Espaces préhilbertiens (version chantier)

Marc SAGE

10 juin 2007

Table des matières

1	Démo CS	3
2	Gram Schmidt	3
3	Orthogonalité	4
4	Auto orthogonaux	4
4.1	O_1	4
4.2	SO_2	5
4.3	Angle orienté	5
4.4	O_2^-	5
5	Gram	6
6	l'espace ambiant R^3	6
6.1	quaternions	7
6.2	SO_3	7
6.3	lacet involutif dans SO_3 et souplesse d'un bras	8
6.4	O_3^-	8
7	O_n	8
8	Orientation	9
9	Espace préhilbertien complexe	9
10	Adjoints	10
11	Axiomatique du produit vectoriel en dim 3	10
12	Axiomatique des produits réels	10
13	Axiomatique quaternions	11

Pourquoi normal veut-il dire (parfois) orthogonal ?

Parce que ce mot vient du latin normalis signifiant équerre. C'est donc le sens premier de ce mot. Le mot « normé » vient de « norme » ayant pris le sens de « canon, modèle ». C'est pourquoi il vaut mieux parler de base orthonormée que de base orthonormale !

produit scalaire : tout se passe dans un plan → intuitivo du lycée.

Norme euclidienne : intérêt est de tout ramener à du linéaire (et non du sous-linéaire qui ne permet pas des égalités) → prendre les carrés de normes (déjà les racines carrés c moche), sinon notre résultat risque de fonctionner pour toute norme

lien norme ps : dans R , on a

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2) \\ &= \frac{1}{4} (|a + b|^2 - |a - b|^2) \end{aligned}$$

Dans un ph, on remplace les $|\cdot|$ par des $\|\cdot\|$.

IL y a plusieurs ps : ps canoniquement associé à une base. On peut le pondérer, ce qui revient à pondérer la base

$\sum a_i b_i$ ps de base canonique

$\sum A^i(0) B^i(0)$ est le ps canonique associé à la base $\left(\frac{X^n}{n!}\right)$ par Taylor.

$\sum A^i(\lambda_i) B^i(\lambda_i)$ est le ps canonique associé à la base $\left(\frac{(X-\lambda_n)^n}{n!}\right)$ par Taylor-généralisé (A REVOIR!!!!!!!)

ce procédé est universel : l'application qui à une base associe le ps associé est surjective (la fibre au-dessus d'un ps sont les bon du ps)

DEM : en rq que **compser un ps par un iso linéaire reste un ps**, on transporte le psc de R^n sur tout Rev de dim finie

Dérivée un ps, c'est comme dériver un produit usuel

notation : tenter comme le produit usuel pour les canoniques, afin de faciliter l'usage de la bilinéarité

Un hilbert pas euclidien n'admet jamais de bon linéaire (cf Perrin)

Mesure d'un angle non orienté : $\widehat{ab} = \widehat{ba} = \arccos \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$. unitaires

Alors $a \perp b \iff \widehat{ab} = \frac{\pi}{2} \iff \|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2$ (Pythagore)

Sur $M_n(R)$, le ps euclidien s'écrit $\text{tr}(A^*B)$ ou autre en échangeant A et B et $*$.

La norme euclidienne est alors d'algèbre :

$$\begin{aligned} \|AB\|_2^2 &= \sum_{i,j} [AB]_{i,j}^2 = \sum_{i,j} \left(\sum_k a_{i,k} b_{k,j} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i,j} \left(\sum_k a_{i,k}^2 \sum_l b_{l,j}^2 \right) = \sum_{i,k} a_{i,k}^2 \sum_{j,l} b_{l,j}^2 \\ &= \|A\|^2 \|B\|^2. \end{aligned}$$

une orthogonalité équivaut à une isométrie : $\|a\| = \|b\| \iff \|a\|^2 - \|b\|^2 = 0 \iff a + b \perp a - b$

1 Démo CS

si a ou b nul, on a l'égalité (donc l'inégalité avec le bon cas d'égalité); sinon on normalise

1. on se place dans le plan Vect $\{a, b\}$, on écrit $b = \lambda a + a_\perp$, d'où

$$1 = \|b\|^2 = \lambda^2 + \|a_\perp\|^2 \Rightarrow \langle a | b \rangle = \lambda \leq 1$$

avec $a_\perp = 0$, ie ssi $b = \lambda a$, CQFD.

2. on développe (faire un dessin sur un cercle : c'est pythagore)

$$0 \leq \|b - (a \cdot b) a\|^2 = 1 - 2(a \cdot b)(b \cdot a) + (a \cdot b)^2 = 1 - (a \cdot b)^2,$$

d'où $|a \cdot b| \leq 1$ avec $a \cdot b = \langle a | b \rangle$.

3. discriminant

4. dans un euclidien, c'est $\sum a_i b_i \leq 1$. Il suffit écrire $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ puis de sommer.

CS s'écrit aussi $\|a\|^2 = \sup_{\|x\|=1} \langle a | x \rangle$.

Ou encore : $\|a + b\| = \|a\| + \|b\|$ ssi a et b positivement colinéaires (comme pour $\mathbb{C}$)

(donner CS réel $ab \leq \|a\| \|b\|$ avec a, b col de même sens, puis CS général $|ab| \leq \|a\| \|b\|$ avec a, b col)

2 Gram Schmidt

(prénom-nom : Erhard Schmidt)

rappel sur formules de projection, avec bon, avec bo (pas de racines!). gaffe en complexes : si a se projette en p sur $\bigoplus \mathbb{C}f_i$, on a égalité des ps $af_i = pf_i$ et $f_i a = f_i p$

Orthogonaliser un vecteur a par rapport à un sev V : on le redresse en projetant a sur $V^\perp$, ie on retire la projection orthogonale sur V .

pb : étant donné (e_n) suite de vecteurs, comment la transformer en une bon ? quite à renormise à la fin, il suffit de savoir orthogonaliser.

On le fait petit à petit en construisant e'_n par récurrence en posant $e'_0 = e_0$ puis e'_{n+1} l'orthogonalisé de e_{n+1} par rapport à Vect $(e_1, \dots, e_n)$. DESSIN!! Par construction les e'_n sont orthogonaux, vérifient Vect $(e'_1, \dots, e'_n) =$ Vect $(e_1, \dots, e_n)$ (matrice de passage triangulaire), et $\langle e_n, e'_n \rangle = \|e'_n\|^2 \geq 0$.

Les e'_n sont libres ssi ils ne contiennent pas 0; or $e'_n = 0$ ssi $e_n \in E_{n-1}$, donc e' libre ssi e libre. Dans ce cas, on calcule e' par la formule

$$e'_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{i \leq n} \frac{\langle e_{n+1}, e'_i \rangle}{\|e'_i\|^2} e'_i$$

Le procédé ci-dessus est le seul à réunir ces trois conditions. En effet, l'analyse donne la formule ci-dessus.

(détail des trois conditions : pour être orthogonal, on doit orthogonaliser e_{n+1} par rapport à E_n puis éventuellement rajouter un truc de $E_n^\perp$, mais la condition $E'_n = E_n$ nous dit de rien rajouter; le ps fixe le sens des vecteurs à la fin)

Pour les calculs, on impose les normes et le sens qu'on veut à la fin. (ne pas normaliser tout de suite sinon racines carées!)

exple : $d(\sin, R_2[X])$

3 Orthogonalité

Il y a un supplémentaire qui se distingue (-> canonique!) $\simeq$: l'orthogonal.

$$\perp \implies \oplus$$

A perpendiculaire à B si $A^\perp \subset B$

A orthogonal à B si $A \subset B^\perp$

-> illustrer avec un plan!

ceg pour $F \subsetneq F^{\perp\perp}$: dans l^2 , les suites à support fini.

ceg pour $F^\perp + G^\perp \subsetneq (F \cap G)^\perp$: prendre le F ci-dessus et $G =$

l'iso canonique $a \mapsto \langle a | \cdot \rangle$ vaut $e_i \mapsto e_i^*$ pour n'importe quelle bon.

ceg à $E \simeq E^*$: prendre $R[X]$ et la forme linéaire valant 1 sur la base canonique.

dans euclidien, (e_i) base $\implies \langle e_i | \cdot \rangle$ base. Si bon, c'est la dualité. Sinon, un iso transforme bases en bases :-)

Pour les calculs, se placer en bon (d si déterminant), **et pas toujours la bc** (on a le droit d'en prendre une autre pour R^n , hein...)

parler de Bessel

4 Auto orthogonaux

(pas besoin de parler d'endo orthogonaux : une isom est toujours inj, donc auto si endo)

La norme triple d'un proj est toujours ≤ 1 avec $=$ ssi p est un proj orth, ou encore ssi p est auto-adjoint. Matriciellement, faire le lien avec $A^2 = A$ et ${}^t A = A$.

retournement : terminologie vient de dim 3.

Soient a et b deux vecteurs (non nuls) de même norme. Il y a une unique réflexion les échangeant.

Soit B bon. alors $u \in O(E)$ ssi $[u]_B \in O_n(R)$, et alors le spectre est dans ± 1 .

trop de propriétés communes (et orthogonal peu heureux) -> parler de matrices unitaires, complexes ou réelles. noter $U_n(R)$ et $U_n(C)$.

$SO(E)$ ou $O^+(E)$: rotation, isométrie positives. eg : retournement

$O^-(E)$: anti-rotation, isométries négatives : eg réflexion.

eg : la symétrie orthogonale par rapport à un sev F est une isométrie du signe de $(-1)^{\text{codim } F}$: matriciellement, on a 1 sur F et -1 sur $F^\perp$

(déplacement gardé pour isométries **affines** car déplacement induit possibilité de **translation**)

action sur le produit mixte (si orienté) : le signe de l'isométrie.

4.1 O_1

$$a^2 = 1 \text{ eq } a = \pm 1.$$

4.2 SO_2

Par le choix d'une bond, on se ramène à $R^2 = C$ (muni de la bc : le ps s'écrit $\langle a, b \rangle = \operatorname{Re} a\bar{b} = \operatorname{Re} \bar{a}b$ et le produit mixte $[a, b] = \operatorname{Im} \bar{a}b = \operatorname{Im} a\bar{b}$). FAIRE UN DESSIN!!!!!!!

Général : $SO_2(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} ; a^2 + b^2 = 1 \right\}$. Pour $K = R$, on pose $a + bi = e^{i\theta}$.

On a alors un morphisme de groupes $R : \theta \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ sur SO_2 , d'où $SO_2 \simeq \mathbb{R} / \operatorname{Ker} R = \mathbb{R} / 2\pi Z = U$.

Pour être plus clair, R_θ vu dans $L(C)$ correspond à la multiplication par $e^{i\theta}$.

noter que $\chi_{R_\theta} = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$.

Changer de bond ne fait rien (la matrice de passage est dans SO_2 , donc tout commute et conjuguer ne fait rien) (le voir **sur un dessin** : tourner la bond ne change pas la matrice). Donc la rotation d'angle θ est l'unique $r_\theta \in SO(E)$ de matrice R_θ dans toute bond.

4.3 Angle orienté

Un angle entre deux vecteurs est défini par le **déplacement** que l'on fait pour passer de l'un à l'autre. Cette vision permet d'ailleurs de définir l'angle de n'importe quel couple d'éléments d'une famille sur laquelle O agit transitivement.

Soit a et b non nuls. La classe $\widehat{(a, b)}$ du couple (a, b) modulo SO_2 est noté $\widehat{ab}$ et est appelé *angle orienté* de a à b . Une *mesure* de l'angle orienté $\widehat{ab}$ est un réel θ tel que $\frac{b}{\|b\|} = r\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$. Un tel θ est unique modulo 2π , et on identifiera abuseivement un angle orienté à l'une de ses mesures (voire à la classe de ces mesures modulo 2π), ce pour donner un sens à $\cos \widehat{ab}$ ou $\sin \widehat{ab}$. La *mesure principale* est la mesure qui tombe dans $]-\pi, \pi]$.

les rotations préserve les angles orientés. (tautologiques) : $r(\widehat{a})r(b) = \widehat{ab}$

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\| \cos \widehat{ab}$$

$$[a, b] = \|a\| \|b\| \sin \widehat{ab}$$

dem : en complexes, en notant $\theta = \widehat{ab}$, on a $\frac{b}{\|b\|} = e^{i\theta} \frac{a}{\|a\|}$, d'où $\bar{a}b = |a| |b| e^{i\theta}$

Rq : si on change l'orientation, il faut passer d'une boni à une bond, ce qui donne une matrice de réflexion S . En décomposant $R_\theta = SS'$, on trouverait la nouvelle matrice $S^{-1}R_\theta S = SSS'S = S'S = (SS')^{-1} = R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

4.4 O_2^-

Général : $O_2^-(K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; a^2 + b^2 = 1 \right\}$ EN bijection avec SO^2 via $\times \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ (dilatation sur colonne de rapport -1) (analogue de $A_n \rightarrow S_n \setminus A_n$ donné par $\sigma\tau$ où τ trasposition). Pour $K = R$, on pose $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$.

Soit alors a le premier vecteur de la bond choisie et u un vecteur tq $\widehat{2au} = \theta$. On a alors la symétrie s_u par rapport à $\mathbb{R}u$

Démo sympa : $|S \pm 1| = |S| |1 \pm S^{-1}| = -|1 \pm {}^t S| = -|1 \pm S| = -|S \pm 1|$, d'où $\pm 1 \in \operatorname{Sp} S$, donc S symétrie

prop : $S_\beta S_\alpha = R_{2(\beta-\alpha)}$, soit $s_v s_u = r_{2\widehat{uv}}$. EG : $R_\theta = S_\theta S_0$

Ainsi, O_2^- est engendré par les réflexions (et deux suffisent).

5 Gram

action d'un endo sur le produit mixite : il multiplie les volumes... donc

$$[u(a_1), \dots, u(a_n)] = \det u \cdot [a_1, \dots, a_n].$$

Remarque que $\det(\langle a_i, b_j \rangle) = \overline{[a_1, \dots, a_n]} [b_1, \dots, b_n]$???

D'où $\det G(\vec{a}) = |[a_1, \dots, a_n]|^2 \geq 0$, avec = ssi $\vec{a}$ liée. On définit le gram de $\vec{a}$ par $g(\vec{a}) := \det G(\vec{a})$; c'est le carré du volume engendré par les vecteurs a_i . D'où l'évidence géométrique de l'exo super classique $d = \sqrt{\frac{g}{g}}$ (prendre la distance à un plan).

eg : pour un parallélogramme, $\sqrt{g(a, b)} = \sqrt{\begin{vmatrix} \|a\|^2 & \langle a, b \rangle \\ \langle a, b \rangle & \|b\|^2 \end{vmatrix}} = \|a\| \|b\| \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{ab}} = \|a\| \|b\| \sin \widehat{ab}$.

Question : spectre d'une matrice de gram ? C'est une matrice autoadj ≥ 0 . Un théorème de Horn affirme que, à diagonale et spectre fixée, il existe une telle matrice ssi le spectre majore la diagonale. Ainsi, les spectres possibles sont toutes les suites majorant les carrés des normes des vecteurs.

6 l'espace ambiant R^3

produit vectoriel : donner expression dans bond

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det 1 \\ -\det 2 \\ \det 3 \end{pmatrix}$$

où le nombre après le det denote la ligne à rayer avant de prendre le det (avec un signe).

démo 1 : le vérifier par bilinéarité sur les vecteurs de base.

Identité Lagrange (cor de Cauchy-Binet ?????) :

$$\langle a \wedge b, x \wedge y \rangle = \begin{vmatrix} \langle a, x \rangle & \langle a, y \rangle \\ \langle b, x \rangle & \langle b, y \rangle \end{vmatrix}.$$

démo; on prend un $c \in \{a, b\}^\perp$ unitaire et on regarde $[a, b, c] [x, y, c]$. D'un côté $\begin{vmatrix} \text{cherché} & 0 \\ * & 1 \end{vmatrix}$ de l'autre $\langle x \wedge y, \langle a \wedge b, c \rangle c \rangle$ et le terme de droite vaut $a \wedge b$ car c lui est colinéaire.

Cor1 : $\|a \wedge b\| = \|a\| \|b\| \sin \widehat{ab}$

Cor2 : $(a \wedge b) \wedge c = (a \cdot c) b - (b \cdot c) a$, (on développe en commençant par le plus loin)

dém 2 : on scalarise par un u :

$$[(a \wedge b) \wedge c, u] = [c \wedge u, a, b] = \langle c \wedge u, a \wedge b \rangle = \begin{vmatrix} \langle a, c \rangle & \langle a, u \rangle \\ \langle b, c \rangle & \langle b, u \rangle \end{vmatrix} = \langle (a \cdot c) b - (b \cdot c) a, u \rangle.$$

cor $(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = \det(a, b, d) c - \det(a, b, c) d$ (on développe en commençant par le plus loin)

dem : on scalarise par un u :

$$[(a \wedge b) \wedge (c \wedge d), u] = [u \wedge (a \wedge b), c \wedge d] = \langle (ub) a - (ua) b, c \wedge d \rangle = \langle u, [a, c, d] b - [b, c, d] a \rangle.$$

Equation $a \times x = b$? affine, donc sol particulière ($\frac{a \times b}{a^2}$) plus noyau ($\mathbb{R}a$)

Lorsque $A = \text{mat}_{\text{bond}}(a, b, c)$, écrire ${}^t A \text{com} A = |A| Id$ donne de l'info sur $[a, b, c]$

6.1 quaternions

définir loi dans $R \times R^3$ qui code à la fois le ps et le pv :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu - ab \\ \lambda b + \mu a + a \times b \end{pmatrix}.$$

Pour $a, b \in R^3$, vu dans $\text{Im } \mathbb{H}$, on a $ab = -\langle a, b \rangle + a \times b$

(reminder : pour $a, b \in \mathbb{R}^2$ vu dans $\mathbb{C}$, on avait $a\bar{b} = \langle a, b \rangle + ia \wedge b$)

1) prenant la norme il vient Lagrange $|a|^2 |b|^2 = \langle a, b \rangle^2 + |a \times b|^2$.

2) en échangeant a et b , il vient

$$\begin{aligned} a \times b &= \frac{1}{2} [a, b] \\ \langle a, b \rangle &= -\frac{ab + ba}{2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } a \times (b \times c) = \frac{abc - bca}{2} = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$$

Rq : soit V euclidien muni d'un $\times$ anticom tq $\langle a \times b, c \rangle = \langle a, b \times c \rangle$. Alors $V = \text{Im } \mathbb{A}$ pour $\mathbb{A}$ l'une des quatre algèbres $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, le $\times$ s'exprimant par $\frac{1}{2} [a, b] = ab + \langle a, b \rangle 1$, donc est de dimension 0, 1, 3, ou 7.

6.2 SO_3

Rq : si r est la rotation d'angle θ autour de u , alors $r = (\cos \theta) \text{Id} + (\sin \theta) (u \wedge \cdot) + 2 \langle u, \cdot \rangle \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

DEM 1 : on le vérifie sur un bond a, b, u :

$$\begin{aligned} (\cos \theta) a + (\sin \theta) (u \wedge a) + 2 \langle u, a \rangle \sin^2 \frac{\theta}{2} &= a \cos \theta + b \sin \theta = r(a) \\ (\cos \theta) b + (\sin \theta) (u \wedge b) + 2 \langle u, b \rangle \sin^2 \frac{\theta}{2} &= b \cos \theta - a \sin \theta = r(b) \\ (\cos \theta) u + (\sin \theta) (u \wedge u) + 2 \langle u, u \rangle \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \left(\cos \theta + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) u = u = r(u) \end{aligned}$$

DEM2 : la même, mais matricielle : dans une base a, b, u , on a les matrices

$$\text{Mat}(u \wedge \cdot) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Mat}(u \mid \cdot) = \begin{pmatrix} & \cos \theta & -\sin \theta \\ & \sin \theta & \cos \theta \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Mat}(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \\ \sin \theta & \cos \theta & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer une rotation.

$\text{tr } r = 1 + 2 \cos \theta$, d'où θ au signe près.

pour $u = (a, b, c)$, $\text{Mat}_{b,c}(u \times \cdot) = \begin{pmatrix} c & \\ -b & a \end{pmatrix}$, de noyau Ru .

Choisissons une base adaptée à rotation avec un angle positif : $\begin{pmatrix} 1 & & \\ c & -s & \\ s & c & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ c & & \\ & c & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -s & \\ & & s \end{pmatrix}$. La seconde partie est la matrice de $(u \times \cdot)$ avec $u = (s, 0, 0)$, donc la partie antisym de $\text{rot}_{u,\theta}$ est $(u \times \cdot)$

Ainsi, si la partie antisym de R s'écrit $\begin{pmatrix} c & \\ -b & a \end{pmatrix}$, elle vaut $(v \times \cdot)$ où $v = (a, b, c)$. On a donc $(u \times \cdot) = (v \times \cdot)$,

d'où $v = u$. Sanity check : la norme de $u = v$ vaut $s = \sin \theta$ (si on n'aime pas prendre la trace). ANLGE POSITIF ? ? ? ?

EG $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ collon bon, -2 est du signe de $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$, donc rotation. on a $\frac{-2}{3} = 1 + 2 \cos \theta$, d'où $\theta = \arcs(-\frac{5}{6})$. On décompose

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

d'om l'axe orienté par $(1, 1, 3)$. Sanity check : vérifier que ce vecteur est fixe! Sa norme (divisée par $\frac{1}{3}$) vaut $\frac{\sqrt{11}}{6} = \sin \theta$, et on a bien $11 + 5^2 = 6^2$.

Exo rigolo : $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix}$ colonnes bon, 7 est du signe de $\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$, donc rotation. Symétrique, donc symétrie, donc rotation d'angle π

6.3 lacet involutif dans SO_3 et souplesse d'un bras

<https://www.youtube.com/watch?v=-Pe75mu1QQ0>
(fin de vidéo pour expliciter)

6.4 O_3^-

$O_3^- = \{-r\}_{r \in SO_3}$, d'où le terme d'anti-rotations.

Composition de deux réflexions? soit D l'intersection des plans stables et $P := D^\perp$. Alors la composée est une rotation d'axe Δ (prendre un bond de P puis D).

cor : O_3 engendré par les réflexions, et deux suffisent.

ELements caractéristiques? même méthode que rotation (avec la partir anti-sym) -> VERIFIER LE SIGNE DE L'ANGLE

7 O_n

en fait O_2 fait tout

pour SO_n , blocs de R_θ

pour O_n^- , idem avec un -1

En résumé : diagonales de O_1 puis rotations $\neq$ Id.

pour le signe, puisque $O = {}^t O^{-1} = \frac{{}^t \text{Com } O}{\det O}$, les élément $[O]_{1,1}$ et $[\text{Com } O]_{1,1}$ sont de même signe ssi rotation. Prendre n'importe que mineur au besoin (au lieu du det imposé)

$$\text{EG} : \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & a & -d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}O_4(\mathbb{R}).$$

rq : posant $\lambda := a + ib$ et $\mu = c + id$, on a par blocs la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \\ \mu & -\bar{\lambda} \end{pmatrix}$

Le déterminant est constant (continue sur le connexe $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$), donc vaut une valeur particulière : $d = c = b = 0$ donne $\text{Diag}(a, a, -a, a) < 0$.

8 Orientation

orienter une droite : choisir un sens
 orienter un plan : choisir un sens de rotation
 et après??

on a deux familles de bases.
 convention dans R^n : bc directe
 convention : si $e_1, \dots, e_n$ bd fixée, alors $e_1, \dots, e_k$ bd de son vect
 prop : oriter un hyperplan , c'est choisir un "côté" de l'hyperpla

Les morphismes qui préservent ev + ps + orientaino sont les auto de SO

ANGLE : pas d'orientation si $n \geq 3$: en effet, classe mod $O^+ =$ clase modulo O .

9 Espace préhilbertien complexe

Mettre le même formalisme que pour R en prenant $\mathbb{K}$ corps de base muni de l'involution $a \mapsto \bar{a}$.

Une forme φ est sesquillinéaire si $\varphi(a, \cdot)$ linéaire et $\varphi(\cdot, b)$ anti-lin. Elle est de plus symétrique si $\varphi(b, a) = \overline{\varphi(a, b)}$.

on retrouve les formes bilin sym et les sesquil hermitenne (on retrouve aussi les bilin symq complexes en prenant pour involoution l'identité)

C'est plus naturel de considérer $\langle a, \cdot \rangle$ comme forme linéaire, plutôt que $\langle \cdot, a \rangle$. (en plus c'est compatible avec la notation bra-kets des pysisiens)

En hermitien, attention à $a = \sum \langle e_i, a \rangle e_i$, mettre une barre ou pas... vérifier

$$\left\langle e_j \mid \sum \langle e_i, a \rangle e_i \right\rangle = \sum_i \langle e_i, a \rangle \langle e_j \mid e_i \rangle = \langle e_j, a \rangle, \text{ ok.}$$

tout pareil, sauf qq trucs :

identité polarisation

pythagore (penser à $1 \cdot i$ dans R ou C)

sup $x \cdot u(x)$ est une norme sur C (pas sur R : rotation $\cdot i$ dans C)

Matrices symétriques complexes pas intéressantes (tout complexe est un carré) et pas diago! $\begin{matrix} 2 & i \\ i & 0 \end{matrix}$ de poly

car $(X - 1)^2$ (donc pas diago sinon = Id)

Réduction des matrices unitaire : diag en bon à spectre unitaire

matrices hermitienne en bij avec anti-hermin (par $\cdot i$), ce qui n'est pas le cas des sym et anti-sym

l'appliation $\begin{matrix} AS_n & \xrightarrow{\sim} & SO_n \\ A & \mapsto & \frac{1+A}{1-A} \end{matrix}$ est bien définie (Si $1 - A$ pas bij, A a un point fixe x , d'où $Ax = x$, $-x^t A = {}^t x$

et $-\|x\|^2 = \|x\|^2$; ensuite $1 - A$ a pour inverse un polynôme en $1 - A$, donc un polyn en A , donc commute avec $1 + A$, ce qui justifie la notation fracitonnaire), injective (inverse $O \mapsto \frac{O-1}{O+1}$), d'image les matrices $O \in SO_n$

on a ${}^t \left(\frac{1-A}{1+A} \right) = \frac{1+A}{1-A}$ puis le spectre de A est formé de $\pm i\lambda_k$, donc $\frac{|1-A|}{|1+A|} = 1$ tq $-1 \notin \text{Sp } O$ (pour définie

la réciproque) Mais l'appliation $\begin{matrix} AH_n & \longrightarrow & U_n \\ H & \longmapsto & \frac{1+H}{1-H} \end{matrix}$ est bien définie, injective, d'image les matrices $U \in U_n$ tq

$-1 \notin \text{Sp } U$.

10 Adjoints

(extrait du point aveugle 2, p. 439) en dim finie

DEF on appelle **symétrie partielle** tout u tel que uu^* est un projecteur.

PROP : *invariant par adjointion*

DEM : Puisque $\text{Sp}(u^*u) = \text{Sp}(uu^*) \subset \{0, 1\}$ et que u^*u est hermitien, ce dernier est un projecteur.

PROP u (ou u^*) symétrie partielle $\Leftrightarrow u$ et u^* pseudo inverses $\Leftrightarrow uu^*u = u$

DEM $\Leftarrow$ trivial. $\Rightarrow$ poser $\delta := u - uu^*u$ (qu'on veut nul) et développer

$$\delta\delta^* = (u - uu^*u)(u^* - u^*uu^*) = uu^* - 2(uu^*)^2 + (uu^*)^3 = 0, \text{ d'où } \delta = 0.$$

EXO si u normal et $\text{Sp } u \subset \{0, \pm 1\}$, alors u est une symétrie partielle (hermtienne ???)

11 Axiomatique du produit vectoriel en dim 3

Soit E un K -ev de dim 3 muni d'une base $\mathcal{B}$. Alors on a un isomorphisme. $\left\{ \begin{array}{ccc} \Lambda^2 E & \longrightarrow & E^* \\ t & \longmapsto & \det_{\mathcal{B}}(t \wedge \cdot) \end{array} \right.$. Si,

de plus, on a un produit à vs non dégénéré, on a aussi un isomorphisme $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ e & \longmapsto & \langle e | \cdot \rangle \end{array} \right.$. Ainsi, on peut

définir un produit sur E en envoyant deux vecteurs $a, b \in E$ sur l'image de $a \wedge b$ via $\Lambda^2 E \simeq E^* \simeq E$. On obtient alors l'identité $\langle a \times b | \cdot \rangle = \det(a \wedge b \wedge \cdot)$.

En dimension 2, le produit ainsi défini (envoyer $a, b \in E$ sur l'image de $a \wedge b$ par ??) donne le déterminant dans une base à choisir.

Post Produit intérieur Rémy David????

12 Axiomatique des produits réels

Un *produit* sur un ev est un application bilinéaire.

Par exemple, on montre que les produits à valeurs scalaires sur $\mathbb{R}$ forment une droite engendré par le produit usuel. En effet, fixant un réel a , le réel (a, b) est une forme linéaire en b , donc une homothétie $\lambda_a b$, puis prenant à présent $b = 1$ le réel $(a, 1) = \lambda_a$ est une forme linéaire en a , donc une homothétie λ_a .

On voit alors des comportements inhabituels selon la valeur de λ : l'égalité $a^2 \geq 0$ n'est pas toujours vérifiée (prendre λ négatif), et l'implication $a^2 = 0 \implies a = 0$ non plus (prendre $\lambda = 0$). Seul le cas $\lambda > 0$ réconforte notre intuition (ô combien naïve).

Plaçons nous à présent dans le plan réel, muni du produit scalaire naturel $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$. On est habitué à avoir la positivité des carrés scalaires x^2 , à en déduire une norme $\|x\| = \sqrt{x^2}$, à avoir deux inégalités géométriquement évidentes dans le plan $|xy| \leq \|x\| \|y\|$ et $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ avec égalité seulement si $x \parallel y$. Mais rien qu'en changeant le $+$ du produit $aa' + bb'$ en $-$, on voit déjà plein de choses se compliquer. De même, dans $\mathbb{R}^n$, que dire d'un produit du type $ab := \sum \pm a_i b_i$? Et que dire en toute généralité d'un produit de la forme $ab := \varphi(a)\varphi(b)$ où φ est une forme linéaire? Que reste-il de ces propriétés?

Dans le cas général, on dispose de plein d'énoncés : le caractère "défini" ou non-dégénéré du produit, la constance du signe de x^2 , le fait que $\|\cdot\| : x \mapsto \sqrt{|x^2|}$ soit une norme, les inégalités de Cauchy-Schwarz et

Minkowsky avec leurs cas d'égalité. Les voici (on quantifie universellement sur des vecteurs a et b)

<i>DEF</i>	$a^2 = 0 \iff a = 0$
<i>ND</i>	$(a \cdot) \equiv 0 \implies a = 0$
<i>SIG</i>	$a^2 b^2 \geq 0$
<i>CS</i>	$(ab)^2 \leq a^2 b^2$
<i> CS </i>	$(ab)^2 \leq a^2 b^2 , \text{ i. e. } ab \leq \ a\ \ b\ $
<i>MIN</i>	$\ a + b\ \leq \ a\ + \ b\ $
$=_{CS}$	$(ab)^2 = a^2 b^2 \implies a \parallel b$
$=_{ CS }$	$(ab)^2 = a^2 b^2 \implies a \parallel b$
$=_{MIN}$	$\ a + b\ \leq \ a\ + \ b\ \implies a \parallel b$
<i>NOR</i>	$\ \cdot\ $ est une norme, i. e. <i>DEF</i> et <i>MIN</i>
<i>CS</i> $^=$	<i>CS</i> et $=_{CS}$
<i> CS </i> $^=$	<i> CS </i> et $=_{ CS }$
<i>MIN</i> $^=$	<i>MIN</i> et $=_{MIN}$

Nous allons voir que ces énoncés se regroupent en trois blocs (au sein de chacun desquels les énoncés sont équivalents), l'un équivalant la conjonction des deux autres (sans réciproque), comme suit :

dimension ≥ 3	dimension 2																																												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;"><i> CS </i>$^=$</td> <td style="padding: 2px;"><i>CS</i>$^=$</td> <td style="padding: 2px;"><i>MIN</i></td> <td style="padding: 2px;"><i>DEF</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$=_{ CS }$</td> <td style="padding: 2px;">$=_{CS}$</td> <td style="padding: 2px;">$=_{MIN}$</td> <td style="padding: 2px;"><i>NOR</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">↓</td> <td></td> <td></td> <td style="padding: 2px;">↓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;"><i> CS </i></td> <td style="padding: 2px;"><i>CS</i></td> <td style="padding: 2px;"><i>MIN</i></td> <td style="padding: 2px;"><i>ND</i></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;"><i>SIG</i></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	<i> CS </i> $^=$	<i>CS</i> $^=$	<i>MIN</i>	<i>DEF</i>	$=_{ CS }$	$=_{CS}$	$=_{MIN}$	<i>NOR</i>	↓			↓	<i> CS </i>	<i>CS</i>	<i>MIN</i>	<i>ND</i>		<i>SIG</i>			<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;"><i> CS </i>$^=$</td> <td style="padding: 2px;"><i>CS</i>$^=$</td> <td style="padding: 2px;"><i>MIN</i></td> <td style="padding: 2px;"><i>DEF</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">$=_{ CS }$</td> <td style="padding: 2px;">$(\Delta > 0)$</td> <td style="padding: 2px;">$=_{MIN}$</td> <td style="padding: 2px;"><i>NOR</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">↓</td> <td></td> <td></td> <td style="padding: 2px;">↓</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;"><i> CS </i></td> <td style="padding: 2px;"><i>CS</i></td> <td style="padding: 2px;"><i>MIN</i></td> <td style="padding: 2px;"><i>ND</i></td> </tr> <tr> <td></td> <td style="padding: 2px;"><i>SIG</i></td> <td style="padding: 2px;">$(\Delta \neq 0)$</td> <td style="padding: 2px;">$(\Delta \geq 0)$</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td style="padding: 2px;">$=_{CS}$</td> </tr> </table>	<i> CS </i> $^=$	<i>CS</i> $^=$	<i>MIN</i>	<i>DEF</i>	$=_{ CS }$	$(\Delta > 0)$	$=_{MIN}$	<i>NOR</i>	↓			↓	<i> CS </i>	<i>CS</i>	<i>MIN</i>	<i>ND</i>		<i>SIG</i>	$(\Delta \neq 0)$	$(\Delta \geq 0)$				$=_{CS}$
<i> CS </i> $^=$	<i>CS</i> $^=$	<i>MIN</i>	<i>DEF</i>																																										
$=_{ CS }$	$=_{CS}$	$=_{MIN}$	<i>NOR</i>																																										
↓			↓																																										
<i> CS </i>	<i>CS</i>	<i>MIN</i>	<i>ND</i>																																										
	<i>SIG</i>																																												
<i> CS </i> $^=$	<i>CS</i> $^=$	<i>MIN</i>	<i>DEF</i>																																										
$=_{ CS }$	$(\Delta > 0)$	$=_{MIN}$	<i>NOR</i>																																										
↓			↓																																										
<i> CS </i>	<i>CS</i>	<i>MIN</i>	<i>ND</i>																																										
	<i>SIG</i>	$(\Delta \neq 0)$	$(\Delta \geq 0)$																																										
			$=_{CS}$																																										
(la seule différence entre les deux tableaux est la place de $=_{CS}$)	Δ désigne le déterminant de la matrice du produit, défini à un carré près (dû aux changements de base)																																												

Un point important est de traiter la dimension 2. D'une part pour se donner une intuition, d'autre part parce que chaque énoncé ci-dessus (à l'exception de *ND*) est vérifié ssi il est vérifié sur tout plan, ce qui fournira un bon tremplin pour l'étude générale.

En dimension 2, en se plaçant dans une base orthogonale, tout produit est de la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda ax + \mu by$ pour des réels λ et μ . On distingue les cas selon la position du déterminant $\Delta := \lambda\mu$ par rapport à 0.

13 Axiomatique quaternions

définir loi dans $R \times R^3$ qui code à la fois le ps et le pv :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu - ab \\ \lambda b + \mu a + a \times b \end{pmatrix}.$$

Pour $a, b \in R^3$, vu dans $\text{Im } \mathbb{H}$, on a $ab = -\langle a, b \rangle + a \times b$

(reminder : pour $a, b \in \mathbb{R}^2$ vu dans $\mathbb{C}$, on avait $\bar{a}b = \langle a, b \rangle + ia \wedge b$)

1) prenant la norme il vient Lagrange $|a|^2 |b|^2 = \langle a, b \rangle^2 + |a \times b|^2$.

2) en échangeant a et b , il vient

$$\begin{aligned} a \times b &= \frac{1}{2} [a, b] \\ \langle a, b \rangle &= -\frac{ab + ba}{2} \end{aligned}$$

d'où $a \times (b \times c) = \frac{abc - bca}{2} = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$

Rq (gros th) : soit V eucliden muni d'un $\times$ anticom tq $\langle a \times b, c \rangle = \langle a, b \times c \rangle$. Alors $V = \text{Im } \mathbb{A}$ pour $\mathbb{A}$ l'une des quatre algèbres $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, le $\times$ s'exprimant par $\frac{1}{2} [a, b] = ab + \langle a, b \rangle 1$, donc est de dimension 0, 1, 3, ou 7.

Blog pierre lecompte sur algère assoc et produit vectoriels. ?
<http://pierrelecomte.wordpress.com/2010/10/>
<http://pierrelecomte.wordpress.com/2010/03/26/les-produits-vectoriels-ii/>

L'assoc de $\begin{pmatrix} \lambda \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu - ab \\ \lambda b + \mu a + a \times b \end{pmatrix}$, repose sur l'antilin du pv et sur la formule du dble pv. Réciproquement, si E est un ev réel muni d'un produit $\cdot$ réel et d'un produit interne antisym $\times$, alors la loii ci-dessus est assoc ssi la formule du double pv est satisfaite (cf EXO)

EXO

On veut donc l'égalité

$$\begin{pmatrix} (a \cdot b)\nu + (\lambda b + \mu a + a \times b) \cdot c \\ -(a \cdot b)c + \nu(a \times b) + (\lambda b + \mu a + a \times b) \times c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(b \cdot c) + a \cdot (\mu c + \nu b + b \times c) \\ \lambda(b \times c) - (b \cdot c)a + a \times (\mu c + \nu b + b \times c) \end{pmatrix}$$

Lorsque $\cdot$ est bil et $\times$ est bil, cela devient

$$\begin{pmatrix} (a \times b) \cdot c \\ -(ab)c + (a \times b) \times c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot (b \times c) \\ -(bc)a + a \times (b \times c) \end{pmatrix}.$$

ce qui est vérifié ssi l'identité du dlbe pv est vérifiée (SUPPOSER $\times$ ANTISYM)

Réciproque : hypothèse se réécrit $a \times (b \times c) + c \times (a \times b) = (bc)a - (ab)c$. Or, si on ajoute $b \times (c \times a)$, on obtient 0 car

$$\begin{aligned} \sum a \times (b \times c) &= \sum (a \times b) \times c + (bc)a - (ab)c \\ &= \sum -c \times (a \times b) + \sum (ab)c - \sum (ab)c \\ &= -\sum a \times (b \times c), \end{aligned}$$

d'où $(c \times a) \times b = (bc)a - (ab)c$; or, faire $a = c$ donne (2e lin) $(ab)a = (ba)a$, donc $\cdot$ sym, ce qui conclut.

RQ : on se donne $\times$ bil vérifie prod vect (alors $\cdot$ bil). Alors

$$\begin{aligned} \text{tr}(a \times (b \times \cdot)) &= \sum e_i^* (a \times (b \times e_i)) \\ &= \sum e_i^* ((ae_i)b - (ab)e_i) \\ &= a \cdot \left(\sum e_i^* (b)e_i \right) - nab \\ &= ab - nab, \text{ d'où} \\ ab &= -\frac{\text{tr}(a \times (b \times \cdot))}{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\cdot$ est sym car $\text{tr} AB = \text{tr} BA$.

Cor : les $a \times$ sont antisym ssi produit mixte antisym : on regarde $(a \times x) \cdot y + x \cdot (a \times y)$: trace de $(a \times x) \times (y \times \cdot) = [(a \times x) \cdot]y - [(a \times x)y] \cdot$ donne $[(a \times x)y]$ en remettant les facteur $\frac{-1}{n-1}$, donc $(a \times x) \cdot y + (a \times y) \cdot x = [(a \times x)y] + [(a \times y)x]$ qui est bien nul ssi produit mixte est antisym

On se donne un group additif A (les *scalaires*) muni d'une multiplication $\times$ dont 0 est absorbant. On se donne aussi un autre groupe additif V (les *vecteurs*) muni d'une loi $\cdot$ (éventuellement omise) à valeurs dans A , sur lequel A agit de manière ??? ($0a = a$)

On définit sur le produit cartésien $A \times V$ une multiplication

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda\mu - a \cdot b \\ \lambda b + \mu a + a \times b \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cette dernière est associative ssi on a pour tous scalaires λ, μ, ν et pour tous vecteurs a, b, c

$$\begin{pmatrix} \nu(a \cdot b) + (\lambda b + \mu a + a \times b) \cdot c \\ (b \cdot c)a + \nu(a \times b) + (\lambda b + \mu a + a \times b) \times c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(b \cdot c) + a \cdot (\mu c + \nu b + b \times c) \\ (a \cdot b)c + \lambda(b \times c) + a \times (\mu c + \nu b + b \times c) \end{pmatrix}.$$

Ce que l'on suppose par la suite.

2. Montrer que le vecteur nul est absorbant pour $\times$, puis en déduire que cette dernière est homogène. Montrer alors que la multiplication scalaire par le vecteur nul est toujours nulle, puis que $\cdot$ est homogène.
3. Montrer que l'on a les "distributivités" faibles¹ suivantes :

$$\begin{aligned}(\lambda b + \mu a + a \times b) \cdot c &= \lambda(b \cdot c) + (\mu a + a \times b) \cdot c, \\ a \cdot (\mu c + \nu b + b \times c) &= \nu(a \cdot b) + a \cdot (\mu c + b \times c), \\ (\lambda b + \mu a + a \times b) \times c &= \lambda(b \times c) + (\mu a + a \times b) \times c, \\ a \times (\mu c + \nu b + b \times c) &= \nu(a \times b) + a \times (\mu c + b \times c).\end{aligned}$$

4. On fait l'hypothèse supplémentaire que $a \times b$ est lié à $b \times a$ pour tous vecteurs a, b .
Montrer alors que les égalités précédentes équivalent, d'une part à l'homogénéité de $\cdot$ et $\times$ ainsi qu'à leur distributivité sur les expressions du type $\lambda u + \mu v + u \times v$, d'autre part aux égalités

$$\begin{pmatrix} (a \times b) \cdot c \\ (b \cdot c) a + (a \times b) \times c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot (b \times c) \\ (a \cdot b) c + a \times (b \times c) \end{pmatrix}.$$

5. puis que l'associativité de $\times$ équivaut à la nullité de $\cdot$ (à moins que tous les vecteurs ne soient colinéaires)
6. Montrer qu'il est impossible de prouver que $\times$ est antisymétrique.

Solution proposée.

1. On calcule tranquillement

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \lambda \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda\mu - ab \\ \lambda b + \mu a + a \times b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\mu\nu - (ab)\nu - (\lambda b + \mu a + a \times b) \cdot c \\ \lambda\mu c - (ab)c + \lambda b\nu + a\mu\nu + \nu(a \times b) + (\lambda b + \mu a + a \times b) \times c \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \lambda \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu\nu - bc \\ \mu c + \nu b + b \times c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda\mu\nu - \lambda bc - a \cdot (\mu c + \nu b + b \times c) \\ \lambda\mu c + \lambda b\nu + \lambda(b \times c) + a\mu\nu - (bc)a + a \times (\mu c + \nu b + b \times c) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Annuler λ et b dans la seconde ligne montre que $\nu(a \times 0)$ est indépendant de ν , ce qui force $a \times 0 = 0$. De même, annuler ν et b dans la même ligne montre que $\lambda(0 \times c)$ est constant, d'où la nullité de $0 \times c$. Annuler a (resp. c) dans la seconde ligne donne $(\lambda b) \times c = \lambda(b \times c)$ et $\nu(a \times b) = a \times (\nu b)$.
Annuler a et b dans la première ligne donne $(0 \cdot 0)\nu + 0 \cdot c = \lambda(0 \cdot c) + 0 \cdot (\mu c)$, d'où (en faisant varier λ) $0 \cdot c = 0$. De même, annuler b et c aurait donné $(a \cdot 0)\nu + \mu a \cdot 0 = \lambda(0 \cdot 0) + a \cdot 0$, d'où (en faisant varier ν) $a \cdot 0 = 0$. Enfin, annuler seulement a donne $(\lambda b) \cdot c = \lambda(b \cdot c)$ tandis qu'annuler juste c donne $\nu(a \cdot b) = a \cdot (\nu b)$.
3. On voit dans la première égalité que $(\lambda b + \mu a + a \times b) \cdot c - \lambda b \cdot c$ est indépendant de λ , donc vaut sa valeur en 0, à savoir $(\mu a + a \times b) \cdot c$, d'où une "distributivité" demandée, les trois autres s'obtenant de manière analogue.
4. L'hypothèse supplémentaire permet de tout développer les produits $\cdot$ et $\times$ en utilisant deux fois chacune des distributivités faibles ci-dessus, par exemple

$$\begin{aligned}(\lambda b + \mu a + a \times b) \cdot c &= \lambda(b \cdot c) + (\mu a + a \times b) \cdot c \\ &= \lambda(b \cdot c) + (\mu a + 0b + ?b \times a) \cdot c \\ &= \lambda(b \cdot c) + \mu(a \cdot c) + (0b + ?b \times a) \cdot c \\ &= \lambda(b \cdot c) + \mu(a \cdot c) + (a \times b) \cdot c.\end{aligned}$$

Les égalités voulues s'obtiennent en annulant λ, μ et ν .

5. La seconde ligne nous dit clairement que la nullité de $\cdot$ implique l'associativité de $\times$. Supposons réciproquement $\times$ associative : la seconde ligne nous dit que $(b \cdot c)a = (a \cdot b)c$. Fixons a : prendre c non lié à ce dernier force $a \cdot b = 0$ pour tout vecteur b . De même, en fixant c , prendre a non lié à c impose $b \cdot c = 0$ pour tout b . Ainsi, ou bien tous les vecteurs sont liés, ou bien le produit $\cdot$ est nul.
6. En prenant $A = V = \mathbb{R}$ avec pour multiplications le produit usuel (il s'agit en fait de $\mathbb{C}$ vu dans $\mathbb{H}$), les égalités ci-dessus sont satisfaites sans pour autant que le produit soit anticommutatif

¹on peut développer le vecteur qui est "le plus près" de celui à l'extérieur