

Divers

Marc SAGE

Table des matières

1	bijection entre R et R/Q	2
2	mesure nulle et continu	2
3	Un exo rigolo sur les décimales	2
4	Poussière de Cantor	2
5	Surjection de cantor sur $\mathbb{R}$	3
6	$\mathbb{R}^a \simeq \mathbb{R}^b \implies a = b$	3

1 bijection entre R et R/Q

une telle bijection ne peut être mesurable.

En effet, si f réelle mesurable a pour période un sg dense, alors f constante modulo un négligaeable, donc n'est pas injective.

Preuve : par Fourier. Quitte à considérer $\max\{|f|, 1\}$, OPS $0 \leq f \leq 1$. Donc f est L^1 sur R/Z . Si f a deux périodes de rapport irrationnel, alors tous les coef de Fourier sont nuls (sauf le cst), donc la série est cst, donc f cst. Sinon, on peut supposer que f un un rationnel abritrement petit pour période; or, $\frac{*}{q}$ période $\Rightarrow (c_n f \neq 0 \Rightarrow q \mid n)$, donc en prenant q assez grand même conclusion.

Conclusion : sans AC, pas d'injection de R/Q dans Q (si on suppose IC afin de montrer la consistance relative de non(AC)).

2 mesure nulle et continu

Est-ce qu'une partie de R de mesure de Lebesgue non nulle a forcément le cardinal du continu ?

Où, ça c'est vrai : tout Lebesgue-mesurable peut s'écrire comme la réunion d'un borélien (même un F_σ , i.e., une réunion dénombrable de fermés) et d'un ensemble de mesure nulle. Or un borélien est soit au plus dénombrable soit a la puissance du continu.

En revanche, il est consistant que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ et que toute partie de R ayant cardinal strictement moins que $2^{\aleph_0}$ soit de mesure nulle. Donc « indénombrable et Lebesgue-mesurable » n'implique pas « ayant la puissance du continu », contrairement à « indénombrable et borélien ».

Est-il consistant avec $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ qu'il existe une partie de cardinal $\aleph_1$ non Lebesgue-mesurable? (i.e. non incluse dans un borélien de mesure nulle) ?

Où, c'est aussi possible : précisément, dans le modèle qui rajoute à l'univers constructible κ réels aléatoires, avec κ un cardinal régulier indénombrable, on a $2^{\aleph_0} = \kappa$, et l'ensemble des réels constructibles (qui est de cardinal $\aleph_1$) n'est pas mesurable. (En fait, en toute généralité, l'ensemble des réels constructibles est de cardinal $\aleph_1$ et doit soit (a) être R tout entier, soit (b) être de mesure nulle, soit (c) être non mesurable.)

david, Yves, 8-11-2007

3 Un exo rigolo sur les décimales

montrer que tout réel peut être approché avec une précision arbitraire par un réel « décimal » (i.e. ayant un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule, i.e. 10-adique) dont l'inverse est encore un réel « décimal ». Décrire une procédure explicite pour trouver ces approximations.

En déduire une supériorité de la base 10 sur la base 8 (par exemple).

4 Poussière de Cantor

Rappelons à ceux qui disent des choses bizarroïdes que l'on peut construire ainsi l'ensemble de Cantor :

On prend $F_0 = [0, 1]$. F_n s'écrit comme réunion de segments disjoints, on construit F_{n+1} en faisant l'opération suivante sur chaque segment $[a, b]$ donne $[a, a + \frac{b-a}{3}] \cup [a + 2\frac{b-a}{3}, b]$.

L'ensemble de Cantor (que je note F) est ensuite l'intersection décroissante des F_n .

C'est donc un compact, de plus, à chaque fois, on multiplie par $\frac{2}{3}$ la mesure de l'ensemble, ce qui permet de voir que F est de mesure nulle.

De plus, tout élément de F peut s'écrire sous la forme d'une série : $\sum_{k \geq 1} \frac{2\varepsilon_k}{3^k}$ avec $\varepsilon_k = 0$ ou 1.

De plus, il y a unicité des coefficients ε_k , ce qui me permet de dire que F a la puissance de $2^{\aleph}$ qui est la puissance du continu.

5 Surjection de cantor sur $\mathbb{R}$

Euh, il me semble qu'on construit aisement une bijection (ou au moins une surjection) explicite (sans meme utiliser l'axiome du choix sauf erreur) de Cantor dans $\mathbb{R}$, donc c'est rate comme exemple.

Oui, tu représentes chaque élément d'un Cantor sur $[0, 1]$ par son développement en base 3 ; il ne possède que des 0 et des 2 dans ce développement (modulo quelques petits points techniques sur les suites infinies de 2 en fin de développement, etc...). Il te suffit de remplacer chaque 2 par un 1, et tu as obtenu une bijection de ton Cantor avec $[0, 1]$. Ensuite, tu le mets en bijection avec $\mathbb{R}$ par une quelconque variation sur la fonction tangente.

Thomas Pornin, 21 mars 2000, 14h18

6 $\mathbb{R}^a \simeq \mathbb{R}^b \implies a = b$

La seule demo elementaire que je connaisse de ce theroreme (sans homologie ni homotopie) se fait via le lemme de Sperner, et elle se trouve dans le bouquin de Maillot-Chambert-Loir-Fermigier (exos d'agreg). c'est vraiment elementaire, et joli. d'apres mes souvenirs, il y a un bug a un moment, mais facilement corrigeable.

Voir aussi le gonord-tosel