Nombres réels
(version chantier)

Marc SAGE

22 avril 2007

Table des matières

1 Injection de $\mathbb{R}$ dans ${}^{\mathbb{R}}\!\diagup_{\mathbb{Q}}$

1 $\left\{\begin{array}{ccc}]1,\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \alpha & \longmapsto & \sum_{n>1} \frac{1}{10^{\lfloor \alpha^n \rfloor}} \end{array}\right.$ Observons déjà que l'application donnée est injective (comparer les développements décimaux qui sont de plus en plus creux). Il s'agit de montrer que l'injectivité passe au quotient à l'arrivée, *i. e.* de montrer que la différence de deux réels de la forme $\sum_{n>1} \frac{1}{10^{\lfloor \alpha^n \rfloor}}$ ne peut être un rationnel. Mais le développement décimal d'un rationnel est périodique à partir d'un certain rang, ce qui permet de conclure

On pourra également invoquer la tranformation suivante sur les développements décimaux :

$$0, abcde... \mapsto 0, a\ ab\ abc\ abcd\ ...$$

2 On rappelle que $\mathbb{R} = P(\mathbb{N})$. Alors $A \mapsto \sqrt{2} \sum_{a \in A} \frac{1}{10^{a!}}$ fonctionne. Soit $A \neq B$. Si $A\Delta B$ est finie, $f(A) - f(B)$ vaut $\sqrt{2}$ fois un rationnel, donc est irrationnel, donc non nul modulo $\mathbb{Q}$. Si $A\Delta B$ est infinie, $f(A) - f(B)$ vaut $\sqrt{2}$ fois une somme de $\frac{1}{10^{c!}}$ à coefs dans $\{-1, 0, 1\}$, donc un truc de Liouville, donc transcandant, donc le produit de peut être rationnel.

3 soit D une suite dense dans $[0, 1]$ et $A_d \simeq R$ autour de chaque $d \in D$ tq les A_d sont disjoints. Alors en les recollant (ils partiooennt $[0, 1]$), on conclut. Pour avoir de tels A_d, ? ? ? ? ? ?

2 Une partie indénombrable admet un point de condensation

On considère A une partie indénombrable (infinie) de R.

1. Montrer que A admet un point d'accumulation, i. e. n'admettant aucun voisinage fini
2. Montrer que A admet un point de condensation, i. e. d'admettant aucun voisinage au plus dénombrable.

1. Supposons A sans point d'accumulation et mq A dem. à tout $a \in A$ il y a un voisinage avec que lui même, on pioche un rationnel dedans.
2. Supposons A sans point de condensation. Pour $a \in A$, tous ses voisinages sont dénombrables. On en choisit un V_a dans une classe dénombralbe (par eg un intervalle à bornes rationnels), d'où $A \subset \bigcup V_a$ au plus dénombrable.

3 Sur les parties entières

mq $\sum_{0 \leq i < n} \left\lfloor x + \frac{i}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$ et $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$

$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$, d'où $\sum \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$.

4 Théorème de Beatty

Soient a et b deux réels > 1. On pose $\left\{\begin{array}{l} A = \{\lfloor na \rfloor\ ;\ n > 0\} \\ B = \{\lfloor nb \rfloor\ ;\ n > 0\} \end{array}\right.$. *Montrer que A et B partionnent $\mathbb{N}^*$ ssi a et b sont irrationnels et vérifient*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

On pourra introduire la densité d'une partie P de $\mathbb{N}$ définie (lorsqu'elle existe) par

$$d(P) := \lim_{n\infty} \frac{\operatorname{Card}(P \cap \{1, ..., n\})}{n}.$$

Solution proposée.

Au vu de l'indication proposée, il est naturel de trouver la densité des parties A et B. Dans un intervalle $\{1, ..., n\}$, A contient les entiers

$$\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor, ..., \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor a \right\rfloor,$$

et le prochain vérifie

$$\left\lfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor + 1 \right) a \right\rfloor = \left\lfloor \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor a + a \right\rfloor$$

De plus, si A et B sont disjointes, il est clair que $A \cup B$ admet une densité $d(A) + d(B)$.

Ainsi, si A et B partitionnent $\mathbb{N}^*$, on doit avoir

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = d(A \cup B) = d(\mathbb{N}^*) = 1.$$

Par ailleurs, la relation ci-dessus nous dit que a et b ont même "caractère rationnel" ; si les deux étaient dans $\mathbb{Q}$, mettons $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{r}{s}$, alors $A \cap B$ contiendrait l'entier $\lfloor rq\ a \rfloor = \lfloor ps\ b \rfloor$, ce qui n'est possible.

Partons de l'autre sens. Montrons déjà que A et B sont disjoints. S'il contiennent tous deux un entiers $k = \lfloor na \rfloor = \lfloor mb \rfloor$, par définition de la partie entière on doit avoir

$$k \leq na, mb < k + 1,$$

d'où, en divisant par a et b et en sommant :

$$k = \frac{k}{a} + \frac{k}{b} \leq n + m < \frac{k+1}{a} + \frac{k+1}{b} = k + 1.$$

Puisque n et m sont entiers, on doit avoir égalité $n + m = k$. Ceci force les égalités à gauce, *i. e.* $na = k = mb$, d'où a et b rationnels, ce qui contraire aux hypothèses.

5 Détermination d'un sup

Soit α un irrationnel. Calculer

$$\sup_{n \in N} \min_{p+q=n} |p - \alpha q|.$$

réponse : $\frac{\alpha+1}{2}$

6 Une injection particulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$

Construire une injection $\iota : \mathbb{R} \longrightarrow \mathfrak{P}(\mathbb{N})$ tel que $\iota(a)$ soit infini pour tout réel a et tel que $\iota(a) \cap \iota(b)$ soit fini pour tous réels $a \neq b$.

Analyse 1 exo 1.4

7 Une somme qui se simplifie

Calculer $\sum_{n \geq 0} \left\lfloor \frac{a}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ pour tout réel $a > 0$.

Analyse 1 exo 1.4

8 Développement d'Engel

Analyse 1 exo 1.6

9 Développement egyptiens

10 Sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Analyse 1 exo 1.13

11 Écriture des réels de $]0, S[$ à l'aide d'une série de somme S

Soit (a_n) une suite décroissante de réels > 0. On note S la somme $\sum_{n\geq 0} a_n$, laquelle peut être infinie. Donner une CNS pour que tout réel de $]0, S[$ s'écrive $\sum_{n\geq 0} a'_n$ où la suite (a'_n) est extraite de a_n. Donner une CNS pour que cette écriture soit unique.
Analyse 1 exo 1.7

12 Du principe des tiroirs

Soit a_0, ..., a_{12} treize réels distincts. Montrer que l'on peut piocher en deux, mettons a_i et a_j, tels que

$$0 < \frac{a_i - a_j}{1 + a_i a_j} < 2 - \sqrt{3}$$

Analyse 1 exo 1.14
(variante dans JNC OIM allemandes)

13 Une inégalité par les inf

On ne considère ici que des réels strictement positifs.
On définit $M_{\overrightarrow{a}} := \left\{\frac{1}{n}\sum \lambda_i a_i \ ; \ \prod \lambda_i = 1\right\}$.
Montrer que $\inf M_{\overrightarrow{a}} = \sqrt[n]{\prod a_i}$. En déduire

$$\sqrt[n]{\prod a_i} + \sqrt[n]{\prod b_i} \leq \sqrt[n]{\prod (a_i + b_i)}$$

retrouver ce résultat directement

clair que $\inf M_a \geq \sqrt[n]{\prod a_i}$ par IAG, et on a égalité pour $\lambda_i = \frac{1}{a_i}\sqrt[n]{\prod a_j}$.
Ensuite, clair que $M_{a+b} \subset M_a + M_b$, d'où le résultat en prenant les inf.

Soyons élégant : l'inégalité est homogène en chaque couple (a_i, b_i), donc on peut supposer $a_i + b_i = 1$. Il ne reste plus qu'à invoquer deux IAG pour conclure :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdots b_n} \leq \frac{\sum a_i}{n} + \frac{\sum b_i}{n} = \frac{\sum (a_i + b_i)}{n} = 1, \ \textit{CQFD}.$$

voir feuile sur convexité pour (bien) d'autres solutions.

14 Un inf tiré du CG

trouver inf $\left\{a^b+b^a\right\}$

homogénéité -> poser $b=ta$ avec $t>1$ par smétrique de a et b.

15 Vers le diamètre transfini

1. Soit f une application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ symétrique. Pour $\overrightarrow{a}\in\mathbb{C}^n$, on note G_n la moyenne géométrique des $n(n-1)$ termes $f(a_i,a_j)$ pour $i\neq j$.
   Montrer que la suite $s_n:=\sup_{\mathbb{C}^n}G_n$ *est décroissante sur* $\mathbb{N}^*$.
2. Soit V une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Montrer la décroissance de la suite
$$n\longmapsto\sup_{\overrightarrow{a}\in\mathbb{C}^n}\frac{\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{i<j}|a_i-a_j|}}{\exp\left(\frac{V(a_1)+\cdots+V(a_n)}{n}\right)}.$$
3. Soit A un partie du plan. Montrer la convergence de
$$n\longmapsto\sup_{\overrightarrow{a}\in A^n}\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{i<j}|a_i-a_j|}.$$

   Commenter.

Solution proposée.
Soit $n\geq0$. Notons pour alléger $(g,G,s):=(G_n,G_{n+1},s_n)$. Fixons $\overrightarrow{a}\in\mathbb{C}^n$. Il s'agit de montrer $G\leq s$, ce qui concluera en prenant le supremum.
Par définition, on a
$$G^{n(n+1)}=\prod_{i\neq j}\omega(a_i,a_j).$$
Pour récurrer, on choisit un k et on sépare les facteurs faisant intervenir k des autres :
$$G^{n(n+1)}=\prod_{\substack{i\neq j\\ i,j\neq k}}\omega(a_i,a_j)\times\left(\prod_{i\neq k}\omega(a_i,a_k)\right)^2.$$
Le facteur de gauche est le g associé aux n variables $(a_i)_{i\neq k}$ élévé à la puissance $n(n-1)$, donc est majoré par s. Le facteur de droite n'est pas symétrique : faire le produit sur k nous redonne $G^{n(n+1)}$ au carré, d'où
$$\left[G^{n(n+1)}\right]^{n+1}\leq\left[s^{n(n-1)}\right]^{(n+1)}\left[G^{n(n+1)}\right]^2.$$
On simplifie les puissances par $n(n+1)$, d'où $G^{n+1}\leq s^{n-1}q_n^2$, ie $G^{n-1}\leq s^{n-1}G^2$, ie $G\leq s$, CQFD.

pour l'applicatio, il suffit de trouver un f symétrique tel que $\frac{\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{i<j}|a_i-a_j|}}{\exp\left(\frac{V(a_1)+\cdots+V(a_n)}{n}\right)}=\prod_{i\neq j}f(a_i,a_j)$. D'aune part Le numérateur est la moyenne géométrique des $|a_i-a_j|$ pour $i\neq j$, d'autre part Pour le terme $\exp\left(\frac{V(a_1)+\cdots+V(a_n)}{n}\right)$, il suffit d'écrire $\sum V(a_i)$ comme une somme symétrique sur les $i\neq j$, par exemple A_n comme moyenne arithmétique des $n(n-1)$ termes $\frac{f(a_i)+f(a_j)}{2}$.

Prenndre V nulle sur A et ∞ ailleurs
Pour $n=2$, la quantité $\sup_{\overrightarrow{a}\in A^n}\sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{i<j}|a_i-a_j|}$ s'écrit est le diamètre de$A$. On a donc une génér-liséton, la racine étant là pour des question d'homogéniné (on a bien une distance). On l'appelle le *diamètre d'ordre*[1] n de A . On vient de montrer que d_n décroisant, donc cv vers le *diamètre transfini*[2] de A.

[1] *cf.* feuille sur les espaces préhilbertiens pour le calcul des diamètres du cercle unité
[2] *cf.* seconde feuille sur les déterminants pour quelques compléments