4a'c'$. On introduit quelques notations qui vont nous simplifier les calculs :

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma := a + c \ (\sigma \text{ pour "}\mathbf{s}\text{omme"}) \\ \delta := a - c \ (\delta \text{ pour "}\mathbf{d}\text{ifférence"}) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{c} \delta + ib =: \rho e^{i\varphi} \\ b + i\delta =: \rho e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} \end{array} \right. .$$

Les secondes notations sont introduites afin d'utiliser la formule de factorisation

$$\alpha\cos x + \beta\sin x = r\cos\left(x - \vartheta\right) \text{ où } \alpha + \beta i = re^{i\vartheta}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} a' &= a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta = a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\frac{\sin 2\theta}{2} + c\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma + \delta\cos 2\theta + b\sin 2\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma + \rho\cos\left(2\theta - \varphi\right)\right), \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} b' &= -2a\cos\theta\sin\theta + b\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + 2c\cos\theta\sin\theta = -a\sin 2\theta + b\cos 2\theta + c\sin 2\theta \\ &= b\cos 2\theta - \delta\sin 2\theta = \rho\cos\left(2\theta + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right) = -\rho\sin\left(2\theta - \varphi\right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} c' &= a\sin^2\theta - b\cos\theta\sin\theta + c\cos^2\theta = a\frac{1-\cos 2\theta}{2} - b\frac{\sin 2\theta}{2} + c\frac{1+\cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma - \delta\cos 2\theta - b\sin 2\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma - \rho\cos\left(2\theta - \varphi\right)\right). \end{aligned}$$

Il reste à calculer

$$\begin{aligned} \Delta' &= \rho^2\sin^2\left(2\theta - \varphi\right) - \left(\sigma + \rho\cos\left(2\theta - \varphi\right)\right)\left(\sigma - \rho\cos\left(2\theta - \varphi\right)\right) \\ &= \rho^2\sin^2\left(2\theta - \varphi\right) - \sigma^2 + \rho^2\cos^2\left(2\theta - \varphi\right) = \rho^2 - \sigma^2 = b^2 + \delta^2 - \sigma^2 \\ &= b^2 + \left(\delta - \sigma\right)\left(\delta + \sigma\right) = b^2 - 4ac = \Delta. \end{aligned}$$

Une façon (beaucoup) mois douloureuse consiste à introduire des matrices de formes quadratiques. On peut en effet réécrire le terme $ax^2 + bxy + cy^2$ sous la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^\top \Phi X$$

où $X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\Phi := \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$; on remarque alors que $\Delta = -\frac{1}{4}\det\Phi$.

La rotation des axes d'angle θ transforme $X = R_\theta X'$ où $X' := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et R_θ est une matrice de rotation qui vérifie $R_\theta^\top = R_\theta^{-1}$, ce qui donne

$$a'u^2 + b'uv + c'v^2 = ax^2 + bxy + cy^2 = \left(R_\theta X'\right)^\top \Phi\left(R_\theta X'\right) = X'^\top\left(R_\theta^{-1}\Phi R_\theta\right)X',$$

d'où le nouveau discriminant

$$\Delta' = -\frac{1}{4}\det\left(R_\theta^{-1}\Phi R_\theta\right) = -\frac{1}{4}\det\Phi = \Delta.$$

1.3 Nature de la conique et signe du discriminant

Montrer que la nature de la conique est donné par le signe du discriminant :

$$\begin{cases} \Delta < 0 \implies \textit{ellipse} \\ \Delta = 0 \implies \textit{parabole} \\ \Delta > 0 \implies \textit{hyperbole} \end{cases}.$$

Solution proposée.

Quitte à éliminer le terme croisé, ce qui ne change pas Δ d'après ce qui précède, on peut supposer que $b = 0$. On a alors

$$\Delta = -ac.$$

• Si $\Delta < 0$, *i.e.* si a et c sont non nuls de même signe, quitte faire une translation, on peut imposer $d = e = 0$. On peut en outre toujours supposer a et $c > 0$. On obtient l'équation

$$ax^2 + cy^2 + f = 0.$$

Si $f > 0$, alors la conique est réduite à l'ensemble vide.
Si $f = 0$, on obtient un unique point $(0, 0)$.
Dans le cas contraire, on divise par $-acf$, on pose $\begin{cases} \alpha := \sqrt{-cf} \\ \beta := \sqrt{-af} \end{cases}$, ce qui donne une ellipse d'équation

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = 1.$$

• Si $\Delta > 0$, *i.e.* a et c non nuls de signe contraire, on suppose $d = e = 0$ et $\begin{cases} a > 0 \\ c < 0 \end{cases}$, d'où l'équation

$$ax^2 + cy^2 + f = 0.$$

Si $f = 0$, on pose $\gamma := \sqrt{\frac{-a}{c}}$ et obtient une paire de droite (hyperbole dégénérée) régies par

$$|y| = \gamma\,|x|\,.$$

Si $f \neq 0$, on divise par $-ac\,|f|$, on pose $\begin{cases} \alpha := \sqrt{-c\,|f|} \\ \beta := \sqrt{a\,|f|} \end{cases}$, ce qui donne une hyperbole d'équation

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 = \pm 1.$$

• Si enfin $\Delta = 0$, alors ou bien $a = c = 0$, auquel cas la conique est réduite à une droite (parabole dégénérée), ou bien (par exemple) $\begin{cases} c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$, ce qui permet d'obtenir l'équation

$$x^2 + dx + ey + f = 0.$$

Il faut juste distinguer le cas $e = 0$ qui donne zéro, une ou deux droites parallèles (selon le nombre de racines du trinôme $X^2 + dX + f$), et le cas $e \neq 0$ qui donne une parabole bien classique.

Remarque. On notera le parallèle avec la position de l'excentricité e par rapport à 1 :

$$\begin{cases} e < 1 \iff \text{ellipse} \iff \Delta < 0 \\ e = 1 \iff \text{parabole} \iff \Delta = 0 \\ e > 1 \iff \text{hyperbole} \iff \Delta > 0 \end{cases}.$$

Ainsi, suivant la logique *hypo-para-hyper*, une ellipse devrait logiquement s'appeler *hypobole*. Heureusement que les langues ne sont pas (complètement) sous l'emprise de la logique...

2 Propriété fondamentale des tangentes à une ellipse

On se donne un point M sur une ellipse de foyer F et F'. Montrer que la normale en M à l'ellipse est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Solution proposée.
On rappelle que si l'ellipse est donnée par l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

alors la tangente (T_M) en $M(x_0,y_0)$ est donnée par

$$(T_M) : \frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}:=\begin{pmatrix}\frac{x_0}{a^2}\\ \frac{y_0}{b^2}\end{pmatrix}$.

Par ailleurs, les abscisses des foyers (supposés d'ordonnée nulle) sont

$$\pm c:=\pm\sqrt{a^2-b^2}.$$

On a donc les vecteurs

$$\overrightarrow{MF}=\begin{pmatrix}c-x_0\\ -y_0\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{MF'}=\begin{pmatrix}-c-x_0\\ -y_0\end{pmatrix}.$$

Le problème peut maintenant se formuler de la manière suivante. Vu que l'angle $\widehat{FMF'}$ est toujours aigu, il suffit de montrer l'égalité des cosinus de $\left(\overrightarrow{n},\overrightarrow{MF}\right)$ et $\left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{n}\right)$, ce qui s'écrit

$$\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{n}\|\left\|\overrightarrow{MF}\right\|}-\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{n}\|\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|}\overset{?}{=}0.$$

Remarquons déjà que

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MF}=\begin{pmatrix}\frac{x_0}{a^2}\\ \frac{y_0}{b^2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c-x_0\\ -y_0\end{pmatrix}=\frac{x_0c}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{x_0c}{a^2}-1,$$

et pareil pour $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MF'}$ en changeant le c en $-c$. On a donc, en notant $x\equiv y$ pour dire que $x=y$ à une constante multiplicative près :

$$\begin{aligned}
\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MF}}{\|\overrightarrow{n}\|\left\|\overrightarrow{MF}\right\|}-\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MF'}}{\|\overrightarrow{n}\|\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|} &\equiv \left(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MF}\right)MF'-\left(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{MF'}\right)MF\\
&= \left(\frac{x_0c}{a^2}-1\right)MF'-\left(-\frac{x_0c}{a^2}-1\right)MF\\
&= (MF-MF')+\frac{x_0c}{a^2}(MF'+MF)\\
&= (2MF-2a)+\frac{x_0c}{a^2}2a\\
&\equiv MF-a+\frac{c}{a}x_0
\end{aligned}$$

qui est nul ssi

$$\begin{aligned}
MF=a-\frac{c}{a}x_0 &\iff (x_0-c)^2+y_0^2=\left(a-\frac{c}{a}x_0\right)^2\\
&\iff x_0^2-2x_0c+\left(a^2-b^2\right)+\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2\right)=a^2-2cx_0+\frac{a^2-b^2}{a^2}x_0^2\\
&\iff x_0^2-\frac{b^2}{a^2}x_0^2=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x_0^2\\
&\iff 0=0, \text{ ce qui est vrai, } \textit{CFQD}.
\end{aligned}$$

On aurait également pu raisonner sur les sinus et montrer que

$$\frac{\det\left(\overrightarrow{n},\overrightarrow{MF}\right)}{\|\overrightarrow{n}\|\left\|\overrightarrow{MF}\right\|}+\frac{\det\left(\overrightarrow{n},\overrightarrow{MF'}\right)}{\|\overrightarrow{n}\|\left\|\overrightarrow{MF'}\right\|}=0.$$

Les calculs sont légèrement plus longs.

Remarque. Le même résultat tient pour les hyperboles : un rayon se dirigeant vers un foyer se réfléchit sur l'hyperbole en direction de l'autre foyer. Il suffit de reprendre les mêmes calculs en changeant quelques signes (mais attention, l'angle $\widehat{FMF'}$ peut devenir obtus).

2.1 Toto rentre de l'école en passant par la rivière

On se donne le problème suivant : Toto rentre chez lui depuis l'école mais doit passer par la rivière pour relever ses nasses. Comme il s'appelle Toto, il veut se fatiguer le moins possible. Comment l'aider ? (précisons que l'école et la maison sont situées du même côté de la rivière...).

Solution proposée.

On modélise l'école par un point E, la maison par un point M, et la rivière par une droite (R) – on suppose que la courbure des méandres de la rivière est négligeable entre E et M. On appelle P le point où Toto relève ses nasses.

La solution classique consiste à dire : soit M' le symétrique de la maison M par rapport à la rivière (R) et P_0 le point d'intersection de (R) et de (EM'). La longueur du trajet est alors

$$EP + PM = EP + PM' \geq EM'$$

avec égalité ssi $P \in [EM']$, *i.e.* ssi $P = P_0$.

Utilisons les ellipses. L'idée est la suivante : Toto ne veut pas faire un trajet de longueur $\geq L$ fixé, il commence donc par prendre un L tout petit (correspondant au trajet direct $[EM]$ de l'école à la maison), puis il agrandit L jusqu'à ce qu'il puisse atteindre la rivière sur son trajet – et il ne va surtout pas chercher un L plus grand (trop fatiguant).

Faire un trajet de longeur L signifie que $EP + PM = L$, donc que P est sur une ellipse de foyers E et M.

On commence par prendre un L tout petit, de sorte que l'ellipse considérée soit réduite au segment $[EM]$ (trajet direct), puis on élargit l'ellipse (*i.e.* on augmente L) jusqu'à ce qu'elle touche pour la première fois (R). Il est clair que ce point de "touché" P_0 est le point recherché – car tous les chemins plus courts ne peuvent pas passer par la rivière – et que la rivière est tangente à l'ellipse considérée au point P_0.

Par conséquent, la normale en P_0 à la rivière bissecte l'angle $\widehat{EP_0M}$, ce qui signifie (en terme d'optique) que Toto fait une *réflexion parfaite* sur la rivière pour minimiser son action.

La méthode des ellipses nous donne donc une interprétation physique du résultat. Toto prendra le trajet que prendrait un rayon lumineux : par conséquent, et contrairement aux idées reçues, Toto est vraiment une lumière.

2.2 Maximisation de $MA + MB + MC$

On se donne un triangle non aplati ABC, et on cherche le maximum de la somme

$$\sigma(M) := MA + MB + MC$$

où M est un point intérieur au triangle (σ admet bien un maximum, car elle est continue sur un compact).

Solution proposée.

Soit M_0 maximisant σ. On considére l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers A et B en M_0. Pour tout point M de $\mathcal{E}$, on a alors

$$0 \leq \sigma(M_0) - \sigma(M) = M_0A + M_0B + M_0C - (MA + MB + MC) = M_0C - MC,$$

donc M_0 doit nécessairement maximiser la distance MC pour M point de l'ellipse $\mathcal{E}$ situé à l'intérieur du triangle ABC. Il est facile de voir qu'alors M_0 est forcément sur l'un des côtés $[CA]$ ou $[CB]$, et le problème devient trivial (le maximum sera atteint en un des sommet du triangle).

Remarque : minimiser σ est une autre paire de manches, autrement connu sous le nom de problème de Fermat. Il convient pour le résoudre de définir le point T de *Toricelli* du triangle ABC. On construit à l'extérieur de ABC trois triangles équilatéraux de bases respectives $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$, et on prend T l'intersection des cercles circonscrits à chacun de ces trois triangles (il faut déjà montrer qu'elle est non vide...). Ensuite, on montre que si les trois angles de ABC sont inférieurs à $120°$ alors $\sigma(M)$ est minimal ssi $M = T$, et si mettons $\widehat{A} > 120°$ alors $\sigma(M)$ minimal ssi $M = A$.

2.3 Maximisation de $MA + MB + MC + MD$

On se donne un quadrilatère convexe $ABCD$, et on cherche le minimum de la somme

$$\sigma(M) := MA + MB + MC + MD$$

où M est un point intérieur au quadriltère.

Solution proposée.
Nous allons intuiter le maximum avec des ellipses.
Soit M_0 maximisant σ. On considére les ellipses

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} \text{ de foyers } A \text{ et } B \text{ en } M_0 \\ \mathcal{E}' \text{ de foyers } C \text{ et } D \text{ en } M_0 \end{array} \right. .$$

Pour des raisons analogues aux ellipses de Toto, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont tangentes en M_0, d'où des égalités d'angles données par la normale bissectrice.
On refait le même raisonnement en considérant les ellipses

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}'' \text{ de foyers } B \text{ et } C \text{ en } M_0 \\ \mathcal{E}''' \text{ de foyers } D \text{ et } A \text{ en } M_0 \end{array} \right. ,$$

en faisant l'hypothèse supplémentaire (comme on intuite, on peut simplifier les choses...) que la normale à $\mathcal{E}''$ et $\mathcal{E}'''$ est la tangente à $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. Cela permet de mettre toutes les égalités d'angles autour d'une seule paire de droites perpendiculaires, et on voit alors que les angles $\widehat{AM_0C}$ et $\widehat{BM_0D}$ sont nécessairement plats, donc M est forcément à l'intersection des diagonales du quadrilatère.
On se dit alors "Mais oui, c'est évident !" en écrivant

$$\sigma(M) = (MA + MC) + (MB + MD) \geq AC + BD$$

avec égalité ssi $M \in [AC] \cap [BD]$, de sorte que le maximum est bien atteint à l'intersection des diagonales.
Plutôt classe, non ?

3 Focallisation d'un faisceau lumineux sur le foyer d'une parabole

Nous savons tous qu'une parabole est une ellipse dont l'un des foyers F' est rejeté à l'infini.
En notant M un point de l'ellipse et $\mathcal{T}$ la tangente en M à cette ellipse, la droite (MF') va s'envoyer sur une droite (γ) parallèle au grand axe de l'ellipse – qui est aussi l'axe de symétrie de la parabole obtenue.
La proposition démontrée ci-dessus nous donne l'égalité des angles de droites $(\mathcal{T}, MF) = (\mathcal{T}, MF')$. En envoyant F' à l'infini, on intuite donc $(\mathcal{T}, MF) = (\mathcal{T}, \gamma)$.
Nous allons montrer ce résultat.

Soit $\mathcal{P}$ une parabole d'axe de symétrie Δ. Montrer que tout rayon lumineux parallèle à Δ se réfléchit sur $\mathcal{P}$ en passant par le foyer de $\mathcal{P}$.

Solution proposée (inspirée d'une idée d'Igor Kortchemski).
On commence par paramétrer $\mathcal{P}$ par une équation

$$\mathcal{P} : x^2 = 2py.$$

Remarquer alors que le foyer F a pour ordonnée $\frac{p}{2}$ et la directrice de $\mathcal{P}$ est la droite d'équation $y = -\frac{p}{2}$.
On représente ensuite le rayon lumineux par une droite

$$(\gamma) : x = d$$

où $d \in \mathbb{R}$ est un paramètre quelconque (distance à l'axe de symétrie).
Ceci étant fait, reformulons le problème d'une autre manière. Soit M le point de réflection de (γ) sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{P}$ en M. Il s'agit de montrer que (MF) est la continuation "naturelle" de (γ) après réflection

sur $\mathcal{T}$ en M, ce qui revient à dire que les angles de droites $(\mathcal{T},(\gamma))$ et $(\mathcal{T},(FM))$ sont égaux, ou encore que la normale $\mathcal{N}$ à $\mathcal{P}$ en M est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMI}$ où I est un point quelconque de (γ) avant réflection.

On choisit I à l'intersection de (γ) et de la parallèle à $\mathcal{T}$ en F. L'intérêt de ce point est que $\mathcal{N}$ est la hauteur issue de M dans le triangle FIM, qui sera donc bissectrice (ce que l'on veut) si FIM est isocèle. Le problème revient par conséquent à montrer que $FI = FM$, et tout se calcule aisément.

La pente de $\mathcal{T}$ est donnée par la dérivée de $y = \frac{1}{2p}x^2$ en $x = d$, laquelle vaut $\frac{d}{p}$. On en déduit que les coordonées de I vérifient

$$\begin{vmatrix} x_I - x_F & 1 \\ y_I - y_F & \frac{d}{p} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne successivement

$$\begin{vmatrix} d-0 & 1 \\ y_I - \frac{p}{2} & \frac{d}{p} \end{vmatrix} = 0 \implies \frac{d^2}{p} = y_I - \frac{p}{2} \implies MI = y_I - y_M = \left(\frac{d^2}{p} + \frac{p}{2}\right) - \frac{1}{2p}d^2 = \frac{p}{2} + \frac{1}{2p}d^2.$$

D'autre part, la distance MF est donnée par

$$MF^2 = (x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 = d^2 + \left(\frac{p}{2} - \frac{1}{2p}d^2\right)^2 = \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}d^2\right)^2, \ \mathit{CFQD}.$$

4 Un invariant des ellipses

Montrer que le produit des distances des foyers d'une ellipse à une tangente quelconque est constamment égal au carré du demi petit-axe de l'ellipse.

Solution proposée.

On paramétrise l'ellipse par

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

avec $a \geq b$.

On sait que la tangente (T_0) en (x_0, y_0) est régie par l'équation

$$(T_0) : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

que les coordonnées des foyers F et F' sont

$$\left(\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right),$$

et que la distance d'un point $P(u,v)$ à une droite d'équation $(D) : \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est donnée par

$$d(P,(D)) = \frac{\alpha u + \beta v + \gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} d(F,(T_0))\, d(F',(T_0)) &= \frac{\frac{x_0}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \frac{-\frac{x_0}{a^2}\sqrt{a^2-b^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} = \frac{1 - \left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 (a^2 - b^2)}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2} \\ &= b^2 \frac{a^4 - x_0^2 (a^2 - b^2)}{b^2 x_0^2 + a^2 \left(\frac{a}{b} y_0\right)^2} = b^2 \frac{a^4 - a^2 x_0^2 + b^2 x_0^2}{b^2 x_0^2 + a^2 (a^2 - x_0^2)} = b^2. \end{aligned}$$

Remarque. On peut regarder le cas particulier du cercle : on retrouve le carré du rayon.

5 Un lieu géométrique sur les ellipses

Soit T un point d'une ellipse de foyers F et F' et de centre O. Déterminer le lieu des projetés de F sur la tangente en T lorsque le point de tangence T décrit l'ellipse.

Solution proposée.

Notons P le projeté de F sur la tangente en T et S son symétrique par rapport à cette tangente. Les angles $\widehat{FTP}$ et $\widehat{STP}$ sont égaux. Or, la tangente en T étant la bissectrice extérieure de $\widehat{FTF'}$, on a également $\widehat{FTP} = \widehat{F'TP}$ (en angles de droites). Il en résulte $\widehat{F'TP} = \widehat{STP}$, d'où l'alignement des points F', T et S.

En utilisant la droite des milieux (OP) dans le triangle $FF'S$, on en déduit

$$OP = \frac{F'S}{2} = \frac{F'T + TS}{2} = \frac{F'T + TF}{2} = a$$

d'après la définition bifocale d'une ellipse (où a est son demi grand axe). Le lieu cherché est donc inclus dans le cercle de centre O et de rayon a.

Réciproquement, lorsque T décrit l'ellipse, la droite $(F'T)$ prend toutes les directions. Or, cette dernière est parallèle à (OP), ce qui montre que tout le cercle est décrit.

6 Une caractérisation des hyperboles

Soient A et B deux points distincts du plan. Trouver le lieu des points M tels que la bissectrice de $\widehat{AMB}$ reste parallèle ou orthogonale à une direction fixe.

Solution proposée.

Notons Δ et $\Delta^\perp$ les directions imposées à la bissectrice. Quitte à tourner le repère, on peut supposer que Δ est l'horizontale et $\Delta^\perp$ la verticale. La condition souhaitée sur M (qui doit différer de A et B pour qu'elle ait un sens) se traduit alors par l'opposition des pentes des droites (AM) et (BM).

Paramétrons. Quitte à translater le repère, on peut supposer que A et B sont opposés par rapport à l'origine, mettons $A = (a, \alpha) = -B$. En notant $M = (x, y)$, on veut alors

$$\begin{aligned} \frac{y_{\overrightarrow{AM}}}{x_{\overrightarrow{AM}}} + \frac{y_{\overrightarrow{BM}}}{x_{\overrightarrow{BM}}} &= 0 \iff \frac{y-\alpha}{x-a} + \frac{y+\alpha}{x+a} = 0 \iff (y-\alpha)(x+a) + (y+\alpha)(x-a) = 0 \\ &\iff 2xy - 2a\alpha = 0 \iff xy = a\alpha. \end{aligned}$$

Il s'agit une hyperbole si $a\alpha \neq 0$ et de la réunion des droites Δ et $\Delta^\perp$ en O sinon. Noter que les points A et B vérifient l'équation ci-dessus. Par ailleurs, la condition $a\alpha = 0$ signifie que l'une des coordonnées de A est nulle, *i.e.* que (OA) est horizontale ou verticale, ou encore que la droite (AB) est parallèle à Δ ou $\Delta^\perp$.

Finalement, le lieu cherché est donc l'hyperbole (éventuellement dégénérée) passant en A et B d'asymptotes Δ et $\Delta^\perp$ se coupant au milieu de A et B, privée des points A et B.

7 Deux invariants des paraboles (tiré du Bac de 1937)

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F. Une droite passant par F recoupe $\mathcal{P}$ en deux points M et M'.

1. *Montrer que la moyenne harmoniques des distances du foyer à M et M' est constante égale à la distance du foyer F à la directrice.*
2. *Montrer que les tangentes à $\mathcal{P}$ en M et M' sont constamment perpendiculaires.*

Solution proposée.

1. Appelons p la distance du foyer F à la directrice Δ. Notons $\overrightarrow{S}$ l'axe de symétrie de $\mathcal{P}$ orienté vers le domaine convexe de la parabole et posons

$$\theta := \left(\overrightarrow{S}, \overrightarrow{FM}\right).$$

Projetons M sur Δ et appelons P le projeté. Notons également F' le projeté de F sur Δ et F'' le projeté de F sur (MP). Calculons $l := FM$.

On dispose d'un trapèze $FMPF'$ rectangle en F' et P tel que $\widehat{FMP} = \theta$ et $FM = PM = l$. En écrivant son aire de deux façons différentes, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(PM + FF'\right) PF' &= F'F \cdot F'P + \frac{1}{2}\underbrace{F''F}_{=PF'} \cdot F''M \\
(l+p)\, PF' &= PF' \left(2p + l\cos\theta\right) \\
l + p &= 2p + l\cos\theta \\
l\left(1 - \cos\theta\right) &= 2p - p \\
FM &= \frac{p}{1-\cos\theta}.
\end{aligned}$$

Cette dernière formule doit rappeler l'expression générale en polaire $\rho(\theta) = \frac{p}{1-e\cos\theta}$ d'une conique d'excentricité e.

Pour obtenir FM', on utilise la symétrie de la parabole en remplaçant θ par $\pi - \theta$, ce qui pour effet de transformer $\cos\theta$ en $-\cos\theta$. On déduit

$$FM' = \frac{p}{1+\cos\theta}.$$

L'égalité à montrer s'en déduit aisément :

$$\frac{1}{FM} + \frac{1}{FM'} = \frac{2}{p}.$$

2. Appelons $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{T} \text{ la tangente en } M \\ \mathcal{T}' \text{ la tangente en } M' \end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D} \text{ la parallèle à } \overrightarrow{S} \text{ en } M \\ \mathcal{D}' \text{ la parallèle à } \overrightarrow{S} \text{ en } M' \end{array}\right.$, et notons $\left\{\begin{array}{l} \alpha := (\mathcal{D}, \mathcal{T}) \\ \alpha' := (\mathcal{D}', \mathcal{T}') \end{array}\right.$. Une propriété bien connue nous affirme que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se réfléchissent sur la parabole vers son foyer F. Cela s'écrit, en termes d'angles de droites,

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \widehat{M'M\overrightarrow{S}} + \alpha = \pi \\ \alpha' + \widehat{MM'\overrightarrow{S}} + \alpha' = \pi \end{array}\right. .$$

Comme de plus $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$, on a

$$\widehat{M'Mx} + \widehat{MM'x} = \pi,$$

ce qui donne (en sommant les deux premières égalités)

$$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}.$$

Pour avoir l'angle entre les tangentes, on regarde le triangle formé par $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ et (MM'). On obtient

$$(\mathcal{T}, \mathcal{T}') + \alpha + \alpha' = \pi,$$

d'où

$$(\mathcal{T}, \mathcal{T}') = \frac{\pi}{2}$$

comme souhaité.

8 Sur la cocyclicité de quatres points sur une conique

On cherche une condition suffisante et nécessaire pour que quatre points sur une conique soient cocycliques.

8.1 Cas d'une parabole

On se donne la parabole l'équation $y = \frac{1}{k}x^2$ où k est un paramètre > 0 et quatre points distincts $M_i\left(x_i, x_i^2\right)$ dessus.

Les M_i sont cocycliques ssi leur coordonnées vérifient l'équation d'un cercle, *i.e.* ssi

$$\exists\,(a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists R \geq 0, \forall i, (x_i - a)^2 + \left(\frac{1}{k}x_i^2 - b\right)^2 = R^2.$$

Les x_i doivent donc être les racines du polynôme

$$k^2\,(X-a)^2 + \left(X^2 - bk\right)^2 - k^2R^2 = X^4 + k\,(k-2b)\,X^2 - 2ak^2X + k^2\left(a^2+b^2-R^2\right).$$

Comme ce dernier n'a pas de terme en X^3, nécessairement la somme σ_1 des racines doit être nulle.

Réciproquement, si l'on se donne quatre réels x_i distincts tels que $\sigma_1 = 0$, en notant σ_i les fonctions symétriques élémentaires associées, on pourra toujours trouver un $(a,b,r) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\begin{cases} \sigma_2 = k\,(k-2b) \\ \sigma_3 = 2ak^2 \\ \sigma_4 = k^2\left(a^2+b^2-r\right) \end{cases}$, tout le problème étant de montrer que r est positif, afin de poser $r = R^2$ et de remonter les calculs. Or, – et je reprends ici une remarque très judicieuse due à Laurent Deproit –, les relations sur les σ_i nous disent que les x_i sont racines du polynôme

$$X^4 + k\,(k-2b)\,X^2 - 2ak^2X + k^2\left(a^2+b^2-r\right) = k^2\,(X-a)^2 + \left(X^2-bk\right)^2 - k^2r$$

(en remontant les calculs), ce qui montre (pour un i quelconque) que

$$r = (x_i - a)^2 + \left(\frac{x_i^2}{k} - b\right)^2 \geq 0, \ \mathit{CQFD}.$$

Conclusion.
Quatre points sur la parabole d'équation $y = \frac{1}{k}x^2$ sont cocycliques ssi la somme de leur abscisses est nulle.

Noter l'indépendance miraculeuse en le paramètre "élongateur" k. Ce n'est pas si surprenant lorsque l'on sait qu'une parabole "penchée" ou "étirée" reste une parabole.

Remarque. Tout le problème de la réciproque consistait à montrer que

$$\sigma_4 \leq k^2\left(a^2+b^2\right) \text{ avec } \begin{cases} \sigma_2 = k\,(k-2b) \\ \sigma_3 = 2ak^2 \end{cases},$$

ce qui se réécrit sous la forme

$$\sigma_4 \leq k^2\left[\left(\frac{\sigma_3}{2k^2}\right)^2 + \left(\frac{k - \frac{\sigma_2}{k}}{2}\right)^2\right] = \left(\frac{\sigma_3}{2k}\right)^2 + \left(\frac{k^2-\sigma_2}{2}\right)^2.$$

Or on peut montrer directement l'inégalité

$$\sigma_4 \leq \left(\frac{\sigma_3}{2k}\right)^2 + \left(\frac{k^2-\sigma_2}{2}\right)^2.$$

Il suffit de remarquer que

$$0 = \sigma_1^2 = \sum_{i,j} x_ix_j = 2\sum_{i<j} x_ix_j + \overbrace{\sum_i x_i^2}^{=:S} = 2\sigma_2 + S$$

et qu'une inégalité arithmético-géométrique sur les x_i^2 donne

$$S^2 = \left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\right)^2 \geq \left(4\sqrt[4]{x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2}\right)^2 = 16\,|x_1x_2x_3x_4| = 16\,|\sigma_4|.$$

On peut alors conclure :

$$\left(\frac{\sigma_3}{2k}\right)^2 + \left(\frac{k^2-\sigma_2}{2}\right)^2 \geq 0 + \left(\frac{k^2-\sigma_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2+\frac{S}{2}}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{0+\frac{S}{2}}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{16} \geq |\sigma_4|.$$

8.2 Cas d'une ellipse

On utilise la même méthode que ci-dessus.

On aimerait bien trouver un paramétrage polynomial de l'ellipse.

On peut toujours tranformer le paramétrage classique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ dans le plan complexe en

$$\begin{aligned} z(t) &= a\cos t + ib\sin t = a\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + ib\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \\ z(\lambda) &= \frac{a}{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{b}{2}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\lambda}\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

où $\lambda = e^{it}$ décrit le cercle unité. On supposera en outre $a \neq b$, sinon on a affaire à un cercle et quatre points quelconques seront cocycliques de toute manière.

Ainsi, quatre points distincts ayant pour paramètre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sur l'ellipse sont cocycliques ssi

$$\exists \gamma \in \mathbb{C}, \exists R \geq 0, \forall i, |\gamma - z(\lambda_i)| = R.$$

Or, le carré du module s'écrit

$$\begin{aligned} |\gamma - z(\lambda)|^2 &= (\gamma - z(\lambda))\left(\overline{\gamma} - \overline{z(\lambda)}\right) \\ &= \left(\gamma - \lambda\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\lambda}\frac{a-b}{2}\right)\left(\overline{\gamma} - \frac{1}{\lambda}\frac{a+b}{2} - \lambda\frac{a-b}{2}\right) \\ &= \lambda^2\frac{a^2-b^2}{4} + \lambda\left(-\overline{\gamma}\frac{a+b}{2} - \gamma\frac{a-b}{2}\right) + |\gamma|^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda}\left(-\overline{\gamma}\frac{a-b}{2} - \gamma\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{\lambda^2}\frac{a^2-b^2}{4}. \end{aligned}$$

En opérant les simplifications

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\gamma\frac{b-a}{2} - \overline{\gamma}\frac{a+b}{2} = -\frac{a}{2}(\gamma + \overline{\gamma}) + \frac{b}{2}(\gamma - \overline{\gamma}) = -a\operatorname{Re}\gamma + ib\operatorname{Im}\gamma,$$

on voit que la condition de cocylicité implique que les λ_i sont les racines du polynôme

$$\frac{a^2-b^2}{4}X^4 - (a\operatorname{Re}\gamma - ib\operatorname{Im}\gamma)X^3 + \left(|\gamma|^2 + \frac{a^2+b^2}{2} - R^2\right)X^2 - (a\operatorname{Re}\gamma + ib\operatorname{Im}\gamma)X + \frac{a^2-b^2}{4}$$

et il en résulte que le produit des racines $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ vaut 1, ce qui s'écrit également (avec $\lambda_k = e^{it_k}$)

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \equiv 0\,[2\pi].$$

Réciproquement, en se donnant quatre complexes λ_k du cercle unité de produit égal à 1, il s'agit de trouver des (γ, R) tels que

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{4}{a^2-b^2}(a\operatorname{Re}\gamma - ib\operatorname{Im}\gamma) = \overline{\sigma_3} \\ \sigma_2 = \frac{4}{a^2-b^2}\left(|\gamma|^2 + \frac{a^2+b^2}{2} - R^2\right) \end{cases}.$$

Les conditions $\Pi\lambda_i = 1$ et $|\lambda_i| = 1$ impliquent

$$\sigma_3 = \Pi\lambda_i \sum \frac{1}{\lambda_i} = 1\sum \overline{\lambda_i} = \overline{\sigma_1},$$

d'où $\sigma_1 = \overline{\sigma_3}$. De plus, la condition sur σ_1 et γ sera vérifiée ssi

$$\gamma = \frac{a^2-b^2}{4}\left(\frac{\operatorname{Re}\sigma_1}{a} - i\frac{\operatorname{Im}\sigma_1}{b}\right).$$

Pour la dernière condition (sur R), on suit l'idée de Laurent Deproit en posant $r \in \mathbb{C}$ tel que

$$\sigma_2 = \frac{4}{a^2-b^2}\left(|\gamma|^2 + \frac{a^2+b^2}{2} - r\right).$$

Les λ_i sont donc racines du polynôme

$$\frac{a^2-b^2}{4}X^4+\left(|\gamma|^2+\frac{a^2+b^2}{2}-r\right)X^2+\frac{a^2-b^2}{4}-(a\operatorname{Re}\gamma-ib\operatorname{Im}\gamma)X^3-(a\operatorname{Re}\gamma+ib\operatorname{Im}\gamma)X$$
$$=X^2\left(|\gamma-z(X)|^2-r\right)$$

(en remontant les calculs), d'où $r=|\gamma-z(\lambda_i)|^2\in\mathbb{R}^+$ et la conclusion.

Conclusion.

Quatre points sur une ellipse régie par $\begin{cases} x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ *sont cocycliques ssi la somme* $t_1+t_2+t_3+t_4$ *de leurs paramètres est nulle.*

Remarque. Une autre piste (non aboutie) pour la réciproque est la suivante. Ayant fixé

$$\gamma=\frac{a^2-b^2}{4}\left(\frac{\operatorname{Re}\sigma_1}{a}-i\frac{\operatorname{Im}\sigma_1}{b}\right),$$

la condition sur R

$$\sigma_2=\frac{4}{a^2-b^2}\left(|\gamma|^2+\frac{a^2+b^2}{2}-R^2\right)$$

sera possible à remplir ssi $\sigma_2\in\mathbb{R}$ et

$$\frac{a^2-b^2}{4}\sigma_2\leq|\gamma|^2+\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Le caractère réel de σ_2 peut être établi en écrivant

$$\overline{\sigma_2}=\sum_{i<j}\overline{\lambda_i\lambda_j}=\sum_{i<j}\frac{1}{\lambda_i}\frac{1}{\lambda_j}=\sum_{i<j}\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4=\sum_{k<l}\lambda_k\lambda_l=\sigma_2.$$

Ensuite, l'inégalité à montrer s'écrit

$$\frac{a^2-b^2}{4}\sigma_2\leq\left(\frac{a^2-b^2}{4}\right)^2\left[\left(\frac{\operatorname{Re}\sigma_1}{a}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{Im}\sigma_1}{b}\right)^2\right]+\frac{a^2+b^2}{2},$$

ou encore, en supposant $a>b$ et en notant $\begin{cases}\alpha=(\operatorname{Re}\sigma_1)^2\\ \beta=(\operatorname{Im}\sigma_1)^2\end{cases}$:

$$4\sigma_2\leq\left(a^2-b^2\right)\left(\frac{\alpha}{a^2}+\frac{\beta}{b^2}\right)+8\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

En introduisant $t:=\frac{a^2}{b^2}>1$, le terme de droite ci-dessus se réécrit

$$\alpha\frac{t-1}{t}+8\frac{t}{t-1}+\beta(t-1)+\frac{8}{t-1}.$$

Il semble naturel de tuer le paramètre t absoluement quelconque à l'aide de deux inégalités $x+y\geq2\sqrt{xy}$, ce qui donne

$$(*)\geq2\sqrt{8\alpha}+2\sqrt{8\beta}=4\sqrt{2}\left(|\operatorname{Re}\sigma_1|+|\operatorname{Im}\sigma_1|\right)\geq4\sqrt{2}\,|\sigma_1|,$$

mais ce dernier n'est pas $\geq4\sigma_2$ en général : prendre tous les λ_i égaux à 1, auquel cas $\sigma_1=4$ et $\sigma_2=6$, lesquels ne vérifient pas $\sqrt{2}\sigma_1\geq\sigma_2$ car $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$.

La véritable difficulté dans cette démarche "à la main" semble être de trouver une inégalité reliant σ_1 à σ_2 ! Seulement alors pourrait-on essayer de se débarasser du paramètre t dans une direction où apparaît cette inégalité. Si quelqu'un lit ces lignes...

8.3 Cas d'une branche d'hyperbole équilatère

Considérons la branche "positive" de l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = a^2$ où $a > 0$. Quitte à faire une dilatation des axes d'un facteur a ou $\frac{1}{a}$ – ce qui laisse inchangées les conditions de cocyclicité –, on peut prendre $a = 1$. On paramétrise ensuite la branche par $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases}$, ce qui donne en complexes

$$\begin{aligned} z(t) &= \operatorname{ch} t + i \operatorname{sh} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + i\frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ z(\lambda) &= \lambda\left(\frac{1+i}{2}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1-i}{2}\right) = \lambda\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\lambda}\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} = \lambda\beta + \frac{1}{\lambda}\overline{\beta} \end{aligned}$$

où $\lambda = e^t$ décrit $\mathbb{R}_+^*$ et $\beta = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$ (β comme "première **b**issectrice")

Ainsi, quatre points distincts ayant pour paramètre $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sur l'hyperbole sont cocycliques ssi

$$\exists \gamma \in \mathbb{C}, \exists R \geq 0, \forall i, |\gamma - z(\lambda_i)| = R.$$

Or, le carré du module s'écrit

$$\begin{aligned} |\gamma - z(\lambda)|^2 &= (\gamma - z(\lambda))\left(\overline{\gamma} - \overline{z(\lambda)}\right) \\ &= \left(\gamma - \lambda\beta - \frac{1}{\lambda}\overline{\beta}\right)\left(\overline{\gamma} - \lambda\overline{\beta} - \frac{1}{\lambda}\beta\right) \\ &= \lambda^2|\beta|^2 - \lambda\left(\gamma\overline{\beta} + \overline{\gamma}\beta\right) + |\gamma|^2 + \underbrace{\left(\beta^2 + \overline{\beta}^2\right)}_{=0} - \frac{1}{\lambda}\left(\overline{\gamma}\overline{\beta} + \gamma\beta\right) + \frac{1}{\lambda^2}|\beta|^2 \\ &= \frac{\lambda^2}{2} - \lambda 2\operatorname{Re}\left(\gamma\overline{\beta}\right) + |\gamma|^2 - \frac{1}{\lambda}2\operatorname{Re}(\gamma\beta) + \frac{1}{2\lambda^2}. \end{aligned}$$

Or, on peut simplifier

$$\operatorname{Re}\left(\gamma\overline{\beta}\right) = \operatorname{Re}\left(\gamma e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = \operatorname{Re}\left(\gamma e^{i\frac{\pi}{4}}(-i)\right) = \operatorname{Re}(-i\gamma\beta) = \operatorname{Im}(\gamma\beta).$$

La condition de cocylicité implique donc que les λ_i sont les racines du polynôme

$$X^4 - 4\operatorname{Im}(\gamma\beta)X^3 + 2\left(|\gamma|^2 - R^2\right)X^2 - 4\operatorname{Re}(\gamma\beta) + 1$$

et il en résulte que le produit des racines $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$ vaut 1, ce qui s'écrit également (avec $\lambda_k = e^{t_k}$)

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \equiv 0\,[2\pi].$$

Réciproquement, en se donnant quatre réel $\lambda_k > 0$ de produit égal à 1, il s'agit de trouver des (γ, R) tels que

$$\begin{cases} \sigma_1 = 4\operatorname{Im}\gamma\beta \\ \sigma_2 = 2\left(|\gamma|^2 - R^2\right) \\ \sigma_3 = 4\operatorname{Re}\gamma\beta \end{cases}.$$

Les première et troisième conditions seront vérifiées ssi

$$4\gamma\beta = \sigma_3 + i\sigma_1.$$

Pour la seconde, on pose (merci Laurent) r réel tel que $\sigma_2 = 2\left(|\gamma|^2 - r\right)$, d'où les λ_i racines de

$$X^4 - 4\operatorname{Im}(\gamma\beta)X^3 + 2\left(|\gamma|^2 - r\right)X^2 - 4\operatorname{Re}(\gamma\beta) + 1 = 2X^2\left(|\gamma - z(\lambda)|^2 - r\right)$$

et $r \geq 0$ comme voulu.

Conclusion :

Quatre points sur une branche de l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = a^2$ sont cocycliques ssi la somme de leur abscisses est nulle.

Noter encore une fois l'indépendance en le paramètre homothétique a, mais qui ne doit pas surprendre vues les considérations préliminaires pour imposer $a = 1$.

Le vrai paramètre est l'angle θ que font les asymptotes, et on ne vient de traiter que le cas $\theta = \frac{\pi}{2}$...

Remarque. La deuxième condition $\sigma_2 = 2\left(|\gamma|^2 - R^2\right)$ sera possible à remplir ssi

$$\sigma_2 \leq 2\,|\gamma|^2 .$$

En utilisant l'égalité $4\gamma\beta = \sigma_3 + i\sigma_1$, on obtient

$$|\gamma|^2 = \frac{1}{8}\left(\sigma_1^2 + \sigma_3^2\right),$$

de sorte que l'ingalité précédente se met sous la forme

$$\sigma_2 \leq \frac{1}{4}\left(\sigma_1^2 + \sigma_3^2\right).$$

Utilisant la condition $\sigma_4 = 1$, il vient

$$\sigma_3 = \sum_{i<j<k} \lambda_i\lambda_j\lambda_k = \sum_{i<j<k} \frac{\lambda_i\lambda_j\lambda_k}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \sum \frac{1}{\lambda_i},$$

d'où

$$\sigma_3^2 = \sum \left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^2 + 2\sum_{i<j} \frac{1}{\lambda_i\lambda_j} \geq 2\sum_{i<j} \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}{\lambda_i\lambda_j} = 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = 2\sigma_2$$

et de même

$$\sigma_1^2 = \sum \lambda_i^2 + 2\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j \geq 2\sigma_2,\ \textit{CQFD.}$$

Remarque générale. La méthode de Laurent permet en fait de montrer plein d'inégalités sur les σ_k pourvu que l'on trouve les bons polynômes qui conviennent. Évidemment, ce n'est pas très facile...