Coniques
(version quasi-achevée)

Marc Sage

<2013

Table des matières

Pourquoi les coniques s'appellent-elles ellipse, parabole et hyperbole ?

Les mots « ellipse, hyperbole et parabole » ont été transcrits par Johannes Kepler (1571-1630) des mots grecs elleipsis, huperbolê et parabolê, noms qui avaient été donnés par Aristée (IVe siècle avant J.C.) et popularisés par Apollonius de Perge (env. 262 – 190 av. J.C.).

Le mot grec elleipsis a été créé à partir du verbe elleipein qui signifie « manquer » (« éclipse » a la même origine), tandis que huperbolê et parabolê sont des mots grecs existant signifiant l'un « excès » et l'autre « ressemblance » ou « juste adéquation ». Le suffixe bolê vient du verbe ballein signifiant « lancer », (cf. le « discobole » et la « balistique »). Remarquons que pour une parfaite symétrie, Aristée aurait pu créer « hypobole » pour ellipse !

Les trois mots « ellipse », « parabole » et « hyperbole » représentent aussi des figures de rhétorique, en bonne adéquation avec leur étymologie : une ellipse est une formule raccourcie (comme « chacun son tour » à la place de « chacun doit attendre son tour »), une parabole est un récit allégorique, une hyperbole est une formule exagérée (comme « mourir de rire »).

En mathématiques, une ellipse manque aussi de quelque chose, une hyperbole présente un excès, mais de quoi ? C'est là que les réponses divergent...

Pour le dictionnaire historique de la langue française, une ellipse manque... de perfection par rapport à un cercle. Bien que plausible, cette interprétation tue la symétrie ellipse – hyperbole, autour de la parabole.

On peut aussi penser que la raison vient de ce que sur une ellipse la distance au foyer est plus petite que la distance à la directrice (excentricité e $<$ 1) , sur une parabole, elle est égale (e = 1) et sur une hyperbole, elle est supérieure (e $>$ 1), mais c'est un contresens car les Grecs ne connaissaient pas la définition à partir des foyers et des directrices.

Plus sûre est l'interprétation suivante, car pour les Grecs, les coniques sont des sections de cône. On considère la section d'un cône par un plan perpendiculaire à une génératrice :

c'est une ellipse si l'angle d'ouverture du cône est aigu (déficit par rapport à l'angle droit).

c'est une hyperbole si l'angle d'ouverture du cône est obtus (excès par rapport à l'angle droit).

c'est une parabole si l'angle d'ouverture du cône est droit (juste adéquation).

Une deuxième explication peut provenir du fait que, en écriture moderne, l'équation générale réduite d'une conique est

$$y^2 = 2px + \lambda x^2 \quad (\text{avec } \lambda = e^2 - 1)$$

, l'ellipse, la parabole et l'hyperbole étant obtenues pour respectivement $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

On lit sur cette équation que l'aire du carré construit sur l'ordonnée est égale à l'aire du rectangle défini par l'abscisse et la corde passant par le sommet, aire à laquelle il faut retirer ou ajouter une certaine aire suivant que l'on a une ellipse ou une hyperbole, l'égalité avant lieu pour la parabole ; ceci se trouve dans le livre d'Apollonius sur les coniques.

Lorsqu'on applique le carré y$^2 surlerectangle2px, lecarrestendfautdanslecasdel'ellipse(c'estlesensduterme$

1 Introduction aux ellipses (par section d'un cylindre)

Quelle est l'intersection $\mathcal{C}$ d'un cyclindre (creux, vertical, de rayon non nul) par un plan π faisant un angle α (non droit) avec l'horizontale ? [dessin]

Cette section ressemble à un cercle "étiré", il lui manque (du fait de cet étirement) quelque chose pour avoir la perfection du cercle : les anciens la nommèrent pour cela ***ellipse***.

1.1 Caractérisation par foyer et directrice

Insérons une sphère $\mathcal{S}$ tangente intérieurement au cylindre (le long d'un cercle) ainsi qu'au plan π en un point F (appelé un ***foyer***[1]). [dessin]

Le plan contenant le cercle tangent $\mathcal{S} \cap \pi$ (appelé plan équatorial de $\mathcal{S}$) rencontre le plan π selon une droite Δ (appelée une ***directrice***).

Remarque. Soit A un point extérieur à une sphère donnée et T le point de tangence d'une tangente à la sphère passant par A. Alors la distance AT ne dépend pas de la tangente choisie. [dessin]

Appliquons. Soit C un point de l'ellipse $\mathcal{C}$ et T le point du cercle tangent situé à la verticale de C. Alors

1. d'une part la droite (FC) est incluse dans un plan tangent à la sphère $\mathcal{S}$, donc (CF) est tangente à $\mathcal{S}$ en F ;
2. d'autre part la droite (CT) est incluse dans le cylindre tangent à la sphère $\mathcal{S}$, donc (CT) est tangente à $\mathcal{S}$ en T ;

la remarque permet de conclure à l'égalité $CF = CT$. Par ailleurs, en notant H le projeté orthogonal de C sur la directrice Δ, on lit dans le triangle rectangle HCT l'égalité $\sin\alpha = \frac{CT}{CH}$, d'où l'on tire

$$FC = e\, d(\Delta, C)$$

où l'on a posé $e := \sin\alpha$, appelée l'***excentricité*** de l'ellipse (quand e croît, $\mathcal{C}$ s'allonge ; quand $e = 0$, $\mathcal{C}$ est un cercle (et la directrice Δ part "à l'infini") ; quand $e \to 1$, on tombe dans un cas dégénéré).

[1] La terminologie vient de ce que des sons émis d'un des deux foyers (on verra bientôt le second foyer) se focalisent sur l'autre, *cf.* section *Culture*.

Réciproquement, soit P un point de π tel que $FP = e\ d(\Delta, P)$. Montrons que $P \in \mathcal{C}$. (FACULTATIF)

Puisque $\mathcal{C}$ "entoure" F, toute demi-droite issue de F va recouper $\mathcal{C}$; on peut donc considérer le point C de $[FP) \cap \mathcal{C}$ puis l'homothétie h de centre F et rapport $\frac{FP}{FC}$. Cette dernière envoit C sur P (en effet, de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{Fh(C)} = \frac{FP}{FC}\overrightarrow{FC} = FP \cdot u = \overrightarrow{FP}$ résulte l'égalité ponctuelle $h(C) = P$).

★ $h(\Delta)$ désigne $\{h(\delta)\}_{\delta \in \Delta}$, ce *N'EST PAS* l'image de Δ par h (ce qui n'aurait aucun sens).

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} d(h(\Delta), P) &= d(h(\Delta), h(C)) \\ &= \frac{FP}{FC} d(\Delta, C) && \text{(une homothétie multiplie les distances par son rapport)} \\ &= \frac{FP}{\sin\alpha} && \text{(puisque } C \in \mathcal{C}\text{, on sait que } FC = e\ d(\Delta, C)\text{)} \\ &= d(P, \Delta) && \text{(hypothèse sur } P\text{)} ; \end{aligned}$$

or les droites $h(\Delta)$ et Δ sont parallèles, ce qui force leur égalité (on utilise l'implication $\begin{array}{c} d(A, D) \\ = d(A, D') \\ D \parallel D' \end{array} \implies D = D'$ [dessin]). Enfin, le centre F de h n'est pas sur $\Delta = h(\Delta)$, donc h donc doit de rapport 1, d'où $P = h(C) = \mathrm{Id}(C) = C \in \mathcal{C}$, *c. q. f. d.*.

Conclusion (caractérisation par foyer et directrice). *L'ellipse $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points du plan π dont la distance au foyer F vaut celle à la directrice Δ multipliée par l'excentricité e :*

$$\mathcal{C} = \{C \in \pi\ ;\ FC = d(\Delta, C)\}.$$

1.2 Caractérisation par foyers et grand-axe

On aurait pu choisir une *autre* sphère $\mathcal{S}'$ tangente intérieurement au cylindre et tangente au plan π. En appelant F' le point de tangence avec π et Δ' la droite-intersection de π avec le plan équatorial de $\mathcal{S}'$, on montrerait *mutandis mutadis* que $\mathcal{C} = \{C \in \pi\ ;\ F'C = d(\Delta', C)\}$ (avec toujours $e = \sin\alpha$). Les deux foyers permettent cependant ensemble un autre description de $\mathcal{C}$. [dessin]

En notant a la demi-distance entre les plans équatoriaux de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, tout point $C \in \mathcal{C}$ vérifie

$$FC + F'C = TC + T'C \overset{C \in [TT']}{=} TT' = 2a.$$

Soit réciproquement $P \in \pi$ tel que $FP + F'P = 2a$; montrons que $P \in \mathcal{C}$. (FACULTATIF)

On utilisera le fait (apparemment clair) que l'"intérieur" de $\mathcal{C}$ est convexe[2], au sens où

$$\forall A, B, C, \left\{ \begin{array}{c} A \in \mathcal{C} \\ B \in \mathcal{C} \\ C \in [AB] \end{array} \right. \implies C \in \mathcal{C}.$$

Remarque (logique). Il semble clair que P est ou bien sur $\mathcal{C}$, ou bien strictement à l'intérieur de $\mathcal{C}$, ou bien strictement à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Pour conclure $P \in \mathcal{C}$, il suffit donc de montrer que les deux alternatives mènent à une contradiction[3].

1. Si P est strictement à l'extérieur de $\mathcal{C}$ [dessin], on peut considérer un point $C \in [FP] \cap \mathcal{C}$. On a alors
$$2a \overset{\text{hypohtèse}}{=} FP+F'P \overset{C\in[FP]}{=} FC+CP+PF' \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{inégalité}}{\geq}} FC+CF' \overset{A\in\mathcal{C}}{=} 2a,$$
d'où le cas d'égalité $P \in [CF']$; or le segment $[CF']$ reste par convexité à l'intérieur de $\mathcal{C}$, donc P doit être à l'intérieur de $\mathcal{C}$, ce qui est absurde.
2. Si P est strictement à l'intérieur de $\mathcal{C}$ [dessin], on peut considérer un point $C \in [FP) \cap \mathcal{C}$ hors de $[FP]$. On a alors
$$2a = FP + F'P \overset{P\in[FC]}{=} FC - CP + PF' \underset{\text{triangulaire}}{\overset{\text{inégalité}}{\leq}} FC + CF' \overset{C\in\mathcal{C}}{=} 2a,$$
d'où le cas d'égalité $C \in [PF']$; or ce segment reste par convexité strictement à l'intérieur de $\mathcal{C}$, donc C doit être strictement à l'intérieur de $\mathcal{C}$, ce qui est absurde. $\square$

Remarque (topologique). La preuve qui précède parle des "intérieur" et "extérieur" d'une courbe fermée (ici $\mathcal{C}$), des notions topologiques[4] qui nécessiteraient d'être *SOIGNEUSEMENT* formulées (mais cela serait hors programme).

Conclusion (caractérisation bifocale[5]). *L'ellipse $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points de π dont la somme des distances aux foyers F et F' vaut constamment $2a$:*

$$\mathcal{C} = \{P \in \pi \ ; \ FP + F'P = 2a\}.$$

---

[2] Pour le montrer proprement, on peut dire que $\mathcal{C}$ est l'intersection de deux convexes de l'espace (le plan π et le cylindre "plein"), donc (exercice !) convexe.

[3] On invoque pour cela la tautologie $(e \vee i \vee s) \implies (\neg e \implies (\neg i \implies s))$ instanciée selon
$e \leftarrow$ "M est strictement à l'extérieur de $\mathcal{C}$"
$i \leftarrow$ "M est strictement à l'ixtérieur de $\mathcal{C}$" , tautologie que l'on peut obtenir en utilisant à
$s \leftarrow$ "M est sur $\mathcal{C}$"
deux reprises la tautologie $(p \vee q) \implies (\neg p \implies q)$.

[4] *topos* $\longleftrightarrow$ lieu, donc *topologie* $\longleftrightarrow$ discours sur le(s) lieu(x)

[5] *bi* $\longleftrightarrow$ 2, *focale* $\longleftrightarrow$ foyer ; l'adjectif *bifocal* signifie donc "relatif à deux foyers"

Définitions (axe focal, centre).
La droite (FF') reliant les deux foyers de l'ellipse $\mathcal{C}$ est appelée son ***axe focal****.*

Le milieu du segment $[FF']$ reliant les deux foyers de l'ellipse $\mathcal{C}$ est appelé son ***centre****.*

1.3 Lien entre les deux caractérisations

Comment retrouver, dans la caractérisation bifocale, l'excentricité e et les directrices ?

Proposition (lien entre foyers, directrices, excentricité et demi-grand axe). [dessin]

1. *Les directrices Δ et Δ' et sont parallèles et orthogonale à l'axe focal (FF').*
2. *Le centre O de $\mathcal{C}$ en est un centre de symétrie et est équidistant des directrices.*
3. *En notant S et D les points d'intersection respectivement de $[OF)\cap C$ et de $[FF')\cap\Delta$, on a les égalités des longueurs* $\begin{cases} OF = ea \\ OS = a \\ OD = \frac{a}{e} \end{cases}$.

MNÉNO (métrique). a dénote une distance (appelée ***demi-grand axe*** de $\mathcal{C}$) tandis que e est un scalaire adimensionné compris entre 0 et 1.

Démonstration. (FACULTATIVE)

1. Les droites Δ et Δ' sont les intersections respectives d'un même plan (π) avec deux plans parallèles (les plans équatoriaux de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$), donc sont parallèles.

   Appelons $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites orthogonale respectivement à Δ et Δ' et passant respectivement par F et F' ; puisque (FF') est orthogonale à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$, il suffit de montrer que $\mathcal{D} = (FF') = \mathcal{D}'$; puisque $F \in \mathcal{D}$ et $F' \in \mathcal{D}'$, cela revient à montrer $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

   Observation fondamentale : la relation $FC = e\, d(\Delta, C)$ caractérisant $\mathcal{C}$ (où C est un point de π) est *symétrique par rapport à $\mathcal{D}$*, au sens où : si un point $C \in \pi$ la vérifie, alors son image par la réflexion σ d'axe $\mathcal{D}$ la vérifie aussi. En effet, supposant $FC = e\, d(\Delta, C)$, il vient

$$F\sigma(C) \underset{\text{à l'axe de } \sigma}{\overset{F \text{ appartient}}{=}} \sigma(F)\,\sigma(C) \overset{\sigma \text{ isométrie}}{=} FC \overset{\text{hypothèse}}{=} e\, d(\Delta, C)$$
$$\overset{\sigma \text{ isométrie}}{=} e\, d(\sigma(\Delta), \sigma(C)) \overset{\Delta \text{ fixe par } \sigma}{=} e\, d(\Delta, \sigma(C)).$$

   Il en résulte que $\mathcal{C}$ est stable par σ (*i. e.* $\forall C \in \pi,\ C \in \mathcal{C} \iff \sigma(C) \in \mathcal{C}$). Ce même raisonnement montrerait que $\mathcal{C}$ est stable par la réflexion σ'

d'axe $\mathcal{D}'$. Par conséquent, $\mathcal{C}$ est stable par la composée $\sigma' \circ \sigma$, qui est la translation de vecteur le double du "vecteur distance" de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}'$; pour conclure $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$, il s'agit de montrer que ce vecteur est nul. Si ce n'était pas le cas, les itérés d'un point donné de $\mathcal{C}$ partiraient arbitrairement loin dans le plan π, ce qui est impossible vu que le cylindre "borne" l'ellipse $\mathcal{C}$. $\square$

2. **Observation fondamentale** : la caractérisation bifocale de $\mathcal{C}$ est *symétrique par rapport à la médiatrice* μ *de* $[FF']$. En effet, supposant $FC + F'C = 2a$ pour un point $C \in \pi$, on aura (en notant ρ la réflexion d'axe μ)

$$\begin{aligned} F\rho(C) + F'\rho(C) & \underset{\text{échangés par } \rho}{\overset{F \text{ et } F' \text{ sont}}{=}} \rho(F)\rho(C) + \rho(F')\rho(C) \\ & \overset{\rho \text{ isométrie}}{=} FC + F'C \\ & \overset{\text{hypothèse}}{=} 2a. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\mathcal{C}$ est stable par ρ, donc par la composée $\rho \circ \sigma$, laquelle est la rotation d'angle $2(\widehat{(FF')\,,\pi}) = 180°$ et de centre le point de $(FF') \cap \pi = \{O\}$, *i. e.* la symétrie centrale de centre O. Cette stabilité exprime exactement le fait que O soit un centre de symétrie de $\mathcal{S}$.

Montrons maintenant $OD = OD'$ [dessin]. On a $SD = d(\Delta, S) = \frac{FD}{e} \underset{\text{de symétrie}}{\overset{O \text{ centre}}{=}} \frac{F'D'}{e} = d(\Delta', D') = S'D'$, d'où $OD \overset{S \in [OD]}{=} OS + SD = OS' + S'D' \overset{S' \in [OD']}{=} OD'$, *c. q. f. d.*.

3. On a $S \in \mathcal{C}$, donc

$$2a = FS + F'S = (OS - OF) + (F'O + OS) \overset{OF = OF'}{=} 2OS, \text{ d'où } OS = a.$$

On a (pour tout point $C \in \mathcal{C}$)

$$\begin{aligned} d(\Delta, C) + d(\Delta', C) &= d(\Delta, \Delta') \text{ car } C \text{ est entre } \Delta \text{ et } \Delta' \\ &= DD' \\ &= OD + D'O \\ &= OD + OD \\ &= 2OD, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{a}{e} = \frac{FC + F'C}{2e} = \frac{e\ d(\Delta, C) + e\ d(\Delta', C)}{2e} = \frac{e(2OD)}{2e} = OD.$$

On a $FS = \begin{cases} eSD = e(OD - OS) \\ OS - OF = eOD - OF \end{cases}$, d'où $OF = eOS$.

1.4 Équations (cartésienne, paramétrique, polaire, des tangentes)

Proposition (& définitions).
Dans un repère orthonormé d'origine le centre O de $\mathcal{C}$ et d'axe des abscisses l'axe focal (FF'), un point $P \in \pi$ de coordonnées $\binom{x}{y}$ appartient à $\mathcal{C}$ ssi

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \text{[dessin]}$$

*où $b := a\sqrt{1-e^2} = a\cos\alpha$ (appelé **demi-petit axe** de l'ellipse $\mathcal{C}$), ou encore ssi*

$$\exists \psi \in \mathbf{R}, \ \left\{ \begin{array}{l} x = a\cos\psi \\ y = b\sin\psi \end{array} \right. .$$

Dans un repère polaire de pôle F et de demi-droite $F + \mathbf{R}_+ \overrightarrow{F'F}$, un point P de coordonnées polaires (r, θ) appartient à $\mathcal{C}$ ssi

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{[dessin]}$$

*où $p := \frac{b^2}{a}$ (appelé le **paramètre** de l'ellipse $\mathcal{C}$).*

MNÉMO $\left\{ \begin{array}{c} x, y, a, b, p, r \text{ sont des } \textit{distances} \\ e, \cos\theta, \sin\theta, \cos\psi, \sin\psi \text{ sont } \textit{adimensionés} \end{array} \right.$

Sanity check. Le dénominateur de r est toujours plus grand que $1 - |e|$; or on sait que $0 < e < 1$, d'où la comparaison $r \leq \frac{p}{1-|e|}$, laquelle montre que l'ellipse reste *bornée*.

Démonstration. (FACULTATIVE)
La proposition précédente montre que F a pour coordonnées cartésiennes $\binom{ea}{0}$ et que Δ a pour abscisse $\frac{a}{c}$. Fixons un point P dans π.
On a les équivalences

$$\begin{array}{rcl} P \in \mathcal{C} & \iff & FP = e\ d(\Delta, P) \\ & \iff & FP^2 = e^2\ d(\Delta, P)^2 \\ & \iff & (x - ea)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e}\right)^2 \\ & \iff & (x - ea)^2 + y^2 = (ex - a)^2 \\ & \iff & x^2 - 2eax + e^2a^2 + y^2 = e^2x^2 - 2eax + a^2 \\ & \iff & \left(1 - e^2\right)x^2 + y^2 = \left(1 - e^2\right)a^2 \\ & \iff & \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2 \\ & \iff & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \end{array}$$

La seconde caractérisation vient de l'équivalence

$$\forall u, v \in \mathbf{R},\ \left(u^2 + v^2 = 1\right) \iff \left(\exists \psi \in \mathbf{R},\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}\right)$$

spécialisée selon $\binom{u}{v} \leftarrow \binom{x/a}{y/b}$.

On a par ailleurs $e\ d(\Delta, F) = e\left(\frac{a}{e} - ae\right) = a\left(1 - e^2\right) = a\frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a} = p$, d'où dans le repère polaire

$$e\ d(\Delta, P) \underset{\text{à gauche de }\Delta}{\overset{F \text{ et } P \text{ sont}}{=}} e\ \left(d(\Delta, F) - abs(P)\right) = p - re\cos\theta,$$

d'où les équivalences $FP = e\ d(\Delta, P) \iff r = p - r\cos\theta \iff r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$. □

Remarque (focale). Pour placer les foyers connaissant le centre O ainsi que les demi-axes a et b, on utilise un troisième sommet [dessin] : par symétrie, on a $sF = sF'$, d'où $sF = \frac{Fs+F's}{2} = \frac{2a}{2} = a$. On retrouve ainsi l'expression de la ***demi-distance focale*** $OF = \sqrt{a^2 - b^2} = ea$ (parfois noté c).

Remarque (limite). Lorsque $e = 0$, *i. e.* quand $a = b$ (ou encore lorsque $\alpha = 0$), on retrouve l'équation du cercle de rayon a centré en O ainsi que le paramétrage $\psi \mapsto ae^{i\psi}$ de ce même cercle (les directrices n'ont alors plus de sens, rejetée "à l'infini").

Remarque (limite). Lorsque, à e fixé, on fait tendre a (donc aussi b) vers 0, l'équation ci-dessus devient $\left(1 - e^2\right)x^2 + y^2 = 0$, ce qui montre que $\mathcal{C}$ se réduit à son centre. Cela correspond au cas dégénéré où le cylindre est de rayon nul. [dessin]

Corollaire.
Dans un plan donné, les ellipses sont exactement les images de cercles par une affinité.
Une équation de la tangente en un point $\binom{x_0}{y_0}$ *donné est* $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

MNÉMO : on "*dédouble*" dans l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ les inconnues $\binom{x^2 \leftarrow x_0 x}{y^2 \leftarrow y_0 y}$.

Démonstration. Considérons le paramétrage $\Gamma : \psi \mapsto \binom{a\cos\psi}{b\sin\psi}$.

Γ est la composée $\psi \overset{\gamma}{\longmapsto} \binom{a\cos\psi}{a\cos\psi} \overset{\alpha}{\longmapsto} \binom{a\cos\psi}{b\cos\psi}$ où γ paramètre le cercle de rayon a centré en O et où α est l'affinité d'axe $\mathbf{R}$ et de rapport $\frac{b}{a}$ (parallèlement à $i\mathbf{R}$), donc $\mathcal{C}$ est l'image d'un cercle par une affinité.

Considérons réciproquement un cercle et une affinité de rapport λ. On choisit un repère orthonormé dont l'axe des abscisses coïncide avec celui de l'affinité donnée et où le cercle donné est centré en $\binom{0}{1}$. On note alors a le rayon du cercle. Alors un point $\binom{a\cos\psi}{1+a\sin\psi}$ est envoyé par l'affinité donnée sur sur $\binom{a\cos\psi}{\lambda(1+a\sin\psi)} = \binom{0}{\lambda} + \binom{a\cos\psi}{\lambda a\sin\psi}$ qui décrit une ellipse de centre $\binom{0}{\lambda}$ et de demi-axes a et λa.

Le vecteur tangent en un point $C(\psi)$ est $\frac{\partial C(\psi)}{\partial\psi} = \binom{-a\sin\psi}{b\cos\psi}$, de sorte qu'un vecteur normal à $\mathcal{C}$ en un point $C(\psi_0)$ est $\binom{b\cos\psi_0}{a\sin\psi_0} = ab\binom{\frac{x_0}{a^2}}{\frac{y_0}{b^2}}$,. On en déduit qu'un point $P\binom{x}{y}$ appartient à la tangente à $\mathcal{C}$ en $C(\psi_0)$ ssi $\overrightarrow{C(\psi_0)P} \perp \left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$, *i. e.* ssi $\binom{x-x_0}{y-x_0} \cdot \binom{\frac{x_0}{a^2}}{\frac{y_0}{b^2}} = 0$, *i. e.* ssi $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} \underbrace{-\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}}_{-1} = 0$.

Conséquence.
La projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.
L'aire d'une ellipse vaut π fois le produit de ses demi-axes.

Démonstration.
[dessin] projection (angle φ) = rotation angle $-\varphi$ puis affinité de rapport $\cos\varphi$
$\pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab$.

Exercice. *Retrouver l'équation cartésienne à partir de la caractérisation bifocale.* (hint : $F'P = 2a - FP$)
Exercice. *centre oscillant dont abscisses ont meme point d eretour ; mq ellipse ; exc ?*
$e^{it} + \cos t = 2\cos t + i\sin t$, donc $\binom{a}{b} = \binom{2}{1}$ et $e = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$.

2 Sections planes d'un cône

Dans cette partie, on généralise ce qui précède en étudiant l'intersection plane d'un cône (éventuellement dégénéré en un cylindre).

2.1 Définitions

Définition (cônes, cylindres).
Soit dans l'espace Γ un lieu géométrique, O un point et Δ une direction (identifiée à une droite de la forme $\mathbf{R}u$).
*Le **cône** de sommet O engendré par Γ est la réunion des droites $(O\gamma)$ pour γ parcourant Γ. Ces droites sont appelées les **directrices** du cône.*
*Le **cylindre** de direction Δ engendré par Γ est la réunion des droites $\gamma + \Delta$ pour γ parcourant Γ. Ces droites sont appelées les **directrices** du cylindre.*

Exemples.
Γ segment : cône = réunion de deux secteurs angulaires opposés
cylindre = bande [dessin]

Γ triangle : $\begin{array}{l}\text{cône} = \text{cône "pyramidal"} \\ \text{cylindre} = \text{"toblerone"}\end{array}$ [dessin]

Γ cercle : $\begin{array}{l}\text{si le sommet } O \text{ appartient à l'axe de symétrie du cercle, alors cône} = \textbf{\textit{cône usuel}} \\ \text{si la direction est l'axe de symétrie du cercle, alors cylindre} = \textbf{\textit{cylindre usuel}}\end{array}$ [dessin]

Définition. *Dans toute la suite du cours, le terme "**cône**" (tout court) désignera* $\left\{\begin{array}{l}\textit{ou bien un cône usuel,} \\ \textit{ou bien un cyclindre usuel.}\end{array}\right.$

Remarque. On peut voir un cylindre de direction Δ comme un cône à sommet dont le sommet a été rejeté "à l'infini" dans la direction Δ. C'est pourquoi, dans la définition de "cône", nous incluons le cylindre usuel qui peut vu comme un cône usuel dont on a envoyé le sommet à l'infini dans la direction de l'axe de symétrie du cercle. [dessin]

Définition (conique). *Une **conique** est l'intersection d'un cône par un plan.*

Remarque. Rappelons les paramétrisations standard d'un cône usuel de sommet l'origine et d'axe celui des cotes : [dessin] $\left\{\begin{array}{l}\text{en phériques : } \sin\varphi = \sin\varphi_0 \\ \text{en cylindriques : } |z| = |r|\cot\varphi_0 \\ \text{en cartésiennes : } z^2 = \left(x^2+y^2\right)\cot^2\varphi_0\end{array}\right.$ .où φ_0 désigne l'angle fait entre la verticale (l'axe des cotes) et n'importe quelle directrice.

On fixera par la suite un tel cône, ce qui revient à se donner un angle $\varphi_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On notera $\alpha_0 := \frac{\pi}{2} - \varphi_0$ l'angle fait par n'importe quelle directrice avec l'horizontale (le plan de cote nulle). On notera de même π un plan de l'espace et α l'angle fait par π avec l'horizontale. Enfin, on notera $\mathcal{C}$ la conique intersection du cône ci-dessus avec le plan π.

2.2 Descriptions des coniques

2.2.1 Cas dégénérés (lieu vide, points, réunions de deux droites, plans)

$\varphi_0 = 0$: alors le cône se réduit à une droite, donc $\mathcal{C}$ est ou bien vide [dessin], ou bien une droite [dessin], ou bien un point [dessin].

(Ce cas correspond également à celui où le rayon du cylindre est nul.)

$\alpha_0 = 0$: alors le cône s'identifie au plan de cote nulle, donc $\mathcal{C}$ est ou bien vide [dessin], ou vien une droite [dessin], ou bien un plan [dessin].

cylindre dont l'axe est parallèle à π : alors $\mathcal{C}$ est ou bien vide [dessin], ou bien une droite (cas d'un plan tangent au cylindre) [dessin], ou bien la réunion de deux droites parallèles [dessin].

cône traversé par π en son sommet : alors $\mathcal{C}$ est ou bien un point (cas $\alpha < \alpha_0$) [dessin], ou bien un droite (cas $\alpha = \alpha_0$) [dessin], ou bien la réunion de deux droites sécantes (cas $\alpha > \alpha_0$) [dessin].

Résumé. *Les coniques dégénérées sont*[6] *:*

1. *le lieu vide ;*
2. *les points ;*
3. *les droites ;*
4. *les réunions de deux droites parallèles ;*
5. *les réunions de deux droites sécantes ;*
6. *les plans.*

2.2.2 Cylindre de rayon non nul, $\alpha \neq 0$ (ellipse)

[dessin] On obtient (*cf.* introduction) une ***ellipse*** caractérisée

1. par ses deux ***foyers*** F et F' et son ***demi-grand axe*** a *via* [dessin]
$$\forall C \in \pi,\ C \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow FC + F'C = 2a,$$
2. ou (si $\alpha \neq 0$) par un foyer F, une directrice Δ et son excentricité e *via* [dessin]
$$\forall C \in \pi,\ C \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow FC = e\ d\,(\Delta, C)\,.$$

Les ***demi-petit axe*** et ***paramètre*** de l'ellipse sont définis respectivement par
$$b := a\sqrt{1-e^2} = a\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad p := e\ d\,(F,\Delta) = \frac{b^2}{a}.$$
Des équations cartésienne et polaire sont alors respectivement
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad r = \frac{p}{1+e\cos\theta}.$$

Remarque (limite). Un cercle (cas $\alpha = 0$) est une ellipse dont les foyers sont confondus, ou encore une ellipse d'excentricité nulle (vu la distance interfocale $FF' = 2ea$), ou encore une ellipse de paramètre $p = a$ (vu la relation $p = \frac{b^2}{a}$).

Cas dégénérés. On pourrait dire que qu'un point (resp. le vide) est une ellipse de grand axe nul (resp. strictement négatif), tout comme un point (resp. le vide) peut être vu comme un cercle de rayon nul (resp. strictement négatif). Ces considérations dépendent toutefois des définitions adoptées et la souplesse est de rigueur pour discuter de ces cas limites avec autrui.

[6] les points 3,4,5 ci-après peuvent se résumer en "*réunion de deux droites*"

Dans ce cours,
le vide et les points seront considérées comme des ellipses[7] *dégénérées*
(mais pas comme des ellipses tout court).

2.2.3 Cône usuel avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha < \alpha_0$ (hypobole)

[dessin] Le même raisonnement qu'en introduction montre qu'un point $C \in \mathcal{C}$ vérifie

$$FC = CT = \frac{d(C,\Sigma)}{\cos\varphi_0} \overset{\text{si } \alpha\neq 0}{=} \frac{d(C,\Delta)\sin\alpha}{\sin\varphi_0},$$

d'où la description par foyer et directrice

$$\mathcal{C} = \{C \in \pi \ ; \ FC = e\ d(\Delta, C)\} \qquad \text{avec } e := \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$$

ainsi que la descrition bifocale [dessin]

$$\mathcal{C} = \{C \in \pi \ ; \ FC + F'C = 2a\}.$$

On obtient donc une ellipse (aussi parfois appelée ***hypobole***) d'excentricité $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} \in [0,1[$, le cas $e = 0$ correspondant au cas $\alpha = 0$ où $\mathcal{C}$ est un cercle.

2.2.4 Cône usuel avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha = \alpha_0$ (parabole)

[dessin] Le même raisonnement qu'en introduction conduit à une description par foyer et directrice

$$\mathcal{C} = \{C \in \pi \ ; \ FC = d(\Delta, C)\}$$

où l'excentricité $e := \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$ vaut 1. On dit que la conique $\mathcal{C}$ est une ***parabole*** de ***foyer*** F et ***directrice*** Δ. Son ***paramètre*** est la distance entre foyer et directrice : $p := d(F, \Delta)$.

Remarque (limite). L'autre sphère étant rejetée à l'infini, on peut voir une parabole comme une ellipse dont on a envoyé l'un des foyers à l'infini. (C'est pourquoi une parabole n'admet ni centre ni description bifocale.)

Cas dégénéré. Fixons deux points équidistants du foyer puis envoyons (à p fixé) foyer et directrice à l'infini. [dessin]. On obtient la réunion de deux droites parallèles, ce que l'on qualifiera de parabole dégénérée.

[7] la raison vient surtout du dernier théorème de ce cours

Équation cartésienne. [dessin] Prenons un repère orthogonal de Σ où $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et où Δ pour pour équation $x = -\frac{p}{2}$. Soit $P \in \Sigma$ dont on note (x, y) les coordonnées. On a alors les équivalences

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{C} &\iff FP^2 = d(\Delta, P)^2 \\ &\iff \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ &\iff x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + x + \frac{p^2}{4} \\ &\iff \boxed{y^2 = 2px} \\ &\iff \boxed{\tfrac{x}{p} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{y}{p}\right)^2} \quad \text{(penser à l'homogénéité).} \end{aligned}$$

Exemple. *Reconnaître la courbe d'équation* $y = x^2$. On commence par échanger x et y puis on lit $p = \frac{1}{2}$, d'où le [dessin]

Tangentes. La tangente à $\mathcal{C}$ en un point $\binom{x_0}{y_0} \in \mathcal{C}$ a pour équation $\boxed{y_0 y = p(x_0 + x)}$ (dédoubler $\begin{matrix} y^2 \leftarrow y_0 y \\ 2x \leftarrow x_0 + x \end{matrix}$)

Cas dégénérés. Quand p tend vers 0, on tombe sur l'équation d'une droite $y = 0$ [dessin] ; on pourrait donc dire qu'une droite est une parabole (cas où le plan π tangent au cône tend à passer par son sommet). C'est encore une histoire de convention. Dans la même veine, de la même manière que nous considérons le vide comme une ellipse de grand axe strictement négatif, nous pouvons voir le vide comme une parabole de paramètre strictement négatif.

Dans ce cours,
le lieu vide, les droites et les réunions de deux droites parallèles
seront considérés comme des paraboles[8] dégénérées
(mais pas comme des paraboles tout court).

Remarque (limite). Quand p tend vers ∞, on tombe sur l'équation d'une droite $x = 0$ [dessin], ce qui est cohérent avec la convention ci-dessus (cas où le plan π est tangent à un cylindre).

Équation polaire. [dessin] On raisonne comme en introduction : $d(\Delta, P) = d(\Delta, F) - \operatorname{abs} P = p - r\cos\theta$, d'où l'équivalence $P \in \mathcal{C} \iff FP = d(\Delta, P) \iff r = p - r\cos\theta \iff \boxed{r = \frac{p}{1+\cos\theta}}$.

[8] la raison vient surtout du dernier théorème de ce cours

2.2.5 Cône usuel avec $O \notin \pi$, $0 < \alpha_0 < \alpha$ (hyperbole)

[dessin] Le même raisonnement qu'en introduction conduit à une description bifocale de chacun des branches

$$\forall B \in \pi, \begin{cases} B \in \mathcal{B} \Longleftrightarrow F'B - FB = 2a \\ B \in \mathcal{B}' \Longleftrightarrow FB - F'B = 2a \end{cases},$$

d'où une caractérisation bifocale de la conique

$$\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \{C \in \pi\ ;\ |F'B - FB| = 2a\}.$$

On dit que $\mathcal{C}$ est une ***hyperbole*** de ***foyers*** F et F' et de ***demi-grand axe*** a ; les lieux $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont ses ***branches***. La droite (FF') s'appelle l'***axe focal*** de l'hyperbole $\mathcal{C}$ et le milieu de $[FF']$ s'appelle son ***centre*** .

On a aussi une description par foyer et directrice

$$\mathcal{C} = \begin{matrix} \{C \in \pi\ ;\ FC = d(\Delta, C)\} \\ \{C \in \pi\ ;\ F'C = d(\Delta', C)\} \end{matrix}$$

où l'***excentricité*** $e := \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0}$ est strictement supérieure à 1. Les droites Δ et Δ' sont appelée ***directrices*** et sont respectivement associées aux foyer F et F'.

Tout comme pour les ellipses, on montre [dessin]

1. que les directrices sont parallèles et orthogonales à l'axe focal ;
2. que le centre de $\mathcal{C}$ en est un centre de symétrie et est équidistant des directrices ;
3. les égalités métriques $\begin{cases} OF = ea \\ OS = a \\ OD = \frac{a}{e} \end{cases}$.

On en déduit une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans un répère orthonormé d'origine le centre de $\mathcal{C}$ et dont l'axe des abscisses est l'axe focal de $\mathcal{C}$: étant donné un point $P \in \pi$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{C} \quad & \Longleftrightarrow \quad FP = e\ d(\Delta, P) \\ & \overset{cf.\text{ intro}}{\Longleftrightarrow} \quad \left(1 - e^2\right) x^2 + y^2 = \left(1 - e^2\right) a^2 \\ & \Longleftrightarrow \quad \left(e^2 - 1\right) x^2 - y^2 = \left(e^2 - 1\right) a^2 \\ & \Longleftrightarrow \quad \frac{b^2}{a^2} x^2 - y^2 = b^2 \quad \text{ où } b^2 := a\sqrt{e^2 - 1} \\ & \Longleftrightarrow \quad \boxed{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1}. \end{aligned}$$

Tangentes. Comme pour les ellipses, la tangente à $\mathcal{C}$ en un point (x_0, y_0) admet une équation cartésienne de la forme $\boxed{\frac{x_0 x}{a} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$ (dédoubler les coordonnées).

Asymptotes. Lorsque $|x|$ est grand, l'équation devient $\left|\frac{y}{x}\right|^2 = \frac{b^2}{a^2} - \underbrace{\left(\frac{b}{ax}\right)^2}_{\simeq 0} \simeq \frac{b^2}{a^2}$, *i. e.* $y \simeq \pm\frac{b}{a}x$, d'où *deux asymptotes* [dessin]. Le demi-angle entre ces asymptotes a pour cosinus $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{e}$, ce qui donne une *interprétation angulaire* de l'excentricité. Lorsque les asymptotes sont orthogonales (ce qui équivaut respectivement à $a = b$ ou à $e = \sqrt{2}$), on dit que l'hyperbole $\mathcal{C}$ est ***équilatère***[9].

Foyers. Pour placer les foyers connaissant le centre et les demi-axes, on reporte la longueur $\sqrt{a^2+b^2}$ sur l'axe focal [dessin], ce qui permet de retrouver la ***demi-distance focale*** $OF = ea$ (parfois notée c).

Cas dégénéré. Lorsque, à e fixé, on fait tendre a et b vers 0, l'équation $\left(e^2-1\right)x^2 - y^2 = \left(e^2-1\right)a^2$ ci-dessus devient $y = \pm x\sqrt{e^2-1}$, ce qui représente la réunion de deux droites sécantes (cas limite où l'hyperbole se confond avec ses asymptotes, ce qui revient à dire que le plan π de section passe par le sommet du cône), ce que l'on qualifiera d'***hyperbole dégénérée***.

Équation polaire. Comme pour une ellipse, une hyperbole admet une équation polaire de la forme

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

où le réel $p := e\ d(\Delta, F) = \frac{b^2}{a}$ est appelé le paramètre de $\mathcal{C}$. On obervera les deux asymptotes obtenues lorsque θ tend vers $\pm\operatorname{acs}\left(-\frac{1}{e}\right)$ (qui est bien défini vu que $e > 1$).

Paramétrage. Tout comme les fonction sin et cos, appelées respectivement sinus et cosinus circulaires, paramètrent le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ *via* $\psi \mapsto \binom{\cos\psi}{\sin\psi}$ [dessin], les fonctions ch et sh, appelées respectivement sinus et cosinus hyperboliques, paramètrent la branche d'hyperbole d'équation $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$ *via* $\psi \mapsto \binom{\operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\psi}$ [dessin].

Démonstration. Notons $h : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \psi & \longmapsto & \binom{\operatorname{ch}\psi}{\operatorname{sh}\psi} \end{cases}$. On veut montrer que $\mathcal{B} = \operatorname{Im} h$.

• Montrons que $\operatorname{Im} h \subset \mathcal{B}$. Soit $i \in \operatorname{Im} h$. Il s'écrit $i = h(\psi)$ pour un réel ψ. Pour montrer que le point $h(\psi)$ est sur la branche $\mathcal{B}$, il suffit de vérifier que ses coordonnées $(\operatorname{ch}\psi, \operatorname{sh}\psi)$ vérifient l'équation de $\mathcal{B}$ donnée, ce qui s'écrit $\begin{cases} (\operatorname{ch}\psi)^2 - (\operatorname{sh}\psi)^2 = 1 \\ \operatorname{ch}\psi > 0 \end{cases}$ et est bien vrai.

• Montrons que $\mathcal{B} \subset \operatorname{Im} h$. Soit B un point de $\mathcal{B}$. Ses coordonnées (x, y) vérifient donc l'équation $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$. Posons $a := \operatorname{ash} y$. Alors $x^2 = 1 + y^2 =$

[9] *équi* $\leftrightarrow$ même, *latère* $\leftrightarrow$ côté ; donc *équitatère* signifie l'égalité des côtés $a = b$

$1 + \operatorname{sh}^2 a = \operatorname{ch}^2 a$, d'où $x = \pm \operatorname{ch} a$; puisque $x > 0$, on peut conclure $x = + \operatorname{ch} a$. Finalement, $B = \binom{\operatorname{ch} a}{\operatorname{sh} a} = h(a) \in \operatorname{Im} h$, *c. q. f. d.*.

À RETENIR (dans cette démonstration). Pour montrer une égalité ensembliste, on peut procéder par ***double inclusion***.

Exercice (interprétation géométrique du paramètre ψ). [dessin] *On considère le paramétrage h ci-dessus et ψ un réel. Montrer que l'aire comprise entre le segment $[Oh(0)]$, l'arc de courbe $\overset{\frown}{h(0)\,h(\psi)}$ et les asymptotes ? ? ? vaut $\frac{1}{2}p\psi^2$.*

2.3 Résumé

2.3.1 Coniques ususelles

L'angle α de notre cône vérifie $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et le plan π le sectionnant ne passe pas par son sommet.

représentation 3D	[dessin]	[dessin]	[dessin]
nom de la conique	ellipse (ou hypobole)	parabole	hyperbol
excentricité $e = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$	$0 \leq e < 1$ $(\alpha < \alpha_0)$	$e = 1$ $(\alpha = \alpha_0)$	$e > 1$ $(\alpha > \alpha_0$
équation cartésienne	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ (où $a > b > 0$)	$y^2 = 2px$ ou $\frac{x}{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{p}\right)^2$ (où $p > 0$)	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$ (où $a > 0$ et
paramétrage	$\psi \mapsto \binom{a\cos\psi}{b\sin\psi}$	$t \mapsto p\binom{\frac{1}{2}t^2}{t}$	$\psi \mapsto \Big(\begin{smallmatrix} a\operatorname{ch} \\ b\operatorname{sh}\end{smallmatrix}$
équation cartésienne de la tangente en $\binom{x_0}{y_0}$	$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$	$y_0 y = p(x_0 + x)$	$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2}$
représentation plane	[dessin] $p = \frac{b^2}{a}$ $b = a\sqrt{1-e^2}$ $e = 0 \iff a = b \iff p = a$ $\iff$ l'ellipse est un cercle	[dessin] $p = d(F, \Delta)$ (ellipse dont on a envoyé un foyer à l'infini)	[dessin] $p = \frac{b^2}{a}$ $b = a$ demi-angle en asymptotes :
caractérisation bifocale	$FC + F'C = 2a$	$\emptyset$	$\lvert F'C - FC\rvert$
caractérisation par foyers et directrices	(si $\mathcal{C}$ n'est pas un cercle) $C \in \mathcal{C} \iff FC = e\ d(\Delta, C)$		
équation polaire	$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$ où $p = \begin{cases} e\ d(F,\Delta) & \text{(si } \mathcal{C} \text{ n'est pas un cercle)} \\ \frac{b^2}{a} & \text{(si } \mathcal{C} \text{ n'est pas une parabole)} \end{cases}$		

2.3.2 Coniques dégénérées

$\mathcal{C}$	point	vide	droite	réunion de deux droites parallèles	réunion de deux droites sécantes	
type	ellipse	ellipse parabole	parabole	parabole	hyperbole	
équation cartésienne	$x^2 + y^2 = 0$	$x^2 + y^2 = -1$ $y^2 = -1$	$y^2 = 0$	$y^2 = 1$	$y^2 - (\lambda x)^2 = 0$	0
représentation plane	[dessin]	[dessin]	[dessin]	[dessin]	[dessin]	[c
représentation spatiale	[cône]	[cône plat] ou [cylindre]	[cône] ou [cylindre]	[cylindre]	[cône]	[cô

[cône] : côné usuel traversé par π en son sommet
[cylindre] : cylindre d'axe parallèle à π
[cône plat] : cône dégénéré en plan

2.4 Pourquoi parler de *foyer(s)* ?

[dessin] *Des rayons issus d'un foyer d'une ellipse se réfléchissent sur l'ellipse en direction de l'autre foyer.* En d'autres termes, la tangente en un point $C \in \mathcal{C}$ est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FCF'}$, ou encore la normale en un point $C \in \mathcal{C}$ bissecte l'angle $\widehat{FCF'}$.

Deux applications sont :

1. l'espionnage dans les stations de métro à Paris des conversations sur l'autre quai ;
2. l'audition dans certains théâtres grecs.

Lorsque l'on envoit le foyer F' à l'infini, on obtient une propriété analogue pour les paraboles [dessin] : *des rayons parallèles à l'axe de la parabole se réfléchissent sur cette dernière en direction de son foyer.* En d'autres termes, une source lumineuse située au foyer d'une parabole enverra (après réflexion sur cette dernière) un faisceau de rayons parallèles dans la direction de l'axe de la parabole (propriété utilisée pour les phares de voiture).

De même pour les hyperboles [dessin], ce qui permet de focaliser des rayons vers un *autre* foyer (principe utilisé dans les télescopes.)

3 Polynômes quadratiques à deux indéterminées

Les couples de réels annulant un polynôme de degré 1 forment généralement une droite (à l'instar des zéros de $Y-2X-1$). Lorsque l'on incrémente le degré, on obtient généralement une conique (à l'instar des zéros de X^2+Y^2-4 (un cercle) ou de $XY-1$ (une hyperbole)). Cette section va préciser ce fait qui explique pourquoi, d'un point de vu algébrique, les coniques sont les courbes les plus "simples" après les droites.

Toute cette partie a pour cadre un plan noté π.

3.1 Rappels (bases, repères, coordonnées)

Définitions (base, repère, axes).
*Une **base** de π est un couple de vecteur de π non colinéaires.*

*Un **repère** de π est un couple $(O,\mathcal{B})$ où O est un point (de π) et où $\mathcal{B}$ est une base (de π), l'**origine** d'un tel repère est le point O, les **axes** d'un tel repère sont les deux droites passant par O et dirigées par les vecteurs de $\mathcal{B}$. Si l'on explicite $\mathcal{B}=(i,j)$, alors l'**axe des abscisses** est $O+\mathbf{R}i$ et l'**axe des ordonnées** est $O+\mathbf{R}j$.*

*Un repère $(O,\mathcal{B})$ est dit resp. **orthogonal**, resp. **orthonormé**, resp. **direct**, si sa base associée $\mathcal{B}$ l'est. Dans un repère orthonormé de base (i,j), la **première bissectrice** est la droite $O+\mathbf{R}(i+j)$.*

Propriété / définition (coordonnées d'un vecteur dans une base).
Soit $\mathcal{B}=\binom{i}{j}$ une base de π. Tout vecteur de π s'écrit d'une unique manière comme combinaison linéaire de i et j :

$$\forall u\in\pi,\ \exists!\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^2,\ u=\lambda i+\mu j.$$

*Deux tels scalaires (λ et μ) sont appelés resp. l'**abscisse** et l'**ordonnée** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$ (et sont également appelés sans distinction les **coordonnées** du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$).*

★ Il faut préciser *toute la base*, pas seulement le vecteur de base selon lequel on lit la coordonnée : [dessin] le vecteur $k=i+j$ a pour coordonnées $\begin{cases}(1,1) \text{ dans la base } (i,j)\\ (0,1) \text{ dans la base } (i,k)\end{cases}$, donc n'a pas la même abscisse selon la base $(i,?)$ choisie.

Définition (coordonnées d'un point dans un repère).
Soit $(O,\mathcal{B})$ un repère (de π). Les coordonnées (resp. abscisse, ordonnée) d'un point $P\in\pi$ sont celles du vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base $\mathcal{B}$.

3.2 Rotation des axes

Question. Que deviennent les coordonnée d'un point après *rotation* des axes ? Il est ici question d'angles, donc on ne regarde que le cas de repère *orthonormés*.

Proposition. *Considérons un repère orthonormé d'origine O et de base $\binom{i}{j}$ notée $\mathcal{B}$. On fixe un réel θ. On note $\mathcal{B}'$ la base orthonormée $\binom{r(i)}{r(j)}$ où $r := \operatorname{rot}_O^\theta$.*

Si P est un point dont on note resp. $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ les coordonnées dans le repères respectifs $(O,\mathcal{B})$ et $(O,\mathcal{B}')$, on a alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \text{où } R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\text{i. e. } \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}.$$

Remarque. La matrice R_θ est appelée matrice de rotation (d'angle θ), son déterminant vaut $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Remarque. La relation ci-dessus peut s'inverser et s'écrire $\binom{x'}{y'} = R_{-\theta}\binom{x}{y}$.

Démonstration. Notons $\binom{u}{v} := \binom{r(i)}{r(j)}$. Puisque r est une isométrie, on a $\|u\| = \|r(i)\| = \|i\| = 1$ et de même $\|v\| = 1$; puisque r est une transformation directe, on a $\widehat{u,v} = \widehat{r(i), r(j)} = \widehat{i,j} = \frac{\pi}{2}$. Ces deux conditions montrent bien que la base $\mathcal{B}'$ est orthonormée.

Notons $\ell := OP$ et $\alpha := \widehat{u,\overrightarrow{OP}}$. Alors $\widehat{i,\overrightarrow{OP}} = \widehat{i,u} + \widehat{u,\overrightarrow{OP}} = \theta + \alpha$, d'où l'abscisse de P dans le repère $(O,\mathcal{B})$:

$$x = \overrightarrow{OP}\cdot i = \left\|\overrightarrow{OP}\right\|\cdot\|i\|\cdot\cos\left(i,\overrightarrow{OP}\right) = \ell\cos(\alpha+\theta) = \underbrace{\ell\cos\alpha}_{=\overrightarrow{OP}\cdot u = x'}\cos\theta - \underbrace{\ell\sin\alpha}_{=\overrightarrow{OP}\cdot v = y'}\sin\theta = x'\cos\theta - y'\sin\theta.$$

De même, puisque $\widehat{j,\overrightarrow{OP}} = \widehat{j,v} + \widehat{v,u} + \widehat{u,\overrightarrow{OP}} = \widehat{i,u} - \widehat{u,v} + \alpha = \theta + \alpha - \frac{\pi}{2}$, on obtient l'ordonnée de M dans le repère $(O,\mathcal{B})$ par

$$y = \overrightarrow{OP}\cdot j = OP\cdot 1\cdot\cos\left(\theta+\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \ell\sin(\alpha+\theta) = \ell\sin\alpha\cos\theta + \ell\cos\alpha\sin\theta = y'\cos\theta + x'\cos\theta. \quad \square$$

Exemple 1. Considérons dans un repère orthonormé le lieu d'équation cartésienne $xy = 1$. En notant $\binom{x'}{y'}$ les coordonnées après rotation des axes d'un angle $\frac{\pi}{4}$, on obtient $\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} - y'\sin\frac{\pi}{4} = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$, d'où les équivalences $xy = 1 \iff \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\frac{x'+y'}{\sqrt{2}} = 1 \iff \left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$. Le lieu considéré est donc une hyperbole équilatère d'asymptote les axes du repère initial.

Exemple 2. Considérons dans un repère orthonormé le lieu d'équation cartésienne $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 1$. Après rotation des axes d'un angle $-\frac{\pi}{6}$, on obtient $\begin{cases} x = x'\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) - y'\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{x'\sqrt{3}+y'}{2} \\ y = x'\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + y'\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{y'\sqrt{3}-x'}{2} \end{cases}$, d'où les équivalences

$$\begin{aligned}
5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 1 \quad &\iff 5\left(\frac{x'\sqrt{3}+y'}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{y'\sqrt{3}-x'}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{x'\sqrt{3}+y'}{2}\right)\left(\frac{y'\sqrt{3}-x'}{2}\right) = 1 \\
&\overset{\times 4}{\iff} 5\left(3x'^2 + \underline{2\sqrt{3}x'y'} + y'^2\right) + 7\left(3y'^2 \underline{-2\sqrt{3}x'y'} + x'^2\right) \\
&\qquad +2\sqrt{3}\left(\underline{3x'y'} - \sqrt{3}x'^2 + \sqrt{3}y'^2 \underline{-x'y'}\right) = 4 \\
&\iff 16x'^2 + 32y'^2 = 4 \\
&\iff \left(\frac{x'}{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

On trouve une ellipse de grand axe $2a := 1$ et petit axe $2b := \frac{1}{\sqrt{2}}$ (et donc d'excentricité $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Question. Peut-on toujours, afin de tomber sur l'équation d'une conique connue, trouver un angle qui fait disparaître auto-magiquement le nouveau terme croisé (celui en $x'y'$) ?

Fixons neuf réels $a, b, c, \theta, x, y, x', y'$ soumis à la condition $\binom{x}{y} = R_\theta\binom{x'}{y'}$. En abrégeant $\binom{\gamma}{\sigma} := \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$, il vient

$$\begin{aligned}
ax^2 + bxy + cy^2 &= a\left(\gamma x' - \sigma y'\right)^2 + b\left(\gamma x' - \sigma y'\right)\left(\sigma x' + \gamma y'\right) + c\left(\sigma x' + \gamma y'\right)^2 \\
&= x'^2\left(a\gamma^2 + b\gamma\sigma + c\sigma^2\right) + x'y'\left(-2a\gamma\sigma + b\gamma^2 - b\sigma^2 + 2c\sigma\gamma\right) + y'^2\left(a\sigma^2 - b\gamma\sigma + c\gamma^2\right).
\end{aligned}$$

Puisque $\begin{cases} \gamma^2 - \sigma^2 = \cos 2\theta \\ 2\gamma\sigma = \sin 2\theta \end{cases}$, la nullité du coefficient en $x'y'$ équivaut à $b\cos 2\theta = (a-c)\sin 2\theta$. On peut toujours supposer $b \neq 0$ (sinon on ne chercherait pas à faire tourner les axes), de sorte que cette dernière égalité équivaut à $\begin{cases} \cot 2\theta = \frac{a-c}{b} \\ \sin 2\theta \neq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \sin 2\theta = 0 \\ b\cos 2\theta = 0 \end{cases}$, *i. e.* à $\begin{cases} \theta = \frac{1}{2}\operatorname{act}\frac{a-c}{b} \\ \theta \neq 0 \ \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$ (la seconde conjonction est absurde car implique $b^2 = b^2\left[\cos^2 + \sin^2\right](2\theta) = (b\cos 2\theta)^2 + b^2(\sin 2\theta)^2 = 0$). Puisque $\operatorname{Im}\operatorname{act} =]0, \pi[$, la condition $\theta \neq 0 \ \left[\frac{\pi}{2}\right]$ est superflue. On retiendra donc que

le terme croisé disparaît après rotation des axes d'un angle $\dfrac{1}{2}\operatorname{act}\dfrac{a-c}{b}$.

Exemple 1. Considérons l'équation cartésienne $xy = 1$. On y lit $a = c$ (avec les notations ci-dessus), donc on tourne les axes d'un angle $\frac{1}{2}\operatorname{act} 0 = \frac{\pi}{4}$ (déjà fait).

Exemple 2. Considérons l'équation cartésienne $5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 1$. On y lit $\frac{a-c}{b} = \frac{5-7}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, donc on tourne les axes d'un angle $\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (déjà fait).

Remarque. Connaître θ est nécessaire pour représenter la conique (il donne en effet les *directions* de ses axes) mais, pour obtenir une équation cartésienne sans terme croisé, seuls $\cos\theta$ et $\sin\theta$ suffisent. On se souviendra alors que $\forall \alpha \in [0, \pi]$, $\begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \end{cases}$ et que $\cos\operatorname{act}\frac{a-c}{b} = \frac{|a-c|}{\sqrt{|a-c|^2+b^2}}$ [dessin].

Exemple. Partons de l'équation $8x^2 + 4xy + 5y^2 = 18$. L'angle cherché vaut $\theta := \frac{1}{2}\operatorname{act}\frac{8-5}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{act}\frac{3}{4}$; sachant que $\cos 2\theta = \cos\operatorname{act}\frac{3}{4} = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{3}{5}$, on en déduit $\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Remarque. importante On n'avait pas besoin de calculer les nouveaux coefficients A en x'^2 et C en y'^2 : seul celui B en $x'y'$ nous importait. Mais profitons de ce calcul déjà effectué pour observer une chose : en abrègeant $\binom{\Gamma}{\Sigma} := \binom{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$, les relations $\gamma^2 = \frac{1+\Gamma}{2}$, $\sigma^2 = \frac{1-\Gamma}{2}$ et $\gamma\sigma = \frac{\Sigma}{2}$ permettent de travailler la quantité

$$\begin{aligned}
B^2 - 4AC &= (b\Gamma + (c-a)\Sigma)^2 - 4\left(a\frac{1+\Gamma}{2} + b\frac{\Sigma}{2} + c\frac{1-\Gamma}{2}\right)\left(a\frac{1-\Gamma}{2} - b\frac{\Sigma}{2} + c\frac{1+\Gamma}{2}\right) \\
&= (b\Gamma + (c-a)\Sigma)^2 - [(a+c) + ((a-c)\Gamma + b\Sigma)][(a+c) - ((a-c)\Gamma + b\Sigma)] \\
&= b^2\Gamma^2 \underline{+2b(c-a)\Gamma\Sigma} + (c-a)^2\Sigma^2 \qquad - (a+c)^2 + (a-c)^2\Gamma^2 \underline{+2b(a-c)\Sigma\Gamma} + b^2\Sigma^2 \\
&= b^2 + (a-c)^2 - (a+c)^2 \\
&= b^2 - 4ac.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

*le **discriminant** $\Delta := b^2 - 4ac$ est inchangé par rotation des axes.*

Cette observation va permettre de discriminer la conique considérée sans effectuer la rotation des axes, simplement en calculant un discriminant. Le théorème suivant va préciser cela.

3.3 Classification des lieux de zéros de polynômes quadratiques

Théorème. *Considérons dans un repère orthonormé un lieu $\mathcal{L}$ d'équation cartésienne $ax^2+bxy+y^2+dx+ey+f=0$ où a,b,c,d,e,f sont six réels tels que a,b,c ne soient pas tous nuls*[10]. *On pose $\Delta := b^2-4ac$.*

• *Si $\Delta<0$, alors $\mathcal{L}$ est une ellipse (éventuellement dégénérée : point*[11] *ou vide).*

• *Si $\Delta=0$, alors $\mathcal{L}$ est une parabole (éventuellement dégénérée : réunion de deux droites parallèles ou vide).*

• *Si $\Delta>0$, alors $\mathcal{L}$ est une hyperbole (éventuellement dégénérée : réunion de deux droites sécantes).*

MNÉMO 1 La position relative du discriminant Δ par rapport à 0 est la même que celle de l'excentricité e par rapport à 1, ainsi que celle de l'angle α par rapport à α_0) :

conique	ellipse (ou hypobole)	parabole	hyperbole
excentricité	$e<1$	$e=1$	$e>1$
angle	$\alpha<\alpha_0$	$\alpha=\alpha_0$	$\alpha>\alpha_0$
discriminant	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$

MNÉMO 2 Lorsque $\Delta>0$, le polynôme $aX^2+bXY+Y^2+dX+eY+f$ a toujours une racine (parallèle : un trinôme de discriminant >0 a toujours une racine), ce qui est dire $\mathcal{L}\neq\emptyset$; or l'hyperbole est la seule conique qui n'est jamais vide (même dégénérée).

Exemples typiques à connaître.

• $\Delta<0$: $\quad x^2+y^2=\begin{cases}1\longrightarrow \text{ellipse}\\ 0\longrightarrow \text{point}\\ -1\longrightarrow \text{vide}\end{cases}$

• $\Delta=0$: $\quad y^2=\begin{cases}x\longrightarrow \text{parabole}\\ 1\longrightarrow \text{réunion de deux droites parallèles}\\ 0\longrightarrow \text{droite (double)}\\ -1\longrightarrow \text{vide}\end{cases}$

• $\Delta>0$: $\quad x^2-y^2=\begin{cases}1\longrightarrow \text{hyperbole}\\ 0\longrightarrow \text{réunion de deux droites sécantes}\end{cases}$

La démonstration qui suit montre que les exemples précédents sont *exhaustifs* quitte à se placer dans un bon repère orthogonal obtenu à partir du repère de départ par : rotation des axes, translation des axes, affinité par rapport à un axe (parallèlement à l'autre), réflexion par rapport à la première bissectrice.

Démonstration. (FACULTATIVE)

[10] si $a=b=c=0$, alors l'équation donnée devient une équation *affine* qui code ou bien une droite, ou bien le lieu vide, ou bien tout le plan

[11] en toute rigueur, $\mathcal{L}$ est le singleton contenant ce point

Considérons tout d'abord le cas où le coefficient b en xy est *nul*. Le discriminant devient alors $\Delta = -4ac$.

1. Supposons $\Delta < 0$. Alors a et c sont non nuls et de même signe ; quite à multiplier l'équation par -1, on peut supposer $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$. En complétant les carrés, l'équation devient $a\left(\underbrace{x + \dfrac{d}{2a}}_{=:x'}\right)^2 + c\left(\underbrace{y + \dfrac{e}{2b}}_{=:y'}\right)^2 = g$ où g est un réel où n'apparaît ni x' ni y'.

   (a) Si $g < 0$, alors l'équation devient $\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{-g}{a}}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{\frac{-g}{c}}}\right)^2 = -1$ et n'a pas de solution, donc $\mathcal{L}$ est vide.

   (b) Si $g = 0$, alors l'équation équivaut à $\binom{x}{y} = \binom{-\frac{d}{2a}}{-\frac{e}{2c}}$ et $\mathcal{L}$ est un point.

   (c) Si $g > 0$, alors l'équation devient $\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{g}{a}}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{\frac{g}{c}}}\right)^2 = 1$ et $\mathcal{L}$ est une ellipse (ses demis-axes sont $\sqrt{\frac{g}{a}}$ et $\sqrt{\frac{g}{c}}$ et son excentricité vérifie $1 - e^2 = \left(\frac{a}{c} \text{ ou } \frac{c}{a}\right)$).

2. Supposons $\Delta > 0$. Comme ci-dessus, on se ramène à une équation de la forme $ax'^2 + cy'^2 = g$ où cette fois a et c sont non nuls et *de signes opposés*.

   (a) Si $g = 0$, alors l'équation devient $y'^2 = -\frac{a}{c}x'^2$, *i. e.* $y' = \pm\sqrt{-\frac{a}{c}}x'$, donc $\mathcal{L}$ est la réunion de deux droites sécantes.

   (b) Si $g \neq 0$, quitte à multiplier par -1, on peut supposer $\frac{a}{g} > 0 > \frac{c}{g}$, de sorte que l'équation devient $\left(\frac{x'}{\sqrt{\frac{g}{a}}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{-\frac{g}{c}}}\right)^2 = \pm 1$ et $\mathcal{L}$ est une hyperbole (dont l'excentricité vérifie $e^2 - 1 = \left(-\frac{a}{c} \text{ ou } -\frac{c}{a}\right)$).

3. Supposons $\Delta = 0$. Alors a ou c est nul et ils ne peuvent l'être à la fois car d'une part a, b, c ne sont pas tous nuls par hypothèse et d'autre part on s'est placé dans le cas $b = 0$. Quitte à échanger les axes, on peut supposer $a = 0 \neq c$ et l'équation se réécrit alors $cy'^2 + dx = h$ pour un certain réel h $(:= \frac{e^2}{4b^2} - f)$.

   (a) Si $d = 0$, alors l'équation devient $y'^2 = \frac{h}{c}$, laquelle code ou bien le vide (si $\frac{h}{c} < 0$), ou bien la réunion de deux droites parallèles (éventuellement confondues si $h = 0$).

   (b) Si $d \neq 0$, on réduit alors l'équation en $cy'^2 + dx' = 0$ (avec $x' = x - \frac{h}{d}$), ce qui équivaut à $x' = -\frac{c}{d}y'^2$, équation d'une parabole (quitte à échanger x en son opposé).

Revenons au cas général (avec $b \neq 0$). On effectue une rotation des axes d'un angle $\frac{1}{2}\operatorname{act}\frac{a-c}{b}$ afin d'éliminer le terme en xy. L'équation de $\mathcal{L}$ donnée devient alors de la forme $Ax'^2 + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0$ pour certains réels A, C, D, E, F tels que $-4AC = 0^2 - 4AC = b^2 - 4ac = \Delta$ et l'on peut appliquer ce qui précède (la deuxième égalité vient de ce que le discriminant est inchangé par rotation des axes).

Conclusion. *Les coniques d'un plan π peuvent être vues indifféremment comme :*

1. *les parties de π dont les points ont pour coordonnées (cartésiennes dans un repère orthonormé) les zéros d'un polynôme de degré au plus 2 ;*
2. *les parties de π dont une équation (cartésienne en repère orthonormé) est $P(x, y)$ où P est un polynôme de degré au plus 2.*

Démonstration.
$\Longrightarrow$ Le résumé de la partie précédente donne des équations qui conviennent.
$\Longleftarrow$ Le théorème précédent traite le cas où P est de degré 2 exactement. Dans le cas contraire, P est affine et ses zéros codent ou bien une droite (parabole dégénérée), ou bien le vide (parabole dégénérée), ou bien tout le plan (ce qui est aussi une conique dégénérée).

Remarque. On a inclus le cylindre dans la définition d'un cône *uniquement* pour que la réunion de deux droites parallèles (donnée par le lieu des zéros du polynôme $Y^2 - 1$) soit aussi une conique, afin de préserver le théorème ci-dessus.

4 Exercices

1. **(équations)**
   (a) *Montrer qu'une conique admet pour équation cartésienne $y^2 = 2px + \left(e^2 - 1\right) x^2$.*
   (b) *Donner (avec preuve) une équation cartésienne pour chacune des branches d'une hyperbole.*
   (c) *Retrouver l'équation cartésienne d'une ellipse à partir de la caractérisation bifocale.*
2. **(coniques dégénérées)**
   (a) *Montrer comment faire "dégénérer" une parabole pour obtenir la réunion de deux droites parallèles ou une droite.*
   (b) *Montrer comment faire "dégénérer" une ellipse pour obtenir la réunion de deux droites parallèles ou un segment.*
   (fixer a et faire tendre e (*i. e.* b) vers 0 donne l'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$)

(c) *Montrer comment faire "dégénérer" une hyperbole pour obtenir la réunion de deux droites parallèles, la réunion de deux droites sécantes ou une droite privée d'un intervalle ouvert borné.*

(fixer a et faire tendre e (*i. e.* b) vers 0 donne l'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1$)

3. **(du cercle à l'ellipse)** *Un point $P(t)$ tourne à vitesse angulaire constante autour d'un centre $C(t)$ oscillant sur une droite d'ordonnée constante de sorte que les abscisses de $P(t)$ et $C(t)$ soient maximales pour les mêmes t. Montrer que l'image de $t \mapsto P(t)$ est une ellipse dont on précisera l'excentricité.*

4. **(interprétation géométrique du paramètre ψ par sinus et cosinus)**

(a) O*n considère le paramétrage* $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \psi & \longmapsto & \binom{a \operatorname{ch} \psi}{a \operatorname{sh} \psi} \end{array} \right.$ *. Montrer, à $\psi \in \mathbf{R}$ fixé, que l'aire délimitée par le segment $[Oh(0)]$, l'arc de courbe $\overset{\frown}{h(0)h(\psi)}$ et les asymptotes de* $\operatorname{Im} h$ *vaut* $\frac{1}{2}a\psi^2$.

(b) *Montrer que la parabole d'équation cartésienne $y^2 = \lambda x$ est paramétrée par* $\psi \overset{P}{\mapsto} \lambda \binom{\sqrt[3]{\frac{3\psi}{4}}^2}{\sqrt[3]{\frac{3\psi}{4}}}$. *Montrer qu'à ψ fixé l'aire délimitée par la parabole et le segment $P(0)P(\psi)$ vaut $\frac{1}{2}p\psi^2$ où p est le paramètre de la parabole.*

Notons $\binom{u}{v}$ un point de la parabole. L'aire citée vaut

$$\int_0^u \sqrt{\lambda x}dx - \frac{1}{2}uv = \sqrt{\lambda}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}u\sqrt{\lambda u} = \sqrt{\lambda}\sqrt{u}^3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\lambda}\sqrt{u}^3}{6}$$

que l'on veut égaler à $\frac{1}{2}p^2\psi = \frac{\lambda^2\psi}{8}$, ce qui équivaut à $\psi = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{u}{\lambda}}^3$ soit à $u = \lambda\sqrt[3]{\frac{3\psi}{4}}^2$

On pose donc $\operatorname{cp}_\lambda(\psi) = \lambda\sqrt[3]{\frac{3\psi}{4}}^2$ et $\operatorname{sp}_\lambda(\psi) = \sqrt{\lambda \operatorname{cp}_\lambda(\psi)} = \lambda\sqrt[3]{\frac{3\psi}{4}}$. Il en résulte $\operatorname{tp}_\lambda(\psi) = \frac{\operatorname{sp}_\lambda(\psi)}{\operatorname{cp}_\lambda(\psi)} = \sqrt[3]{\frac{4}{3\psi}}$, d'où $\operatorname{atp}(t) = \frac{4}{3t^3}$. Alors $\operatorname{cp}_\lambda(2\operatorname{atp} t) = \lambda\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2\frac{4}{3t^3}}{4}}^2 = \lambda\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{t}\right)^2$ et $\operatorname{sp}_\lambda(2\operatorname{atp} t) = \sqrt{\lambda \operatorname{cp}_\lambda(2\operatorname{atp} t)} = \lambda\frac{\sqrt[3]{2}}{t}$. On en déduit le paramétrage $\begin{array}{ccccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R}^* & \longrightarrow & P \\ \psi & \longmapsto & t := \operatorname{tp}\left(\frac{\psi}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt[3]{3\psi}} & \longmapsto & \binom{\operatorname{cp}_\lambda(\psi)}{\operatorname{sp}_\lambda(\psi)} = \lambda\binom{\sqrt[3]{\frac{3\psi}{4}}^2}{\sqrt[3]{\frac{3\psi}{4}}} = \lambda\binom{\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{t}\right)^2}{\frac{\sqrt[3]{2}}{t}} \end{array}$

(pour l'aire, on aurait pu prendre un autre point de l'axe que le sommet mais les calculs sont crades −> racines cubiques emboités vraiment moches)