Coniques & quadriques (version quasi-achevée)

Marc Sage (pour Optimal)

<2008

Table des matières

1 Généralités

Toutes les définitions sont floues pour une raison simple : il n'y a pas unicité du couple $(\mathcal{D}, F)$ directice-foyer définissant une conique. Tu ne peux donc pas dire "soit $\mathcal{C}$ une conique" puis définir un truc à partir de son foyer qui n'est pas forcément unique (ou alors tu montres que ta définition est indépendante du foyer choisi)

Je propose le remaniement suivant du I.

1.1 Définition d'une conique par directrice et foyer

Soit e un réel strictement positif. On appelle conique d'excentricité e toute courbe $\mathcal{C}$ de la forme $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F) := \{M \in \mathcal{P} \ ; \ FM = e\, d(M, \mathcal{D})\}$ où $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{P}$ et F un point hors de $\mathcal{D}$.

La conique $\mathcal{C}$ est appelée :

- ellipse si $e < 1$;
- parabole si $e = 1$;
- hyperbole si $e > 1$.

Si $\mathcal{C}$ est une parabole, il y a unicité du couple $(\mathcal{D}, F)$ tel que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$: la droite $\mathcal{D}$ et le point F sont respectivment appelés la directrice et le foyer de la parabole.

Si $\mathcal{C}$ est une ellipse ou une hyperbole, il y a un unique autre couple $(\mathcal{D}', F')$ tel que $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{D}', F')$: les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ et les points F et F' sont respectivement appelés les directrices et les foyers de l'ellipse/hyperbole.

1.2 Axe focal d'une conique

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{D}, F)$ une conique. La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en F ne dépend pas du couple $(\mathcal{D}, F)$ choisi : c'est l'axe focal de $\mathcal{C}$.

Propriété : l'axe focal d'une conique $\mathcal{C}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$

Remarque : si $\mathcal{C}$ possède deux foyers F et F', l'axe focal de $\mathcal{C}$ est donné par la droite (FF').

1.3 Équation polaire d'une conique

ok

Pour l'ordre qui suit, je préfère mettre ellipses-paraboles-hyperboles, pour suivre l'ordre de l'excentricité ($<$, $=$ ou > 1)

1.4 Ellipses

Commencer par "Soit $e < 1$" (ne pas le préciser entre parenthèses ensuite)

Dans l'équation réduite, préciser $a \neq b$ (sinon on a un cercle, conique d'excentricité nulle, cas que l'on a exlcu puisque le cercle n'a pas de définition avec directrice (sauf à considérer la droite à l'infini :p))

Pour la réciproque, il peut être bien de préciser l'excencitité. Je propose :

Réciproquement, une courbe [bla bla où $a > b > 0$] est une ellipse $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F) = \mathcal{C}(\mathcal{D}', F')$ d'excentricité $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ dont les directrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour équations respectives $x = \frac{a}{e}$ et $x = -\frac{a}{e}$ et dont les foyers F et F' ont pour coordonnées respectives $(ea, 0)$ et $(-ea, 0)$.

(il y avait un faute de signe dans l'abscisse du foyer)

L'éude bifocale est floue pour les raisons précédemment exposées. Le point précédent précise un peu. Je rajouterai :

■ **Définition bifocale**. Soit $a > 0$ et $0 < e < 1$ deux réels et F et F' deux points de coordonées $(\pm ea, 0)$ dans un repère orthonormé. Alors l'ensemble $\{M \in \mathcal{P} \ ; \ FM + F'M = 2a\}$ est une ellipse d'excentricité e, de foyers F et F', d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $b > 0$ est déterminé par la relation $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

2 Paraboles

Erreur dans la défintion du sommet : si le foyer est à l'origine et si la directrice a pour équation $x = -p$, l'abscisse du sommet est $-\frac{p}{2}$, pas $+\frac{p}{2}$.

L'erreuer se répercute lors de la translation du repère : le vecteur de translation a pour coordonnées $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.

La réciproque est cependant correcte

3 Hyperboles

Commencer par "Soit $e > 1$"

Ensuite, je propose comme pour les ellipses :

Réciproquement, une courbe [bla bla où $a, b > 0$] est une hyperbole $\mathcal{C}(\mathcal{D}, F) = \mathcal{C}(\mathcal{D}', F')$ d'excentricité $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ dont les directrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour équations respectives $x = \frac{a}{e}$ et $x = -\frac{a}{e}$ et dont les foyers F et F' ont pour coordnonées respectives $(ea, 0)$ et $(-ea, 0)$.

Supprimer du coup le paragraphes sur les foyers (qui est de toute façon floue pour les mêmes raisons que pour le I)

Comme pour les ellipses, je parlerais bien de bifocalité. Je propose donc
■ **Définition bifocale**. Soit a et $e > 1$ deux réels strictement positifs et F et F' deux points de coordonées $(\pm ea, 0)$. dans un repère orthonormé. Alors l'ensemble $\{M \in \mathcal{P}\ ;\ |FM - F'M| = 2a\}$ est une hyperbole d'excentricité e, de foyers F et F', d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $b > 0$ est déterminé par la relation $e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Je rajouterais aussi des info sur les asymptotes ;
■ **Asympotes**. L'hyperbole d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ dans un repère orthonormé admet deux asymptotes d'équation $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$.

4 Étude des zéros d'un polynôme de degré 2

Je change ce titre pour permettre d'introduire les quadriques

4.1 Cas de deux variables : les coniques

Il faut être cohérent dans les notations. Si tu prends $P = aX^2 + 2bXY + cY^2 + dX + eY + f$, il faut prendre $\alpha X^2 + \gamma Y^2 + \delta X + \varepsilon Y + \eta$ pour l'équation réduite (ici b devient $\beta = 0$). L'intérêt est que le discriminant est inchangé (oui oui, tout le discriminant, pas seulement son signe comme le dit le poly !) par changement de repère orthornormé et se calcul donc par $b^2 - 4ac = \beta^2 - 4\alpha\gamma = -4\alpha\gamma$ (erreur dans le poly, il faut prendre l'opposé) : on retrouve le discrimnaint connu des trinome de second degré, et de plus la position de Δ par rapport à 0 est la même que celle de e par rapport à 0 (çad $\begin{array}{l} e < 1 \iff \Delta < 0 \\ e = 1 \iff \Delta = 0 \\ e > 1 \iff \Delta > 0 \end{array}$).

Il manque un cas si $\alpha\beta \neq 0$: celui d'un cercle (bah vi, selon le poly un cercle n'est pas une ellipse, ce qui est une abbération, mais bon, un cercle n'a pas de directrice, sauf à considére une directrice à l'infini...)

Je propose donc (la proposition était également très floue dans le poly)

■ **Discriminant.** Soit $P = aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f$ un polynôme réel du second degré à deux variables. Son discriminant est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition : soit (x, y) les coordonées d'un point M dans un repère orthonormé et P un polynôme réel du second degré à deux variables. Notons (x', y') les coordonnées du point M dans un autre repère orthonormé. Alors le polynôme $P(x, y)$ devient un autre polynôme $Q(x', y')$ dont le discriminant est inchangé.

Dans le dernier point, changer les signes ou pas selon la définitoin du discriminant (conseillé)

4.2 Cas de trois variables : les quadriques

Soit P un polynôme de degré 2 en trois variables. On note Γ l'ensemble de l'espace défini par l'équation $P(x, y, z) = 0$ où (x, y, z) sont les coordonnées d'un point dans un certain repère orthonormé de l'espace.

■ **Cylindres.** Γ est appelé cylindre dans les cas où l'équation $P(x, y, z) = 0$ prend l'une des trois formes suivantes (dans un repère orthonormé adapté) :
• cylindre parabolique : $x^2 = 2py$ où $p \neq 0$;
• cylindre elliptique : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a, b > 0$;
• cylindre hyperbolique : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ où $a, b > 0$

■ **Quadriques usuelles.** Γ est une quadrique usuelle si l'on est dans l'un des six cas suivants (les coordonnées étant prises dans un repère orthonormé adapté) :
• ellipsoïde (de révolution) : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a, b, c > 0$;
• cône elliptique : $z^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$ où $a, b > 0$;
• paraboloïde elliptique : $z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2$où $a, b > 0$;
• paraboloïde hyperbolique : $z = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2$ où $a, b > 0$.
• hyperboloïde (de révolution) à une nappe : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ où $a, b, c > 0$;
• hyperboloïde (de révolution) à deux nappes : $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1$ où $a, b, c > 0$.

■ **Cas général.** Γ est de l'un des cinq types suivants :
• vide
• un singleton
• la réunion de deux plans
• un cylindre
• une quadrique usuelle

■ **Familles génératrices de droites.**
• L'hyperboloïde à une nappe d'équation $\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$ est réunion de la famille de droites d'équation $\begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = \lambda\left(1 - \frac{x}{a}\right) \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{x}{a}\right) \end{cases}$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$.

Il est aussi réunion des droites $\left\{\begin{array}{l}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right)\\\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right)\end{array}\right.$ lorsque μ décrit $\mathbb{R}^*$. Tout point de l'hyperboloïde à une nappe passe par une et une seule droite de la première famille et par une et une seule droite de la seconde famille.

• L'hyperboloïde parabolique d'équation $z=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$ est réunion de la famille de droites d'équation $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\\\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\lambda\end{array}\right.$ lorsque λ décrit $\mathbb{R}^*$. Il est aussi réunion des droites $\left\{\begin{array}{l}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda\\\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{array}\right.$ lorsque μ décrit $\mathbb{R}^*$. Tout point de l'hyperboloïde parabolique passe par une et une seule droite de la première famille et par une et une seule droite de la seconde famille.