Géométrie affine
(version chantier)

Marc SAGE

10 mai 2007

Table des matières

why *affine* ? maybe from *affinité* ? (Id$\oplus$homothétie)

Une jolie vision d'un espace affine est celle d'un espace vectoriel dont on a effacé l'origine. Pour pouvoir dilater un vecteur, il faut alors choisir une origine. Ceci peut se résumer en :

$$\text{affine} = \text{vectoriel} + \text{constante}.$$

Autre vision : on plante des clous en les points, et on tend un élastique depuis chaque point vers l'origine. On déplace alors l'origine, et même on peut la supprimer !

Encore une visions : les droites se croisent (ou pas) et demandent : "et, toi la parallèle, t'aurais pas vu où est est passé l'origine ?"

liberté/liaison affine ! !

1 Généralités

trois formalismes possibles pour un ea A :

comme ev = cadre minimal pour parler de combiaison linéiare, ea est cadr emiimale pour parler de barycentre. Cf discussion plus loin.

(on plante une flèche sur un point, ce qui donne un autre point)

les translations agissent fidèlement transitivment et de manière assoc :

$\forall a \in A,\ \forall u, v \in V,\ (a + u) + v = a + (u + v)$

$\forall a, b \in A,\ \exists! \overrightarrow{ab} \in V,\ b = a + \overrightarrow{ab}$

prop : $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$ (écrire $c = b + \overrightarrow{bc} = a + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$ puis invoquer unicité), d'où $\overrightarrow{aa} = 0$ et $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$.

A $\omega \in A$ fixé, on a un bijection $\omega + \cdot$ de V sur A, de réciproque $\overrightarrow{\omega \cdot}$: c'est le *vectorialisé* de A en ω (dessin : orgine ω flèche vers a, $u = \overrightarrow{\omega a}$)

ou bien (on met une flèche sur tout couple de points)

vectorislaitn des points par Chasles et de l'ea en tout point :

$\exists \left\{ \begin{array}{ccc} A^2 & & V \\ (a,b) & & \overrightarrow{ab} \end{array} \right.$ vérifiant $\forall a, b, c \in A,\ \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$

$\forall a \in A$, $\overrightarrow{a\cdot}$ est bijection de A sur V : le *vectorialisé* de A en a est la structure d'ev transporté par $\overrightarrow{a\cdot}$.

eg : V ! Exemple universel car (cf fin du cours) tout ea se plonge (canoniquement) dans un hyperplan affine d'un ev.

eg moins canonique : Soit V ev. Pour H hyperplan on note A_H l'ensmble des supplémentaires de H dans V, ou encore l'ensembrl des droites de V non incluses dans H. Alors l'ev H agit sur A_V via $\overrightarrow{\alpha\beta} := b - a$ où $a \in \alpha \cap H$ et $b \in \beta \cap H$. Chasles est clair. DE plus, $(\cdot \cap H)$ bij de A_V sur H, donc $\overrightarrow{\alpha\cdot}$ est une bijection $\forall \alpha \in A_V$.

En fait, c'est tout simplement le transport de la structure d'ea (vectoriel) de H sur A_H via l'application $\begin{array}{ccc} A_H & \widetilde{\longrightarrow} & H \\ \alpha & \mapsto & \alpha \cap H \end{array}$. On pourrait donc remplacer H par n'importe quel hyperplan qui lui est parallèle. Cf plus loin pour préciser "iso d'ea" et "parallèle".

rQ : traditionnnelemtn, on défini un vecteur comme une classe d'équivalence de bpoint pour une relation avoir même mileu. IL y aurait donc un moyen canonique de récupérer l'ev sous-jacent à un ea ? NOn, car pour définir le milieu il faut déjà parler de vecteurs...

diension de A est celle de V.

2 Barycentres

Pas possible de parler de cl -> dépend de l'orgine. Mais oki pour bary

Définir les barycentre : $\omega + \sum \lambda_i a_i$ indépendant de ω si $\sum \lambda_i = 1$, on le note $\operatorname{bar}(a_i, \lambda_i)$. C'est l'unique g tel que $\sum \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = 0$. En vectorialisisant en un point, on peut poser $\omega = 0$ et faire tous les calcules en vectoriel.

Remarque. Si $\sum \lambda_i = 0$, il est facile de voir que $\sum \lambda_i \overrightarrow{\omega a_i}$ est indépendante de l'origine ω ; du coup, $\omega + \sum \lambda_i \overrightarrow{\omega a_i}$ dépend de ω et ne saurait être défini en toute généralité.

On a les propriéts suivantes :

IDENTITE : $\operatorname{bar} \begin{matrix} a & \cdots & a \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{matrix} = a$

COMM : $\forall \sigma \in S_n$, $\operatorname{bar} \begin{matrix} a_{\sigma(1)} & \cdots & a_{\sigma(n)} \\ \lambda_{\sigma(1)} & \cdots & \lambda_{\sigma(n)} \end{matrix} = \operatorname{bar} \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{matrix}$

NEUTRE : $\sum \nu_i = 0 \implies \operatorname{bar} \begin{matrix} \omega & \cdots & \omega & a_1 & \cdots & a_n \\ \nu_1 & \cdots & \nu_p & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{matrix} = \operatorname{bar} \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{matrix}$

ASSOC : $\operatorname{bar} \begin{matrix} \operatorname{bar} \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \end{matrix} & b_1 & \cdots & b_q \\ \mu & \mu_1 & \cdots & \mu_q \end{matrix} = \operatorname{bar} \begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p & b_1 & \cdots & b_q \\ \lambda_1 \mu & \cdots & \lambda_p \mu & \mu_1 & \cdots & \mu_q \end{matrix}$

Rq : en se donnant des application bar vérifiant les axiomes ci-dessus (on peut même réduire idenité en $\operatorname{bar}(a, \lambda) = a$), on peut mettre une structure d'ev sur A en imposant n'importe quelle origine.

RQ : si on plonge ea dans ev, barcyentre coindide avec les combinaisons linéaires.

Exo : trois médianes d'un triangle.

La fonction vectorielle de Leibniz est $x \mapsto \sum \lambda_i \overrightarrow{a_i x}$. (Inj, d'où unicitié du bary)

3 Sous-espaces affines

3.1 génrétalités

sea = stable par bary. NOTATION A, B, F, G PAS CLAIRES !!

pour $\beta \in B \subset A$, E sea ssi $\left\{\overrightarrow{\beta b}\right\}_{b \in B}$ sev, et alors cet sev est indépendant de β, il est noté $\overrightarrow{B}$, c'est la *direction* de B, et $B = b + \overrightarrow{B}$ (dessin avec une origine ailleurs) (B est le sea dirigé par $\overrightarrow{B}$ passant par b, ou le sea en b dirigé par $\overrightarrow{B}$). La dimension de B est $\dim \overrightarrow{B}$

eg : $\overrightarrow{A} = V$, point, droite, plan, hyperplan, solution d'ed ou de système linéaires.

rq : Dim d'un sea strictement croissante comme pour les sev.

points alignés, coplanaires,

intersection de sea = sea de direction l'intersection des direction (si non vide)

lemme : $a + A \cap b + B \neq \emptyset \iff \overrightarrow{ab} \in A + B$

cor $A \cap B$ contient :

au plus un point si $\overrightarrow{A} \cap \overrightarrow{B} = \{0\}$

au moins un point si $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = V$

exactement un point si $\overrightarrow{A} \oplus \overrightarrow{B} = V$

deux sea sont parallèles si la direction de l'un est incluse dans celle de l'autre (distinguer faiblement/fortement parallèles ?)

autre définitino : ssi l'un contient un translaté de l'autre (bien si on veut mettre les translation au centre du cours).

eg : droite et plan dans R^3

prop : si deux sea sont parallèles, ou bien ils sont disjoints, ou bien l'un est inclus dans l'autre.

3.2 liberté / sea engednré

Aff A =plus petit sea $\supset A$ = barycentres de point de A.

eg : Aff $a = \{a\}$, Aff $\{a,b\} = a + K\overrightarrow{ab}$ (droite (ab) si $a \neq b$), Aff $\{a,b,c\} = a + K\overrightarrow{ab} + K\overrightarrow{ac}$ (plan (abc) si a, b, c non liés au sens suivant)

Prop : si $\alpha \in A$, Aff $A = \alpha + \mathrm{Vect}_{a\in A}\,\overrightarrow{\alpha a}$

un point est (*affinement*) *lié* à une une partie s'il $\in$ Aff

une famille (a_i) est (*affinement*) *liée* si un a_i est lié aux autres, *libre* sinon, *géné* si son Aff vaut tout l'espace, ie si tout point est barycentre des a_i, *base* (affine) si libre et géné (on a alors unicité des coefficents à normalisation près)

Rq : une condition de liaison s'écrit $a_{i_0} = \sum_{i\neq i_0} \lambda_i a_i$ où $\sum \lambda_i = 1$, ie (en vectorialisant en a_{i_0}) $\sum_{i\neq i_0} \lambda_i \overrightarrow{a_{i_0}a_i} = 0$, ie (en vectoriel) $\sum \mu_i a_i = 0$ avec $\sum \mu_i = 0$.

Prop : soit (a_i) et $\alpha \in \{a_i\}$. alors (a_i) libre/géné/base ssi $(\overrightarrow{\alpha a_i})$ libre/géné/base

cor : en dim finie, #géné$\geq n+1$, #libre$\leq n+1$, #base$=n+1$.

3.3 droites en dim 2

en dim deux, éq d'une droite

en $M(a,b)$ dirigé par $u(\alpha,\beta)$: $\begin{vmatrix} x-a & \alpha \\ y-b & \beta \end{vmatrix} = 0$

en A et B : $\begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A \end{vmatrix} = 0$

cor : soient trois points dans le plan. ils sont alignés ssi $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

$\Longrightarrow$ CL sur colonne donne colonne nulle. $\Longleftarrow$ OPS les 3 points $\neq$. les deux premiers points donnent une droite qui rencontre l'un des plans $x = x_3$ ou $y = y_3$. Mettons que ce soit le premier. Notons y l'ordonée du point d'intersection. Par sens direct, le det est nul. Or c'est une eqtion du 1ier degré en y dont le det est non nul (car deus premiers points distincts), donc il y aune unique solution, d'où $y = y_3$.

On rajoute une dimensison : la condition dit que les trois vecteurs sont coplanaires. Leurs extrémités appartient à un plan en 0 distinct de (Oxy),

démo :

en dim 2, une base affine est un triangle ! les coordonnées barycentriques sont très utiles.

eg : O, G, H, I.

exo : soit a, b, c les coordonnées barycentriques de trois points du plan. Mq ils sont ailgnés ssi leur det est nul.

dem : $\Longrightarrow$ écrivons $c = \lambda a + \beta\mu$, doù det nul. $\Longleftarrow$ on fait CL des colonnes, on est ramené au critère donné plushaut dans le repère a, ab, ac.

exo : soient trois droites d'équation $ax + by + c = 0$ (avec des $'$ et $''$). Mq elles sont parallèles ou concourantes ssi le det de a, b, c est nul.

$\Longrightarrow$ si parallèle, les vecters (a,b) sont colin, donc la matrices 2×3 est de rang 1, donc les deux colonnes sont colinéaire, donc le det est nul. Si conconrarante, on a une solution $(x,y,1)$ non nulle, d'où det nul.

$\Longleftarrow$ soit (x,y,z) une solution. si $z \neq 0$, on a un point $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ de concours. Sinon, la matrice 2×3 est de rang 1, donc colonne liées, ie droites parallèles.

Repère affine : couple (ω, β) où ω point et β base de V.

matrice de a dans(ω,β) : c'est $\mathrm{Mat}_\beta\left(\overrightarrow{\omega a}\right)$

coordonnée d'un point dans un repère, d'un vecteur dans une base.

changmet base : soit X =coor de a dans (ω,β), pareil avec des $'$, $P = \mathrm{Pass}\left(\beta,\beta'\right)$, $\Omega = \left[\overrightarrow{\omega\omega'}\right]_\beta$. Alors

$$X = PX' + \Omega$$

dem :

$$X = \underset{\omega,\beta}{\mathrm{Mat}}\, a = \underset{\beta}{\mathrm{Mat}}\, \overrightarrow{\omega a} = P \underset{\beta'}{\mathrm{Mat}}\, \overrightarrow{\omega a} = P \underset{\beta'}{\mathrm{Mat}} \left(\overrightarrow{\omega' a} + \overrightarrow{\omega\omega'}\right) = PX' + P\left[\omega\omega'\right]_{\beta'}.$$

4 Applications affines

4.1 Généralités

Poser que les morphismes sont ceux qui préservent le barycentre, puis introduire le critère affine = linéaire + cst (f affine ssi $\exists\omega, f \in L\left(\overrightarrow{A_\omega}, \overrightarrow{B_{f(\omega)}}\right)$, ie linéaire à une translation près), puis la partie linéaire pour un critère pratique ($\overrightarrow{f(\omega)\cdot} \circ f \circ \overrightarrow{\cdot\omega}$ idp de ω et noté $\overrightarrow{f}$)

notation : $\mathcal{A}(A,B)$ (comme $\mathcal{L}(E,F)$)

En passant au linéaire, une application affine s'écrit $f = f(0) + \overrightarrow{f}$.

eg : les applications linéaires, les translation (qui permettent de retrouver tout le monde)

prop : $\overrightarrow{f(a)f(b)} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{ab}\right)$, $\overrightarrow{gf} = \overrightarrow{g}\overrightarrow{f}$.

Prop : Une aa est entèrment détemrinanée par l'image d'un point et par sa partie liénaire $f(\omega+u) = f(\omega) + \overrightarrow{f}(u)$

cor : $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$ ssi f translation (posons $u = \overrightarrow{af(a)}$: alors f et t_u coincident en a et ont meme ala)

EXO : f affine commute aux translations ssi f translations ($f(0) + \overrightarrow{f}(u) = f(0) + u$, d'où $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$)

Cor (image d'un sea) : $f\left(a + \overrightarrow{A}\right) = f(a) + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{A}\right)$

rq : la préimage d'un sea A par f est un sea de direction la préimage de $\overrightarrow{A}$ par $\overrightarrow{f}$

une aa conserve alignement et parallélisme

(on peut montre que conserver l'alignement suffit : une telle app est appelée *collinéation* par Gonseth)

Fix f est un sea dirigé par Fix $\overrightarrow{f}$ (ou vide)

IMP prop : soit ω et f aa. Il y un unique (u, f_ω) tq $f = t_u f_\omega$ et ω fixe par f_ω.

Ainsi, puisque $f_\omega(\omega+u) = \omega + \overrightarrow{f}(u)$, l'action de f se confond (modulo une translation) avec celle de sa partie linéaire

$[f(a)]_{\omega,\beta} = \left[\overrightarrow{f}\right]_\beta [a]_{\omega,\beta} + [f(\omega)]_{\omega,\beta}$

demo : partons de droite : $= \left[\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{\omega a}\right) + \overrightarrow{\omega f(\omega)}\right]_\beta = \left[\overrightarrow{\omega f\left(\omega + \overrightarrow{\omega a}\right)}\right]_\beta = \left[\overrightarrow{\omega f(a)}\right]_\beta$.

4.2 groupe afffine, groupe des translation-homothéties

rq : f inj/surj/bij ssi $\overrightarrow{f}$ inj/surj/bij.

iso & tranformation/auto affines : $GA(A)$

$f \in GA$ ssi $\overrightarrow{f} \in GL$, $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$

COR : $A \longrightarrow L$ morphsimes de monoides induit morphismes de groupes $GA \simeq GL/$translations.

Groupes des homothéties/translations : c'est le sg prémiage des $\lambda\,\mathrm{Id}$ ($\lambda \neq 0$) par $f \mapsto \overrightarrow{f}$ (de GA dans GL)

Plus précisément : le produit de deuxhomo de rapports λ et μ est une homothétie de rapport $\lambda\mu \neq 1$ ou une tranlsation si $\lambda\mu = 1$.

4.3 Quelques aa

Tous les noms affines sont calqués sur le linéaire :

homothétie, symétries, projecteur, et affinités en général : tous des cas de $u \oplus v$ où $\overrightarrow{A} \oplus \overrightarrow{B} = V$; on vectorialise en $A \cap B$), et $\overrightarrow{aff_{A,B,\lambda}} = aff_{\overrightarrow{A},\overrightarrow{B},\lambda}$.

homothétie de rapport $\neq 0$ (car on va vouloir une transfo) de centre ω, $\overrightarrow{h_{\omega,\lambda}} = h_\lambda = \lambda \,\mathrm{Id}$

projecteur :

symétrie :

Thalès : soit trois Hp parallèle, deux droites D et D' non parallèle aux HP qui les recoupent en A, A', B, B', C, C'. Si $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$.

Dem : soit p proj sur (β) para à H. Alors $M \mapsto M'$, donc $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{AC}\right) = \lambda \overrightarrow{p}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \lambda \overrightarrow{A'B'}$.

réciproque : si $(AA') \parallel (BB')$ et $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$, alors $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$.

démo : méthode de la *fausse position* (cf wiki pour détails) : utiliser le sens direct pour la réciproque : Soit C'' le point d'inter de $(A'B')$ et la parallèle à $(AA') \parallel (BB')$ en C. Alors thalès dit que $\overrightarrow{A'C''} = \lambda \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'C'}$, d'où $C'' = C'$.

Ceva ? menelaus ? (gén en dim ≥ 3)

5 Convexité

enveloppes convexes, hyperplan d'appui, points extrémaux ("bases barycentriques"),

Krein-Millmann

Soit K notre corps convexe . On montre $K = \mathrm{Conv}\,\mathrm{Extr}\,(K)$ par récurrence sur la dimension n de E.

Si $n = 1$, K est un segment $[a, b]$, et il est clair que $\mathrm{Conv}\,\mathrm{Extr}\,[a, b] = \mathrm{Conv}\,\{a, b\} = [a, b]$.

Supposons le résultat acquis pour $n - 1 \geq 1$. Nous allons montrer que $\mathrm{Fr}\,K \subset \mathrm{Conv}\,\mathrm{Extr}\,(K)$, ce qui conclura puisque $K = \mathrm{Conv}\,\mathrm{Fr}\,K$. Soit donc $a \in \mathrm{Fr}\,K$ et H un hyperplan d'appui en a. On applique l'hypothèse de récurrence au corps convexe $K \cap H = \mathrm{Conv}\,\mathrm{Extr}\,(K \cap H)$. Nous allons montrer $\mathrm{Extr}\,(K \cap H) \subset \mathrm{Extr}\,K$, ce qui permettra de conclure

$$a \in K \cap H = \mathrm{Conv}\,\mathrm{Extr}\,(K \cap H) \subset \mathrm{Conv}\,\mathrm{Extr}\,K.$$

Soit donc $e \in \mathrm{Extr}\,(K \cap H)$, et supposons $e = \frac{x+y}{2}$ où $x, y \in K$. Si H est donné par un équation $\varphi(\cdot) = \lambda$ avec $\varphi(K) \geq \lambda$, on en déduit $0 = \varphi(e) - \lambda = \frac{\varphi(x)-\lambda}{2} + \frac{\varphi(y)-\lambda}{2} \geq 0$ avec égalité ssi $\varphi(x) = \varphi(y) = \lambda$ (mais alors x et y sont dans $K \cap H$ et on conclut en invoquant l'extrémalité de e).

5.1 Tout convexe se plonge dans un ea

Soit C un truc où on peut faire des segments (barycentre à coef dans $[0, 1]$). Montrons qu'il se plonge dans un R-ea. On plonge C dans $\mathrm{Aff}\,C$ quotienté par bar $\begin{matrix} a & b \\ 1 & 1 \end{matrix} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$. Alors les barycentres de $\mathrm{Aff}\,C$ passent au quotient par associativité, d'où encore une structure affine.

6 Topologie des espaces affine

Si $\overrightarrow{A}$ est normé, on met une distance sur A par $ab = \|a - b\|$.

PROP : les voisinages d'un point b sont les translatés de ceux de a par $\overrightarrow{ab}$

PROP : si A est vectoriel, la distance ci-dessus est normable, et de

7 Tout ea se réalise comme hyperplan affine d'un ev

Soit A affine.

Analyse : supposons A hyperplan affine non vectoriel d'un ev V. TOut vecteur de v est alors ou bien parallèle à H, ou bien un homothété non nul d'un point de H, ce qui s'écrit $V = \overrightarrow{H} \cup K^* H$. La décomposition λh étant en fait unique (H n'est pas vectoriel), le terme de droite s'écrit $\overrightarrow{H} \cup (K^* \times H)$, ce qui ne fait plus du tout appel à V. Par ailleurs, l'action des homothéties est claire, $\overrightarrow{H}$ est stable par somme, presque $K^* H$ (si les scalaires sont opposés, on tombe dans $\overrightarrow{H}$).

Synthèse : on va poser $V_A = \overrightarrow{A} \cup (K^* \times A)$ et mettre les lois qui découle de l'analyse. Par commodité, on va voir V_A dans l'ev $\overrightarrow{A}^A$ des champs de vecteurs sur A.

$\overrightarrow{A}^A$ contient des champs constants $a \mapsto \overrightarrow{u_0}$ et les champs centraux $\lambda \cdot \overrightarrow{\omega}$ pour $\lambda \neq 0$. Leur réunion V_A (Ensemblistement $\overrightarrow{A} \cup (K^* \times A)$) est en fait un sev : clairement stable par homothétie, somem de deux constant est un constant, somme de deux centraux est centrale ssi somme poids $\neq 0$ et constante sinon, $u + \lambda \cdot \overrightarrow{a}$ s'écrira $\lambda \cdot \overrightarrow{b}$ ssi $u = \lambda \overrightarrow{ab}$ ie ssi $b = a + \frac{u}{\lambda}$.

On en déduit que l'application $\varphi : \begin{array}{cc} V_A & K \\ \overrightarrow{u_0} & 0 \\ \lambda \cdot \overrightarrow{\omega} & \lambda \end{array}$ est une forme linéaire. On réalise alors A dans V_A via les champs centraux de rapport 1, autrement dit comme l'hyperplan $\varphi \equiv 1$.

Noter que $\overrightarrow{A}$ se voit comme le noyau $\operatorname{Ker} \varphi$. On en ddéuit $V_A = \overrightarrow{A} \oplus K a$ pour tout point $a \in A$ (puisuqe tout a est toujours hors de $\operatorname{Ker} \varphi$)

Réciproquement, soit V ev et H hyperplan affine. La décomposition $V = \overrightarrow{H} \cup K^* H$ est claire. Elle montre que V_H est naturellement isomorphe à V par $\begin{array}{ccc} a \in \overrightarrow{H} & \longmapsto & a \\ (\lambda, h) & \longmapsto & \lambda h \end{array}$

Aspect fonctoriel ?

8 Tout ea se plonge dans un projectif

Soit A affine et V_A son vectoreil dont A est hyperplan affine. On prend alors $\mathbb{P}(V_A)$ dont le sev ∞_A est l'hyperplan $\mathbb{P}\left(\overrightarrow{A}\right)$ à l'infini.

Réciproquement, si H hyperplan de V, alors $\mathbb{P}(V) \backslash \mathbb{P}(H)$ est ensemblistement le A_H du début du cours, qui est un ea pour l'action de H isomorphie à tout Hp parallèle à H.

Chemin inverse ? Soit V ev et $\overrightarrow{H}$ hypoerplan vectoriel. Alors $\overrightarrow{H}$ agit sur A_H et en fait un ea, auquel tous les Hp de direction $\overrightarrow{H}$ sont isomorphes. On peut en part

a-t-on une "équivalence" $\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & \left(\overrightarrow{A}, P(V_A)\right) \\ A_H & \longleftarrow & (H, P(V)) \end{array}$ et $(\mapsto,)$

9 Définir un barycentre donne la structure d'ea

Un espace affine est le cadre théorique minimal pour définir la notion de barycentre –> convexité...

Soit X un ensemble. On note X_n l'ensemble des n-uplets de points de X pondérés dont la somme des poids fait 1.

On se donne des applications

$$\begin{array}{ccc} X_n & \longrightarrow & X \\ (a_i, \lambda_i) & \longmapsto & \operatorname{bar} \begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_n \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{array} \end{array}$$

vérifiant les axiomes suivants :

IDENTITE : $\operatorname{bar}\begin{matrix} a \\ 1 \end{matrix} = a$

COMM : $\forall \sigma \in S_n$, $\operatorname{bar}\begin{matrix} a_{\sigma(1)} & \cdots & a_{\sigma(n)} \\ \lambda_{\sigma(1)} & \cdots & \lambda_{\sigma(n)} \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{matrix}$

NEUTRE : $\sum \nu_i = 0 \implies \operatorname{bar}\begin{matrix} \omega & \cdots & \omega & a_1 & \cdots & a_n \\ \nu_1 & \cdots & \nu_p & \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{matrix}$

ASSOC : $\operatorname{bar}\begin{matrix} \operatorname{bar}\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_p \end{matrix} & b_1 & \cdots & b_q \\ \mu & \mu_1 & \cdots & \mu_q \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a_1 & \cdots & a_p & b_1 & \cdots & b_q \\ \lambda_1\mu & \cdots & \lambda_p\mu & \mu_1 & \cdots & \mu_q \end{matrix}$ (pour $q = 0$, on a $\mu = 1$ et on retrouv IDENTITE)

A l'aide de neutre et symétrie, on prolonge identité :

$$\begin{aligned}
\operatorname{bar}\begin{matrix} a & \cdots & a \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{matrix} &= \operatorname{bar}\begin{matrix} a & \cdots & a & a & \cdots & a & a \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n & -\lambda_1 & \cdots & -\lambda_n & \lambda_1 + ... + \lambda_n \end{matrix} \\
&= \operatorname{bar}\begin{matrix} a & a & \cdots & a & a & a \\ \lambda_1 & -\lambda_1 & \cdots & \lambda_n & -\lambda_n & \lambda_1 + ... + \lambda_n \end{matrix} \\
&= \operatorname{bar}\begin{matrix} a \\ \lambda_1 + ... + \lambda_n \end{matrix} \\
&= a.
\end{aligned}$$

En rajoutant une colonne, on aurait montré

$$\operatorname{bar}\begin{matrix} a & \cdots & a & b \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n & \mu \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a & b \\ \lambda_1 + ... + \lambda_n & \mu \end{matrix}.$$

Ainsi, lorsqu'on a un barycentre où des points a_i sont répétés, il suffira les compter chaque a_{i_0} une seule fois avec un poids égal à la somme des poids apparaissant devant a_{i_0}. Par exemple :

$$\operatorname{bar}\begin{matrix} a & b & a & a & b \\ 1 & -3 & -2 & 4 & 1 \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a & b \\ 1-2+4 & -3+1 \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a & b \\ 3 & -2 \end{matrix}.$$

On met une structure d'ev sur X de la manière suivante. On fixe pour la suite ω un point de X et on pose (le poids de ω est juste pour faire une somme égale à 1, moralement $\omega = 0$ et on retrouve le barycentre dans les ev défini par $\operatorname{bar}(a_i, \lambda_i) = \sum \lambda_i a_i$)

$$\begin{cases} a + b := \operatorname{bar}\begin{matrix} a & b & \omega \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \\ \lambda a := \operatorname{bar}\begin{matrix} a & \omega \\ \lambda & 1-\lambda \end{matrix} \end{cases}.$$

Vérifions que X est un groupe additif.
ω est neutre :

$$a + \omega = \operatorname{bar}\begin{matrix} a & \omega & \omega \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a \\ 1 \end{matrix} = a.$$

La loi + est commutative : on utilise la symétrie.
La loi + est associative :

$$(a+b)+c = \operatorname{bar}\begin{matrix} \operatorname{bar}\begin{matrix} a & b & \omega \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} & c & \omega \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a & b & \omega & c & \omega \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a & b & c & \omega \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{matrix}.$$

On en déduit immédiatement :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \operatorname{bar}\begin{matrix} a_0 & \cdots & a_n & \omega \\ 1 & \cdots & 1 & -n \end{matrix}.$$

Tout point a a un opposé :

$$a + \operatorname{bar}\begin{matrix} a & \omega \\ -1 & 2 \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a & \operatorname{bar}\begin{matrix} a & \omega \\ -1 & 2 \end{matrix} & \omega \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} a & a & \omega & \omega \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{matrix} = \operatorname{bar}\begin{matrix} \omega \\ 1 \end{matrix} = \omega.$$

Vérifions les axiomes d'un espace vectoriel.

1 est neutre :

$$1a = \operatorname{bar} \begin{array}{cc} a & \omega \\ 1 & 1-1 \end{array} = \operatorname{bar} \begin{array}{c} a \\ 1 \end{array} = 0.$$

Associativité :

$$\lambda\,(\mu a) = \operatorname{bar} \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} a & \omega \\ \mu & 1-\mu \end{array} & \omega \\ \lambda & 1-\lambda \end{array} = \operatorname{bar} \begin{array}{ccc} a & \omega & \omega \\ \lambda\mu & \lambda-\lambda\mu & 1-\lambda \end{array} = \operatorname{bar} \begin{array}{cc} a & \omega \\ \lambda\mu & 1-\lambda\mu \end{array} = (\lambda\mu)\,a.$$

Distributivité :

$$(\lambda+\mu)\,(a+b) = \operatorname{bar} \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} a & b & \omega \\ 1 & 1 & -1 \end{array} & \omega \\ \lambda+\mu & 1-\lambda-\mu \end{array} = \operatorname{bar} \begin{array}{cccc} a & b & \omega & \omega \\ \lambda+\mu & \lambda+\mu & -\lambda-\mu & 1-\lambda-\mu \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lambda a+\lambda b+\mu a+\mu b &= \operatorname{bar} \begin{array}{ccccc} \operatorname{bar} \begin{array}{cc} a & \omega \\ \lambda & 1-\lambda \end{array} & \operatorname{bar} \begin{array}{cc} b & \omega \\ \lambda & 1-\lambda \end{array} & \operatorname{bar} \begin{array}{cc} a & \omega \\ \mu & 1-\mu \end{array} & \operatorname{bar} \begin{array}{cc} b & \omega \\ \lambda & 1-\lambda \end{array} & \omega \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array} \\ &= \operatorname{bar} \begin{array}{ccccccccc} a & \omega & b & \omega & a & \omega & b & \omega & \omega \\ \lambda & 1-\lambda & \lambda & 1-\lambda & \mu & 1-\mu & \mu & 1-\mu & -3 \end{array} \end{aligned}$$

et les poids sont les mêmes une fois regroupés : (encore une fois, seul les poids devant a et b sont pertinents, celui de ω est là pour contrebalancer)

$$\operatorname{bar} \begin{array}{ccc} a & b & \omega \\ \lambda+\mu & \lambda+\mu & 1-2\lambda-2\mu \end{array}$$

Notons $\overrightarrow{X}$ l'ev ainsi créé (qui dépend du point ω) on l'appelle le *vectorialisé* de X (en ω). Bien noter qu'ensemblistement X et $\overrightarrow{X}$ sont identiques. Un point $a \in X$ pourra être vu comme un vecteur en le reliant à l'origine ω choisie.

L'ensemble X étant vectorialisé, il est naturel de définir l'application flèche par

$$\begin{array}{ccc} X^2 & \longrightarrow & \overrightarrow{X} \\ (a,b) & \longmapsto & b-a \end{array}.$$

Il est alors clair que l'application $\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \overrightarrow{X} \\ x & \longmapsto & \overrightarrow{ax} \end{array}$ est bijective d'inverse $x \mapsto x+a$.

On retrouve enfin la définition habituelle du barycentre. Pour $\sum \lambda_i = 1$, on a bien (on peut choisir n'importe quelle origine, donc autant prendre ω qui est le vecteur nul)

$$\begin{aligned} \omega + \sum \lambda_i \overrightarrow{\omega a_i} &= \sum \lambda_i a_i = \operatorname{bar} \begin{array}{cccc} \operatorname{bar} \begin{array}{cc} a_1 & \omega \\ \lambda_1 & 1-\lambda_1 \end{array} & \cdots & \operatorname{bar} \begin{array}{cc} a_n & \omega \\ \lambda_n & 1-\lambda_n \end{array} & \omega \\ 1 & \cdots & 1 & -(n-1) \end{array} \\ &= \operatorname{bar} \begin{array}{cccc} a_1 & \cdots & a_n & \omega \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n & \sum(1-\lambda_i)-(n-1) \end{array} = \operatorname{bar} \begin{array}{cccc} a_1 & \cdots & a_n & \omega \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n & 0 \end{array} = \operatorname{bar} \begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_n \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \end{array}. \end{aligned}$$

Conclusion : les espaces affines sont le cadre minimal où l'on peut définir la notion de barycentre ayant les axiomes énoncés au début.