Différentiabilité

Marc SAGE

<2015

Table des matières

–> *Petit guide de calcul différentiel* de F. Rouvière

D'où vient le nabla ∇ ?

Ce symbole introduit par William Hamilton en 1853 est tout simplement un delta majuscule renversé, d'où son nom parfois donné d'« atled ». Il ressemble à une lyre, c'est pourquoi Heaviside l'a appelé nabla, mot grec d'origine phénicienne désignant justement une sorte de lyre en forme de delta renversé. En hébreu, harpe se dit nebel...

idée : généralisée la dérivée et la tangente.

idée naive : fixer une direction et dérivée à une coordonée : $f_u^{'}(a) = \frac{d[f(a+tu)]}{dt}(t=0)$.

Cependant, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \frac{a^3}{b^2}$ (0 si $b=0$) dérivable selon tout vecteur en l'origine $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = t\frac{a^3}{b^2}$ mais n'est pas continue en 0 –> c'est quand meme décevant pour généraliser dérivabilité...

On généralise à l'aide de l'application tangente, qui devient plan tangent ou pire.

prop : $d_a f(u) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(a+\lambda u) - f(a)}{\lambda}$ (d'où unicité)

produit diff, puis $\varphi \circ (f,g)$ diff en $\varphi \circ (f(a), d_a g) + \varphi \circ (d_a f, g(a))$

chain rule : $\frac{\partial g\circ f}{\partial x_i}(a) = \sum_k \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)$; démo : $d_a h = d_{f(a)} g \circ d_a f$, puis on passe au jacobien.

Pou retrouver, on peut poser $y = f(x)$ et $z = g(y)$, écire dz selon x ou y, ieed $\sum \frac{\partial z}{\partial x_i} dx_i = \sum \frac{\partial z}{\partial y_j} dy_j$, puis remplacer les dy_j par $\sum \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$, puis identifier les dx_i. POssible grâce à ambiguité de dx_i

CP : $I \xrightarrow{\gamma} R \xrightarrow{f} ?$ donne $[f \circ \gamma]' = d_{\gamma(\cdot)} f \circ \gamma'$ (faire un dessin : la courbe γ est envoyée sur $f(\gamma)$, localemnt en a elle est envoyée sur $d_{\gamma(a)} f$, donc la tangente $\gamma'(a)$ est multipliée par $d_{\gamma(a)} f$.

Avant, on disait soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où I intervalle de R.

Maitenant, on dira soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ où U ouvert de R^n.

s'habituer...

lorsque $U = I$, $d_a f = f'(a)\,\mathrm{Id}$, mais $\nabla_a f = f'(a)$.

Ainsi, c'est le *gradien* qui généraliser la dérivée, la différentielle quant à elle générliser l'*application tangante*

extr => diff nulle ; <= fausse : $x \mapsto x^3$, $(x,y) \mapsto x^2 - y^2$ *point selle*

déivée partielles : ne pas en abuser... $\frac{ab}{a^2+b^2}$ a dérivée partielles nulle en 0, donc fonctions partielle continues, mais pas continue en 0 (sino $f(a,a) = \frac{1}{2}$ devrit être continue) donc non différentiable.

th H. Schwarz (français) ou th A. Clairault (pour anglais ?)

pour retenir l'ordre dans la jacobienne : multplierpar un vectuer collone h ->on doit tombe sur *df* (h), donc indices colonnes = coordonnées

Si $A = \begin{matrix} & -\alpha & \\ \alpha & & \\ & & \end{matrix} = \alpha \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \wedge \cdot = \alpha u_z \wedge \cdot$, alors e^{tA} est larotation d'angle $t\alpha$ autour de $R^+ u_z$.

On peut différenteir $e^{tA}(h) = h + t\alpha (u_z \wedge h) + O(h^2)$ et le faire apparaitre sur un dessin

Diff du det : en l'identité, passer dans C, écrire $\prod (1+\lambda_i) = 1 + \mathrm{tr} + ...$, puis transport par multiplication : $\det(A+H) = |A| \left(1 + \mathrm{tr}\left(A^{-1}H\right)\right) = |A| + \mathrm{tr}\left(H\ {}^t\mathrm{Com}\,A\right) + ...$ pUis argument de densité pour conclure.

PLus concis : $|A| = \sum_j a_{i,j} [\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$, d'où $\frac{\partial |A|}{\partial E_{i,j}} = [\mathrm{Com}\,A]_{i,j}$ et $\nabla \det = \mathrm{Com}$

Généralisation de th à une variable :

(f_k)cs et df_k cu => $d(\lim f_k) = \lim (df_k)$.

Sur un convexe, un f ets *convexe* ssi $f(b) - f(a) \geq [d_a f](b-a)$ en tout a, b

holomorphe (du grec holo = entier et morphê = forme)

On suppose que $z \mapsto f(z)$ est holomorphe sur un ouvert U contenant a et $f'(a) \neq 0$. Si (C_1) et (C_2) sont deux courbes admettant une tangente en a, alors l'angle orienté entre ces tangentes est le même qu'entre les tangentes en $f(a)$ aux courbes images $f(C_1)$ et $f(C_2)$. On exprime cette importante propriété en parlant de *transformation conforme*

Culture : pour la continuité, une fonction à plsueisuer variables est toujours CL de fonctions à 1 une variable.

En 1954, Kolmogorov et son élève Vladimir Arnold ont montré : il existe $n(2n+1)$ fonctions continues universelles $\Phi_{i,j} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telles que pour toute fonction continue $f : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$, il existe $2n+1$ fonctions continues $g_j : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ telles que $f(x_1, ..., x_n) = \sum_j g_j \left(\sum_i \Phi_{i,j}(x_i)\right)$

1 Interprétation du gradient

Gradient est $\perp$ lignes de niveau :

soit γ C^1 tq $f \circ \gamma$ constant. On dérive :

$$0 = \left[d_{\gamma(t)} f\right](\gamma'(t)) = \nabla_{\gamma(t)} f \cdot \gamma'(t),$$

donc $\nabla_a f$ ets orthogonal à la ligne de niveau $f = a$ en tout point.

le gradient est la direction de plus grande pente.

Dem : $f(a+h) = f(a) + (h \cdot \nabla_a f) + o(h)$ où le produit sclaire pilote.

Plus précis : soit γ un arc normal passant en a de vitesse v en$a$. Alors la pente selon γ est donnée par

$$[f \circ \gamma]'(0) = \left[d_{\gamma(0)} f\right](\gamma'(0)) = \overrightarrow{\nabla}_a f \cdot v.$$

Pente nulle ssi $v \perp \nabla$, ie ssi $v$arallèle lignes niveaux, cohrént avec ce qui précède.

la nome du gradient est inversement proportionnel à l'écartement des lignes de niveaux.

On suppose à présent v et $\nabla_a f \neq 0$ positivemnt colinéaires.

par continuité, $f \circ \gamma$ est un difféo local en a. L'équation $f \circ \gamma(t) = \lambda$ a un solution t_λ pour tout λ proche de $f(a)$. On sait de plus que $\frac{dt_\lambda}{d\lambda}[f \circ \gamma(t_0)] \frac{d[f \circ \gamma(t)]}{dt}(t_0) = 1$. En particulier pour $\gamma(t_0) = a$, on trouve $\frac{dt_\lambda}{d\lambda}(f(a)) = \frac{1}{\nabla_a f \cdot u} = \frac{1}{|\nabla_a f|}$ car u unitaire. Introduisons le point $x_\lambda = \gamma(t_\lambda)$ qui est d'image λ par f. On a $\frac{dx_\lambda}{d\lambda}(0) = \gamma'\left(t_{f(a)}\right) \frac{dt_\lambda}{d\lambda}(f(a))$ qui est de module $\frac{1}{|\nabla_a f|}$ Ainsi :

$$|x(\lambda) - x(f(a))| \sim \frac{\lambda - f(a)}{|\nabla_a f|}$$

2 divergence

soit $u : R^n \longrightarrow R^n$ champC^1 de vecteurs (par exemple une matrice M)

Soit y solution de $y' = u(y)$. Pour $u = M$, on a $y = y_0 e^{tM}$, donc y multiplie localement les volumes par $\det e^{tM} = e^{t \operatorname{tr} M} = e^{t \operatorname{div} u}$: agumente ssi $\operatorname{div} u < 0$ et réciproquemnet.

On veut montrer que le flot φ_t défini par l'ED $y' = u(y)$, ie les trajectoirtes dépendant de x, divergent ou cv selon le signe de la divergence de u.

Plus généralement, notons $\varphi_t(x)$ la solution de CI x. Alors pour X mesurable, l'écartement des solutions en fonction de la condition iniaiales est mesurée par $\frac{d\mu(\varphi_t(X))}{dt}(t=0)$.

On regarde donc

$$\mu(\varphi_t(X)) = \int_{\varphi_t X} 1 = \int_X |\det d_x \varphi_t| \, da = \int_X \det d_x \varphi_t dx$$

pour t assez petit par continuité car $\varphi_0(x) = x$, ie $\varphi_0 = \mathrm{Id}$.

Calcul intermédiair :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[\det d_x\varphi_t\right]_{t=0} &= \left[d_{d_x\varphi_0}\det\right]\left(\frac{d\left[d_x\varphi_t\right]}{dt}(t=0)\right) \\
&= \left[d_1\det\right]\left(d_x\frac{d\varphi_t}{dt}(t=0)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\left[d_x u\right](\varphi_t)(t=0)\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(d_x u\right) \\
&= \operatorname{div} u(x)\ ;
\end{aligned}$$

d'où la dérivée chercée :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mu\left(\varphi_t(X)\right) &= \frac{d}{dt}\int_X \det d_x\varphi_t dx \\
&= \int_X \frac{d}{dt}\det d_x\varphi_t dx \\
&= \int_X \operatorname{div} u(x)\, dx.
\end{aligned}$$

3 IAF

mq $\|f'\| \leq M \implies \|f(t)\| \leq Mt$

Heuristique : l'inégalité se propage de t à $t+h$

$$\begin{aligned}
\|f(t+h)\| &= \|f(t)+f'(t)h+\cdots\| \\
&\leq \|f(t)\|+|h|\,\|f'(t)\|+\cdots \\
&\leq Mt+|h|\,m+\cdots \\
&\leq M(t+h)+\cdots
\end{aligned}$$

f constatnte ssi $df=0$ marche sur un segme, donc sur un convexe, donc sur un ouvert connexe (car connexe par ligne brise) ; mais pas sur non connexe : prendre $f=a$ sur $[-1,0]$ et b sur $[0,1]$ privés de 0

4 Inversion locale

si $f : U \longrightarrow V$ difféo où U et V ouverts euclidiens, on a $d_{f(a)}f^{-1}\circ d_x f = \mathrm{Id}$, donc les R^n sont les même.

Nécessairement, f inj, et $d_a f$ inj. Il est remarquabe que cela suffise.

5 Paramétrisqtion sphériques

Les coordonnees spheriques ca marche en toute dimension

x1=cos a1 cos a2 ... cos a(n-1)

x2=cos a1 cos a2 ....sin a(n-1)

x3=cos a1 cos a2 ... sin a(n-2)

.

.

.

x(n-1)=cos a1 sin a2

xn=sin a1

tout ca permet de reperer un point sur S_{n-1} la sphere en dim n, apres il n'est pas trop dur de regarder quelles bornes donner à a1,... ,a(n-1) pour obtenir un bon parametrage non redondant.

6 gradient, rotationnel, divergence, vues à travers les complexes différentiels en dimension 3

cf leçons de mathématiques d'aujourd'hui, volume 2, p. 253

exo sur lacets homotopes : footnote p.256, tout lacet continue est limite uniforme de lacets C1, donc (lorsqu'ilssont assez proche) homotopes au lacet C0, donc de même intégrale (en une forme différentielle donnée)