Courbes paramétrées (version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Une courbe est un tracé dans le plan. Pour l'étudier, on chercher des paramètres sympa, qui donnent un paramétrage sympa $\pi_1, ..., \pi_n \mapsto f(\pi_1, ..., \pi_n)$. En général, on aime bien exprimer ces paramètres en fonction d'un unique, le "temps", d'où une application $t \mapsto f(\pi_1(t), ..., \pi_n(t))$

Exempke : pour le graphe d'une fonction, l'abscissse. Mais on peut aussi faire un chagnenet de variable (graphe logarithique de la physique) : $t \mapsto t^2$, $t \mapsto \ln t$...

(expliquer pourquoi les intégrandes sont multpliées par la vitesse du changement de paramètre)

Dans le plan, courbe = ensemble de points, donc deux systèmes de paramètres naturels : cartésiens $(x, y) \mapsto x + iy$ et polaires $(r, \theta) \mapsto re^{i\theta}$. Si θ ou x devient un paramètre pertinent, on peut le faire varier comme le temps, donc on reparamètre avec ce dernier, d'où $x \mapsto (x, y(x))$ et $\theta \mapsto r(\theta) e^{i\theta}$, noté abusicemnt $y = y(x)$ et $r = r(\theta)$.

Interprétaion physique : la courbe se dessine avec le temps, lequle devient un paramètre universel. On le fait varier de manière uniforme pour voir évoluation sur la courbe –> faire de même avec tout paramètre de base (absicesse curviligne).

1 Défitions

rappel : un *paraémtrage* d'un ensemble A est une application $f : X \twoheadrightarrow A$ d'image A. L'ensemble X peut être appelé l'espace des *paramètres*. Un point de A peut correpondre à des paramètrse différents (ie f peut ne pas être injective)

EG : le plan est paramétré par abscisse ordonné, par module argument ; l'espace est parmatré en cartésienne, polaire, sphrique.

Lorsque f est définie sur un intervalle de R, on dit que $f : I \twoheadrightarrow A$ est un *arc paramétré* ou une *courbe paramétrée*. Pour A partie d'un evn, on parle de *C^k-paramétrage* lorsque f est de classe C^k. La partie $A = \operatorname{Im} f$ est aussi appelée *support* ou *trajectoire* de la courbe paramétrée f.

Deux C^k-parmétrages de A, mettons $f : I \twoheadrightarrow A$ et $g : J \twoheadrightarrow A$, sont dits équivalents si $\exists \varphi : I \stackrel{\frown}{\longrightarrow} J$ C^k-difféo tq $f = g \circ \varphi$. Un tel φ est appelé *reparamétrage admissible.* (rq : pour reparamétrer, il suffit donc de composer par un difféo). Une classe d'équivalence est appelé *arc géométrique.*

Pour $k \geq 1$, un C^k-difféo est stricctement monotone. Lorsque φ (dé)croît, on parle de reparamétrage *(dé)croissant*[1]. Une classe d'équivalence pour "admettre un reparamétrage admissible croisante" est appelé *arc géométrique orienté.*

Un arc représente donc toutes les façon façons possible de paramétrer notre partie A. Orienter l'arc revient à choisir un sens de parcours de la partie A.

Certains arcs ne sont pas orientables car ces deux classes coincident (eg $f(t) = (t^2, t^2)$, $\varphi = -\operatorname{Id}$, $f \circ \varphi = f$). On vérifiera que ce cas pathologique n'a pas lieu pour des arcs réguliers ou s'il y a au moins deux points simples (cf. étude locale ? ? ? ? ?)

Il est clair qu'on dipose de plein de paramétrages possible. A nous de choisir le bon selon les circonstances.

eg : montrer que les points rationnels de S_1 sont denses dans S_1. Le paramtrage $t \longmapsto (\cos t, \sin t)$ est tout pourri car cos et sin ne préservent pas Q. On penser alors au paramétrage rationnel $t \longmapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ qui gagne.

Il est également clair que les notions qui sont intrinséqument liées à la partie A **ne doivent pas dépendre du paramétrage** -> longueur, vecteurs tangent & normal (si point simple), courbure, aire.

–> Do Carmo ! Monasse !

2 Etude globale

étude de fonctions généralisée :-)

Domaine de définitions, symétries diverses (attention aux paramtrages, c'est l'arc qui nous intéresse, pas le graphe du paramétrages ! eg de $r(\theta)$ invariant par $\theta \mapsto y + \pi$)

On peut étudier les paramatres cartésiens/polaire –> techniques à une variable.

eg de $r = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$.

[1] Pour décroissant, on dit aussi *rétrograde.*

3 Etude locale

3.1 régularité d'un point

La *multiplicité* d'un point sur un arc géométrique est le cardinal de sa préimage. Un point de multiplicité 1 est dit *simple.* (INV)

Un point a est dit *stationnaire* ou *critique* ou *singulier* si $f'(a) = 0$, *totalement singulier* si $f^{(n)}(a) = 0\ \forall n$. (INV)

Un point non singulier est *régulier*, *birrégulier* si $f'(a)$ et $f''(a)$ sont libres, et plus généralement *k-régulier* si $\left(f', f'', ..., f^{(k)}\right)(a)$ sont libres. *totalement régulier* si $\left(f^{(n)}\right)(a)$ libre

3.2 branche infinies

branche infinie si $\lim_a \|f\| = \infty$. (INV).

Si $\frac{f}{\|f\|}$ cv, sa limite (modulo signe) est appelée *direction asymptotique* de la branche infinie

Une partie A est dite asymptotique à f autour d'une branche infinie si $d(f, A) \longrightarrow 0$ (EG : droite affine)

PROP : si D droite aysmptique, alors la direction asypotique est $\overrightarrow{D}$

Dans le plan, admet $\Delta : ax+by+c = 0$ pour direction asympotique ssi $d(f; \Delta) \longrightarrow 0$, ie ssi $ax+by+c \longrightarrow 0$. (INV). Pour la direction, prendre $\lambda := \lim \frac{y}{x}$, puis pour l'ordonnée prendre $\lim y - \lambda x$

3.3 tangente

tangente si $\lim_0 \frac{\overrightarrow{f(a)f(a+\cdot)}}{\|\overrightarrow{f(a)f(a+\cdot)}\|}$ existe (à droite, à gauche), *point anguleux* si limite à droite/gauche existent et sont différentes. (INV)

Existence d'une tangente dirigée par $f^{(p)}(a)$ si $p := \min\left\{k, f^{(k)} \neq 0\right\}$ existe (donc pour les point non totalement singulier) : point de *rebroussement* si p pair, alors deux demi-tangentes sont opposés. CEG : soit $p(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ prolongé par 0 sur R^- (comme platean). Alors $f(t) = (p(t), p(-t))$ est C^∞, le point 0 est totalement singulier, mais son image est un angle droit en 0

3.4 Enteirs caractéristiques

on suppose que il y a des enteirs (p, q) tels que $\left(f^{(p)}, f^{(q)}\right)$ libre (eg :birégulier) ; on prend un tel (p, q) minimal pour l'ordre lexigraphique : ce sont les *entiers caractéristiques.* (INV)

Alors TY donne quatre position : point *ordinaire* ou *banal*, *infelexion*, *rebroussembne* de première/seconde espèce. (INV car la non-nullité des dérivées est INV)

eg important : Birrégulier => ordinaire.

Expliquer le rapport avec $y = y(x)$: $f' = (1, \cdot)$ et $f'' = (0, \cdot)$ sont toujours libres dès que $f'' \neq 0$.

eg : cycloides ? hypocycloides ?

3.5 Contact

Comment dire que deux courbes sont proches au voisinage d'un point commun ?

EG ; le graphe de $x \mapsto x^n$ colle d'autant plus la fonction nlle que n est grand. Ce sera notre échelle de référence.

On dit que f et g ont un *contact d'ordre* (au moins) n au point $f(a) = g(a)$ si $f(t) - g(t) = o(\|t-a\|^n)$.

La seule droite ayat un contact d'ordre 1 est la *tangente*

Le seul cercle ayat un contact d'ordre 2 est le cercle *osculateur*

Parabole ayant contact d'ordre 2 ? Idem, car le cercle de centre le foyer et tangenat à la directrice a un contact d'ordre 2.

4 Longueur et abscisse curvilinge

arc rectifiable (quelle vieille terminoligie !) = de longueur finie (porquio prendre le *sup* des lignes brisée ? car la courbe est plus longue que la ligne brisée !). Th : Les arc C^1 définis sur des segments sont rectifiables.

Eg : Le graphe de $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ est de longueur infinie.

Eg : il n'y pas de surjection $C^1 : [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$.

Soit f un paramétrage. Une *abscisse curviligne* est une application s telle que $\forall a, b \in I,\ L_{a,b} = s(b) - s(a)$. Si f est C^1, les abscissies curvilignes sont les primitives de $\|f'\|$, donc C^1.

Si de plus les points singuliers sont finis (même dénombrables, et plus génralement de mesure nulle ? ? ?), alors toute telle s est strictement croissant, donc un difféo. Le reparamétrage admissible $f \circ s^{-1} : s(I) \twoheadrightarrow A$ est alors *normal* (à vitesse constante). PENSER A L'UTILSER ! ! ! On peut localement autour de tout point régulier (si C^1)

5 Repère de Frenet, courbure, torsion

Dans ce qui suit, on ne considère que des points **réguliers**.

5.1 vecteur tangetn et courbure

On pose $\overrightarrow{T} := \frac{\overrightarrow{v}}{v}$ *vecteur tangent*. Invariant par repar croissant, opposé par repar décroissant.

On appelle *vecteur normal* tout vectuer unitaire N normal à T.

Pour qu'une particule s'échappe de la tangente, elle doit **tourner**, ie v doit s'écarter de T. La vitesse d'échapememnt (dans la direction de N), çàd la vitesse avec lauqelle la direction s'écarte de la tangente, est donnée par $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} \cdot N$; il dépend de la vitesse de la particule La vitesse d'échappement relative à celle de la particule est la quantité $\kappa_N := \frac{1}{v} \frac{d\overrightarrow{T}}{dt} \cdot N$ appelé *courbure* (signée dans la direction de N). PLus la courbure est grande, plus la courbe est... courbue ! (INV ? ? ? ? ?)

Pour les points birégulier, Il y a un N qui se distingue. En effet, T étant de norme constante, la dérivée $\frac{dT}{ds}$ lui est orthogonale. Pour renormalisr, il suffit que $\frac{dT}{ds}$ soit non nul. Si c'est le cas, on obtient $f'' = (vT)' = v'T + vT' = \frac{v'}{v} f'$ contreidsant la birégulairité. On en reparlera plus loin.

On définit alors la *courbure* κ par la courbure dans cette direction . Elle vaut donc $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} \cdot \frac{N}{v} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \cdot N = \left\| \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \right\|$, ce que l'on peut prendre comme défintion même dans le cas régulier non birégulier

$$\kappa := \left\| \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \right\| = \frac{\|T'\|}{v}.$$

INV !

Rq : l'égalité $f'' = \frac{v'}{v} f' + v^2 \frac{dT}{ds}$ nous a montré que la courbure est non nulle en un point birégulier. Réciproquement, si f'' est liée à T, son produit scalire par $\frac{dT}{ds}$ est nul, d'où $0 = 0 + v^2 \kappa^2$ et $\kappa = 0$. On a donc montré (pour un point rég)

$$\text{bireg} \iff \kappa \neq 0$$

5.1.1 dim2 : expression de la courbure signée

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe D^2.

On peut relever, sur l'ouvert des points réguliers, l'application $\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{v}}{v}$ (de classe D^1) en $t \mapsto e^{i\alpha(t)}$ où α est D^1. On pose alors la *courbure signée*

$$\overline{\kappa} := \frac{d\alpha}{ds}$$

$= \frac{d\alpha}{dt}\frac{dt}{ds}$, ou plus formellement $\overline{\kappa} := \frac{\dot{\alpha}}{v}$. Le signe de la courbure est donc le même que celui de rotation de $\overrightarrow{T}$.

Si l'on tourne un volant, $\overline{\kappa}$ mesure l'angle que font les roues avec la tangete, ie le braquage.

κ ets invairante par reparamétrage croissant, opposée par repar rétrograde, donc intrinséques aux courbes orientées.

RQ ; on a $\frac{dT}{ds} = \frac{d}{ds}\left(e^{i\alpha}\right) = \frac{d\alpha}{ds} i e^{i\alpha}$, d'où $|\overline{\kappa}| = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \kappa$; on pourra donc appeler κ courbure *absolue*.

Avec les mains, $\tan\alpha = \frac{y'}{x'} \implies \left(1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)\alpha' = \frac{x'y'' - x''y'}{x'^2} \implies \alpha' = \frac{\det\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}\right)}{v^2}$.

Preuve :

$$\det\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}\right) = \operatorname{Im}\left(\overline{z_{\overrightarrow{v}}} z_{\overrightarrow{a}}\right) = \operatorname{Im}\left(ve^{-i\alpha}e^{i\alpha}\left(\dot{v} + i\dot{\alpha}v\right)\right) = v\dot{\alpha}v = \overline{\kappa}v^3.$$

On retiendra

$$\overline{\kappa} = \frac{[v, a]}{v^3}$$

(on retrouve $\kappa \neq 0$ ssi bireg)

Le calcul est aisé pour une courbe $y = y(x)$ (prendre le det dans la bc, d'où $\overline{\kappa} = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}$) ou pour $r = r(\theta)$ (prendre le det dans la bon $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$).

Rq : en polaire, en introduisant $u := \frac{1}{r}$, on obtient

$$\overline{\kappa} = u^3 \frac{u + u''}{\sqrt{u^2 + u'^2}^3}.$$

Demo. On a $r' = -\frac{u'}{u^2}$ et $r'' = -\frac{u''u^2 - u'2uu'}{u^4} = \frac{2u'^2 - u''u}{u^3}$, d'où

$$\det\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{a}\right) = \begin{vmatrix} r' & r'' - r \\ r & 2r' \end{vmatrix} = 2\frac{u'^2}{u^4} - \frac{2u'^2 - u''u}{u^4} + \frac{1}{u^2} = \frac{u'' + u}{u^3}.$$

De plus, la vitesse donne

$$v = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{u'^2}{u^4}} = \frac{\sqrt{u^2 + u'^2}}{u^2}.$$

Il en résulte

$$\overline{\kappa} = \frac{\frac{u'' + u}{u^3}}{\left(\frac{\sqrt{u^2 + u'^2}}{u^2}\right)^3} = u^3 \frac{u + u''}{\sqrt{u^2 + u'^2}^3}.$$

Application : courbure d'une conique ? $pu = 1 + e\cos\theta$, d'où

$$\begin{aligned} p\overline{\kappa} &= (pu)^3 \frac{(1 + e\cos\theta) + (-e\cos\theta)}{\sqrt{(1 + e\cos\theta)^2 + (-e\sin\theta)^2}^3} = \left(\frac{1 + e\cos\theta}{\sqrt{(1 + e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta}}\right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{e\sin\theta}{1 + e\cos\theta}\right)^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left[1 + \left(\frac{\sin\theta}{e^{-1} + \cos\theta}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Au sommet, $(\theta = 0)$, on trouve $\frac{1}{\kappa} = p$: le paramètre p est donc le rayon de courbure au sommet.

Pour une parabole, on en déduit centre courbure = foyer.

Rq : en dim >2, la courbure signée n'a plus de sens : c'est comme définir l'angle entre deux vecteurs dans un euclidien : en dim 2, on peut signer, mais pas audelà.

5.1.2 Dim2 : la courbure (signée) détermine l'arc

Remarque : si l'on connait la vitesse de braquage (et le braquage initial), on connait tout le braquage ; donc si l'on connait la position intiale, on connait la trajction (on sait comment tourne le volant). Formalisation ?

Analyse : si l'on cherche un paramétrage normal de la courbe, connaître $\overline{\kappa}$ c'est connaitre α (à une constante près). Or, on sait que $x' = \cos\alpha$ et $y' = \sin\alpha$, d'où la position en intégrant α.

Synthsèse : On se donne (x_0, y_0) et α_0 initial. Posons $\alpha = \int_0^{\cdot} \overline{\kappa}$ (C^1) puis $x = x_0 + \int_0^{\cdot} \cos\alpha$ et $y = y_0 + \int_0^{\cdot} \sin\alpha$ (qui sont C^2). On vérifie que $x'y'' - x''y' = \cos\alpha\,(\alpha'\cos\alpha) - (-\alpha'\sin\alpha)\sin\alpha = \alpha' = \overline{\kappa}$, CQFD.

Eg : arcs à courbure constante ?

On les prend à vitesse constante. Alors $T' = \left(e^{i\alpha}\right)' = i\alpha' e^{i\alpha} = i\overline{\kappa} e^{ia}$, d'où $T'' = i\overline{\kappa} i\alpha' e^{i\sigma}$, ie $T'' + \kappa^2 = 0$. On trouve T cercle ou constant, d'où droite ou cercle.

Rq : vous avez déjà conduit une voiture dans l'espce ? pas facile d'aller où on veut avec un seul volant... il faudra connaitre autre chose que la courbure (la torsion).

5.1.3 Dim3

on rappelle que pour duex vecteur α et β du plan on a $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$, ce qui permet de remplacer le produit mixte $\det(v, a)$ par la norme d'un produit vectoriel $v \times a$ (au signe près). On regarde donc

$$\|v \times a\| = \left\| vT \times \left(\cdot T + v^2 \frac{dT}{ds} \right) \right\| = \left\| 0 + v^3 T \times T' \right\| = v^3 \|T\| \|T'\| = \kappa v^3.$$

On en déduit la formule

$$\kappa = \frac{\|v \times a\|}{v^3}$$

RQ : (on retrouve $\kappa \neq 0$ ssi bireg)

On verra un moyen de calculer la courbure regroupant les formules de la dim 2 et 3

5.2 vecteur nomral et rayon de courbure

On ne considère que des points birégulier, ie de courbure non nulle.

Le changement de direction de $\overrightarrow{T}$ est mesuré par $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$; un dessin montre que ce dernier est toujours tourné vers le centre de la courbure.

On normalis, d'où le *veteur normal*

$$\overrightarrow{N} := \frac{\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}}{\left\| \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \right\|} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}.$$

Rq : Puisque $\left\| \overrightarrow{T} \right\|$ constant, on a bien $N \perp T$, d'où le term vecter normal.

INV !

5.2.1 Rayon de courbure, plan oscullateur

Rq : on a (par définitinon de N)

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \kappa\overrightarrow{N}$$

On a alors $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{T}$ d'où $\overrightarrow{a} = v'\overrightarrow{T} + v\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}$ avec $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \kappa\overrightarrow{N}v$, d'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} &= v'\overrightarrow{T} + \kappa v^2\overrightarrow{N} \\ &= v'\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}\end{aligned}$$

où $R := \frac{1}{\kappa}$ est le *rayon de courbure* (formules de *Frenet*)

Ainsi, tout se passe comme lors d'un mouvement circulaire autour du *centre de courbure* $C(t) := f(t) + R(t)\overrightarrow{N(t)}$ le *demi-plan de concavité* $C + RT + R^+N$ (INV).

SAns orientation, on introduit le *plan osculateur*[2] $C + \mathrm{Vect}(T, N) = f + \mathrm{Vect}\{T, N\}$ (INV)

eg : le rayon de courbure d'un cercle est son rayon :-)

eg : le rayon de courbure au sommet d'une parabole $x^2 = 2py$ est p, le centre de courbure au sommet est le foyer. (pas le même p que l'équation poalire, attentino !)

5.2.2 Dim 2, dérivée de N

Pour $\frac{dN}{ds}$, on peut le décomposer dans la bon T, N. Puisuqe $T \cdot N = 0$, la composante en T vaut $-\frac{dT}{ds}N = -\kappa NN = -\kappa$. Puique N est constant, il est orthogonal à sa dérivée, donc pas de composante selon N. Il en résulte $\frac{dN}{ds} = -\kappa T$.

On peut donc écrire

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa \\ -\kappa & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \end{pmatrix}.$$

RQ : on peut toujours prendre pour vecteur normal $N^* := \wedge T$. Alors, se rappelant $T = e^{i\alpha}$, on trouve $\kappa N = \frac{dT}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}ie^{i\alpha} = \overline{\kappa}N^*$. Chacun des deux membre extremes contient un facteur oulbiant l'orienation de la courbe et l'autre la prenenant en compte. A vous de choisir :-)

L'intéret de N^* est d'avoir toujours un vecteur normal, mais celui ci ne tient pa scompte du sens de la corbure (un peu comme l'agrument de 0) C'est ce repère (T, N^*)qui s'appelle Frenet-Serret. Celui introduit ici devrait d'appeler repère de (T, N) Darboux-Ribaucourtt

RQ. En dim3, $\frac{dN}{ds}$ aura une autre composante que $-\kappa T$. D'où la nécessité d'introduire un troisième vecteur pour mesurer cette nouvelle composante (le binormal).

5.3 Vecteur binormal et torsion

On prend une courbe **birégulière**, ce qui permet de parler de T et N.

On appelle *binormal* tout vecteur unitaire $B \perp T, N$ (ie tout vecteur normé normal au plan osculateur)

Pour qu'une particule s'échappe du plan oscullateur, elle doit rouler autour de la tangente au point où elle se trouve, relevant ainsi le vecteur normal hors du plan oscullateur. La vitesse de roulement (dans la direction de B), çàd la vitesse avec lauqelle le plan oscullauter tourne autour de la tangente, est donné par $\overrightarrow{B} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{dt}$; il dépend de la vitesse de la particule La vitesse de roulement relative à celle de la particule est la quantité $\tau_B = \overrightarrow{B} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}$ appelé *torsion* (dans la diection de B)

INV ? ? ? ? ?

Nous allons exhbier en tout point **trirégulier** un B qui convient naturellement.

[2] Étymol. et Hist. 1752 géom. (DE COURTIVRON, Traité d'optique, p.88 ds DG). Formé sur le rad. lat. de osculation* (rad. du part. passé de osculare et osculari «baiser») ; suff. -eur2*.

On a toujous les formules
$$\frac{dT}{ds} = \kappa N \text{ et } \overrightarrow{a} = v'\overrightarrow{T} + \kappa v^2 \overrightarrow{N},$$
mais $\frac{dN}{ds}$ s'exprime différemment : on sait toujours que sa composante en N est nulle (dériver $N \cdot N = 1$) et que celle en T vaut $-\kappa$ (dérvier $N \cdot T = 0$). Le vecuter $\frac{dN}{ds} + \kappa T$ ets donc orthogonal à T et N. En notant sa norme
$$\tau := \left\| \frac{dN}{ds} + \kappa T \right\|,$$
le renormliaser (lorque cettedernère est non nulle) permet de définir le *binormal*
$$B := \frac{1}{\tau}\left(\frac{dN}{ds} + \kappa T\right)$$

Il reste à montrer que trireg ssi $\tau \neq 0$

On regarde

$$\begin{aligned} f''' &= a' = \left(v'T + \kappa v^2 N\right)' \\ &= *T + *N + \kappa v^2 \left(v \frac{dN}{ds}\right) \\ &= *T + *N + \kappa v^3 \left(\frac{dN}{ds} + \kappa T\right). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\tau = 0$, f''' est liée à T et N, donc à f' et f''. Réciproquement, si f''' liée à f' et f'', donc à T et N, son ps contre $\frac{dN}{ds} + \kappa T$ ets nul, d'où $0 = 0 + 0 + \kappa v^3 \tau^2$, ie $\tau = 0$

5.3.1 Dim 3, torision signée

En dim 2, le choix du vetuer normal donné par l'orientation permettait de définnir une courbe **signée**.

En dim 3, l'oretion permet de choisir un binormal particulier : $B := \overrightarrow{T} \times \overrightarrow{N}$.

Cela permet de définrin un *torsion signée* :
$$\overline{\tau} := \overrightarrow{B} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}$$

La torsion signée est invariante par reparamétage **croissant** (et opposée par reparamétrage décroissant), donc donné intrisèque aux courbes **orientées**).

lorsque $\tau > 0$, on parle de *DEXTRORSUM*

lorsque $\tau < 0$, on parle de *senestrorsum*

lorsque $\tau = 0$ (et $\kappa \neq 0$) on parle de *vertex*.

5.3.2 dim 3 équation de Serret-Frenet

on part de
$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B.$$
Rearquer qu'alors
$$\begin{aligned} \frac{dB}{ds} &= \frac{dT}{ds} \times N + T \times \frac{dN}{ds} = 0 + T \times (-\kappa T + \tau B) \\ &= -\tau N. \end{aligned}$$

Les trois équations ci-dessus forment les *équations de Serret-Frenet* :
$$\left\{ \begin{aligned} \tfrac{dT}{ds} &= \kappa N \\ \tfrac{dN}{ds} &= -\kappa T + \tau B \\ \tfrac{dB}{ds} &= -\tau N \end{aligned} \right. \text{, qui s'écrit aussi } \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

5.3.3 dim 3 Expression pour une courbe C^3

On reprend l'expression
$$f''' = *T + *N + \kappa\tau v^3 B.$$
d'où $\tau = \frac{f'''\cdot B}{\kappa v^3}$. On rq
$$v \times a = vT \times \kappa v^2 N = \kappa v^3 B.$$
On peut donc écrire
$$\tau = \frac{B \cdot f'''}{\kappa v^3} = \frac{\kappa v^3 B \cdot f'''}{\kappa v^3 B \cdot \kappa v^3 B} = \frac{[v, a, f''']}{\|v \times a\|^2}.$$

Cette expressio, comme celle de la courbure en dim 2 et 3, admet une forme générale.

5.3.4 Dim 3 : Détermination d'une courbe par ses courbure et torsion

Une courbe est entièrement déterminée par sa torsion et sa courbure, si l'on donne un repère initial $(f(0), T(0), N(0))$. Il s'agit de piloter un vaisseau avec jsute deux volants : tout se passe dans le plan oscullateur qui bouge par la torsion.

On part du système de Serret-Frenet
$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \kappa & \\ -\kappa & & \tau \\ & -\tau & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

La matrice ci-dessus a pour poly car $\begin{vmatrix} X & -\kappa & \\ \kappa & X & -\tau \\ & \tau & X \end{vmatrix} = X^3 + X\left(\kappa^2 + \tau^2\right) = X(X - i\lambda)(X + i\lambda)$ avec $\lambda^2 = \kappa^2 + \tau^2$, donc est diagonalisable (trois vp $\neq$ si $\lambda \neq 0$, matrice nulle si $\lambda = 0$), donc on est ramené à un système diagonal qui s'intègre, pourvu qu'on se donne T_0 et N_0 (dont on déduit B_0). On en déduit T, d'où f (supposé normal) si l'on précise la position initiale.

EG : Courbes à courbure et torsion constante ? droites & hélices !

5.4 Pliures d'ordre supérieurs et repèe mobile

On a défini N comme le vecteur manquant pour compléter $\frac{dT}{ds}$ dans la base$T$, puis B comme le vecteur manquant pour compléter $\frac{dN}{ds}$ dans la bse (T, N). On va continuer.

On considère un point k-régulier avec $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ maximal.

On définit alors un *repère mobile* formés de vecteurs[3] $A_1, ..., A_k$ et des *pliures* $p_1, ..., p_k$ par la récurrence $(A_0, A_1, p_1) = (0, T, 1)$ et $\begin{array}{r} a_i := \frac{dA_i}{ds} + p_i A_{i-1} \\ p_{i+1} := \|a_i\| \\ A_{i+1} := \frac{a_i}{\|a_i\|} \end{array}$ pour $1 \leq i < k$(les a_i ne sont qu'intermédaires de notations). Le réel p_i est appelé *pliure d'ordre i*.

La validité de cette défitnion est rejetée en toute fin. Place aux observations.

[3] Le repère étan mobile, les A_i bougent avec le point de la trajectoire, ils lui sont attachés, d'où la lettre choisie

5.4.1 Pliures d'ordre 2 et 3

Que valent les deux première vecteurs du repère mobile ainsi que les pliures correspondantes ?

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & \frac{dA_1}{ds} + p_1 A_0 = \frac{dT}{ds} + 0 = \kappa N \\ a_2 & = & \frac{dA_2}{ds} + p_2 A_1 = \frac{dN}{ds} + \kappa T = \tau B \end{array}$$

, d'où $\begin{array}{cc} A_2 & A_3 \\ p_2 & p_3 \end{array} = \begin{array}{cc} N & B \\ \kappa & \tau \end{array}$ On se retrouve en terrain connu.

5.4.2 Les pliures d'ordres $1, ..., k$ déterminent la trajectoire dans R^k

Les dérivées en s se retrouvent par la défintion

$$\frac{dA_i}{ds} = -p_i A_{i-1} + p_{i+1} A_{i+1}.$$

Ces équeion se mettenet sous form d'un joli système (rappelan Serret Frenet)

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & p_1 & & & \\ -p_1 & & p_2 & & \\ & -p_2 & & p_3 & \\ & & -p_3 & & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

AInsi, se donner à un instant initial les pliures d'ordre $1, ..., k$ ainsi qu'un repère mobile permet de déterminer la trajectoire dans R^k.

Quetsion : quid si toutes les pliures sont constantes ?

5.4.3 le repère mobile est orthonromé

Tout comme T, (T, N) et (T, N, B), Le repère mobile est orthonormé.
A_i est unitaire, donc orthogona à $\frac{dA_i}{ds} = p_{i+1} A_{i+1} - p_i A_{i-1}$.
Montrons l'orthogonalit par récurrence sur i : $j < i \implies A_j A_i = 0$ (rien à faire pour $i = 1$)
Supposons $A_1, ..., A_i$ orthoognaux. On dérive $0 = A_i A_j$ pour $j < i$: il vient

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & A_i \left(p_{j+1} A_{j+1} - p_j A_{j-1} \right) + \left(p_{i+1} A_{i+1} - p_i A_{i-1} \right) A_j \\ & = & p_{j+1} A_i A_{j+1} + 0 + p_{i+1} A_{i+1} A_j - p_i A_{i-1} A_j \end{array}$$

DEux cas : ou bien $j + 1 < i$, auauel cas il reste $0 = p_{i+1} A_{i+1} A_j$, CQFD ; ou bien $j + 1 = i$, auqleu cas les deux derniers terms se conmpensent et même conclusion.

5.4.4 La matric de passage des $f^{(i)}$ aux A_i est traingulaire

Par ailleurs, vue les formules connues

$$\begin{array}{rcl} f' & & vT \\ f'' & = & *T + \kappa v^2 N \\ f''' & & *T + *N + \kappa \tau v^3 B \end{array},$$

on a envie de montrer pour $1 \leq i \leq k$ une identité du type

$$f^{(i)} = \left(\sum_{j<i} *A_j \right) + p_1 \cdots p_i v^i A_i.$$

C'est aisé par récurrece. Clair pour $i=1$. Ensuite, supposons $f^{(i)}$ de la forme voulue, il vient

$$\begin{aligned} f^{(i+1)} &= v\frac{df^{(i)}}{ds} = v\left(\left(\sum_{j\leq i} *A_j\right) + p_1\cdots p_i v^i \cdot p_{i+1}A_{i+1}\right) \\ &= \left(\sum_{j\leq i} *A_j\right) + p_1\cdots p_{i+1}v^{i+1}A_{i+1}, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

5.4.5 Expression des pliures par quotient de volumes

Ainsi, on peut calculer le volume Δ_k délimité par $f', f'', ..., f^{(k)}$ en prenant comme BON notre repère mobile. :

$$\begin{aligned} \left|\left[f', f'', ..., f^{(k)}\right]\right| &= v\left(\kappa v^2\right)\left(\kappa\tau v^3\right)\cdots\left(p_1\cdots p_k v^k\right) \\ &= v^{1+2+\cdots+k} p_1^k p_2^{k-1} p_3^{k-2}\cdots p_{k-1}^2 p_k. \end{aligned}$$

Pour isoler p_k, on prend la dérviée logarithmique à deux reprises : d'abord $\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}} = v^k p_1 p_2\cdots p_k$, puis $\frac{\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}}{\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_{k-2}^2}} = vp_k$, d'où

$$p_k = \frac{1}{v}\frac{\Delta_k\Delta_{k-2}}{\Delta_{k-1}^2}$$

EG : $\kappa = p_2 = \frac{\Delta_2\Delta_0}{v\Delta_1^2} = \frac{[f', f'']1}{v[f']^2} = \frac{[f', f'']}{v^3}$
EG : $\tau = p_3 = \frac{\Delta_3\Delta_1}{v\Delta_2^2} = \frac{[f', f'', f''']v}{v[f', f'']^2}$.
Pour remplacer $[f', f'']$ par $\|f' \times f''\|$ en dim 3, il suffit de remarquer que la norme du produit vetoriel est le volume cherché (reprendre le système triangulaire). CEci est valide pas seulement en dim 3.

Ces observation étant faites, venons-en à la défition. Si elle posaait pb, c'est qu'il ya un a_i,nul. Soit un tel i minimal. Alors les expressions $f^{(j)}$ ci-dessus en fonctio des A_j sont légitimes pour $j\leq i$, et montre que les i vecteur $f', f'', ..., f^{(i)}$ sont engendrée par les $i-1$ vecteurs $A_1, ..., A_{i-1}$, ce qui contredit l'hypohtèse de k-régularité

BEAUCOUP PLUS SIMPLE : Gram Schmit sur les $f^{(n)}$... :-(:-(:-(

6 Enveloppes de droites

On cherche les courbes tangentes à une famille de droites donné.
Soit $D_t : A_t + \mathbb{R}v_t$ une famille de droites. On cherche une courbe f telle que $\forall t,\ D_t = f(t) + \mathbb{R}T(t)$.
Dans le plan : on se donne $D_t : a_t x + b_t y = c_t$ avec a, b, c de classe C^2. On veut un $f=(x,y)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{c} ax+by=c \\ ax'+by'=0 \end{array}\right. .$$

Dérivant la première ligne, il vient $a'x + b'y = c'$ en utilisant la seconde ligne. Dérivons à nouveau

$$a''x + a'x' + b''y + b'y' = c''.$$

Muliplions par b, substituons, puis ordonnons :

$$\begin{aligned} a''bx + a'bx' + b''(c-ax) + b'(-ax') &= bc'' \\ \begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \end{vmatrix} x' + \begin{vmatrix} a'' & a \\ b'' & b \end{vmatrix} x &= \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, si le vecteur normal (a, b) n'est jamais colinéaire à sa dérivée, on peut résoudre.

Exemple : échelle contre mur, paramétrée par θ : $x \sin + y \cos = \sin \cos$. On a alors

$$\begin{vmatrix} a' & a \\ b' & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{vmatrix} = 1\,;$$
$$\begin{vmatrix} a'' & a \\ b'' & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin & \sin \\ -\cos & \cos \end{vmatrix} = 0\,;$$
$$\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos & -\cos \\ \frac{1}{2}\sin(2\cdot) & -2\sin(2\cdot) \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\sin(2\cdot)\cos\,.$$

D'où l'équation

$$x' = -3 \sin \cos^2$$

qui donne $x = \cos^3$. On trouverait de même $y = \sin^3$, d'où l'astroïde.

enveloppe des droites de Steiner est un hypocycloïde à trois points de rebroussement

7 Développée / développante

exemples, cf Monasse, enveloppe normales...