Groupes symétriques
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Pourquoi les groupes symétrique et alterné s'appellent-ils ainsi ?

Le groupe symétrique associé à n objets x1, ..., xn est le groupe de leurs permutations, et le groupe alterné en est le sous-groupe formé des permutations paires. Une fonction symétrique de ces n objets est par définition invariante lorsqu'on permute deux de ces objets (donc invariante par transposition), et donc aussi par toutes les permutations du groupe symétrique (car les transposition l'engendrent) ; une fonction alternée est par contre une fonction qui change de signe quand on permute deux objets : le groupe des permutations laissant invariantes les fonctions alternées est donc le groupe des permutations paires.

Le groupe symétrique est associé aux fonctions symétriques, le groupe alterné aux fonctions alternées : voilà l'explication.

BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF BOF

Une symétrie est une tranformation laisant invairant une propriété.

Uen tranfomration smple sur des ensembles simples (=fini) est permuter deux éléments

intro : groupes de symétries de tétraèdre et triangles (et ?)

conjugaision : $E \overset{\varphi}{\simeq} F \implies \begin{matrix} \mathfrak{S}_E & \mathfrak{S}_F \\ \sigma & \varphi\sigma\varphi^{-1} \end{matrix}$. Les élemnts de E ou F sont numérotés ou coloriés. on permute les numéros ou les couleurs.

Une permutation est entièrement détemrinée par son action sur son support. Si $\sigma \in S_A$, alors σ peut être vue dans S_X pour tout $X \supset A$.

Une partie est fixe ssi elle est disjointe du support.

deux points de vue pour décrire les permutations

1) le point du vue dynamique : itérer un point, on trouve la décomposition en cylces à supports disjoints (termes d'orbites). Cool : aisé et ca commute

2) par générateurs : algorithme pour décomposer en moins de n transpositions. Exemple des cycles. Pas clair (pas facile d'évaluer un pordtui de transpositions) et ca commute pas

invariant : partité de nombre de transpositions utiliés -> piremière def de la signature : $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\#\text{transpositions}}$

Puis on intuite que 1 tranpostion = 1 inversions, d'où $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\#\text{inversions}} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$.

Point de vue algébrique : unique morphisme non trivail de $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathbb{C}^*$.

1 et 2) En utilisant $\varepsilon(\gamma) = (-1)^{l(\gamma)-1}$ et caractère morphisque, on trouve

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-\#\text{orbites}} = (-1)^{\#\text{support}-\#\text{cycles}}.$$

Puis introduire la signature et les transpositions comme un outil de travail.

Un transposition correspond à une inversion !

Expliquer d'où vient la signature. Ne caractérise pas, mais trie quand même.

définir l'ordre d'un élément sous l'action d'un $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$.

Une orbite pour cette action est soit Z, soit un cycle.

Décompstion en cycls à supports disjointss : suppposons $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$. Alors les orbites de σ sont les supports des γ_i et les γ_i coincidena vec σ sur ces derniers. Récirpoquement, soit $\sigma \in S_n$ et $\Omega_1, ...\Omega_r$ ses orbites. on pose γ_i comme σ sur Ω_i et Id ailleurs. Vérifier.

les générateurs !

Pourquoi groupe **alterné** ? POur son cardinal, soit th iso groupes, soit bij en translatant par transposition

Formule de conjugasion vraiment importante

eg de calcul : $(a,b)(b,c) = (a,b,c)$ (chasles)

plus général : $(a,b,c,...,z) = (a,b)(b,c)(c,d)...(y,z)$

Mais autre décomposation : prendre un point comme pivot $= (a,b)(a,c)(a,d)...(a,z)$ (ou autre sens)

Construction des multi-ensembles