Fonctions convexes

Marc SAGE

6 mars 2006

Table des matières

1 Moyennes d'ordre alpha

1.1 Résultat principal

Soit $x_1, ..., x_{n\geq 1}$ des réels > 0, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des poids dans $]0,1]$ de somme $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$ et α un réel non nul. On définit la moyenne d'ordre α *des x_i pondérée par les λ_i par*

$$M(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\lambda_1 x_1^\alpha + \lambda_2 x_2^\alpha + ... + \lambda_n x_n^\alpha}.$$

Montrer que la fonction M se prolonge par continuité en 0 en

$$M(0) = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} ... x_n^{\lambda_n},$$

puis que M est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si les x_i ne sont pas tous égaux. Que se passe-il si tous les x_i sont égaux ?

Solution proposée.

On écrit les puissances sous forme exponentielle pour faire proprement ses DLs :

$$\sqrt[\alpha]{\lambda_1 x_1^\alpha + ... + \lambda_n x_n^\alpha} = \left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\frac{\ln\left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right)}{\alpha}}.$$

Travaillons le terme tout là-haut :

$$\sum \lambda_i x_i^\alpha = \sum \lambda_i e^{\alpha \ln x_i} = \sum \lambda_i \left(1 + \alpha \ln x_i + o(\alpha)\right) = \underbrace{\sum \lambda_i}_{=1} + \alpha \sum \lambda_i \ln x_i + o(\alpha),$$

d'où (en prenant le logarithme)

$$\ln\left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right) = \ln\left(1 + \alpha \sum \lambda_i \ln x_i + o(\alpha)\right) = \alpha \sum \lambda_i \ln x_i + o(\alpha).$$

Finalement, on a

$$\sqrt[\alpha]{\lambda_1 x_1^\alpha + ... + \lambda_n x_n^\alpha} = e^{\frac{\ln\left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right)}{\alpha}} = e^{\sum \lambda_i \ln x_i + o(1)} \longrightarrow e^{\sum \lambda_i \ln x_i} = \prod x_i^{\lambda_i}, \text{ CQFD.}$$

Supposons les x_i non tous égaux, et prenons deux réels positifs $0 < \alpha < \beta$. On veux

$$M(\alpha) \overset{?}{<} M(\beta) \iff \sqrt[\alpha]{\sum \lambda_i x_i^\alpha} \overset{?}{<} \sqrt[\beta]{\sum \lambda_i x_i^\beta}$$
$$\iff \left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \overset{?}{<} \sum \lambda_i x_i^\beta \iff \left(\sum \lambda_i \left(x_i^\alpha\right)\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \overset{?}{<} \sum \lambda_i \left(x_i^\alpha\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

ce qui découle de la stricte convexité de $x \longmapsto x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ (en effet, $\frac{\beta}{\alpha} > 1$).

Pour $\alpha < \beta < 0$, on veut

$$M(\alpha) \overset{?}{<} M(\beta) \iff \sqrt[\alpha]{\sum \lambda_i x_i^\alpha} \overset{?}{<} \sqrt[\beta]{\sum \lambda_i x_i^\beta} \iff \frac{1}{\sqrt[-\alpha]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{x_i}\right)^{-\alpha}}} \overset{?}{<} \frac{1}{\sqrt[-\beta]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{x_i}\right)^{-\beta}}}$$
$$\iff \sqrt[-\beta]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{x_i}\right)^{-\beta}} \overset{?}{<} \sqrt[-\alpha]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{x_i}\right)^{-\alpha}}, \text{ vrai car } 0 < -\beta < -\alpha.$$

Il reste à comparer $M(0)$ et $M(\alpha)$. Pour $\alpha > 0$, on veut

$$\prod x_i^{\lambda_i} \overset{?}{<} \sqrt[\alpha]{\sum \lambda_i x_i^\alpha} \iff \sum \lambda_i \ln x_i \overset{?}{<} \frac{1}{\alpha} \ln\left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right) \iff \sum \lambda_i \ln\left(x_i^\alpha\right) \overset{?}{<} \ln\left(\sum \lambda_i x_i^\alpha\right),$$

ce qui résulte de la stricte concavité du logarithme. Pour $\alpha < 0$, on veut

$$\sqrt[\alpha]{\sum \lambda_i x_i^\alpha} \overset{?}{<} \prod x_i^{\lambda_i} \iff \frac{1}{\sqrt[-\alpha]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{x_i}\right)^{-\alpha}}} \overset{?}{<} \frac{1}{\prod \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\lambda_i}}$$
$$\iff \prod \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\lambda_i} \overset{?}{<} \sqrt[-\alpha]{\sum \lambda_i \left(\frac{1}{x_i}\right)^{-\alpha}}, \text{ vrai car } -\alpha > 0.$$

Pour finir, si tous les x_i sont égaux, mettons à x, alors

$$M(\alpha) = \sqrt[\alpha]{\lambda_1 x^\alpha + ... + \lambda_n x^\alpha} = \sqrt[\alpha]{(\lambda_1 + ... + \lambda_n) x^\alpha} = \sqrt[\alpha]{x^\alpha} = x,$$

et donc M est constamment égale à la valeur commune des x_i.

Remarque. On peut montrer en outre que $\begin{cases} M(-\infty) = \min x_i \\ M(\infty) = \max x_i \end{cases}$. On retiendra les encadrements suivants dans le cas où les λ_i sont tous égaux, ainsi que le nom des moyennes correspondantes :

$$\min x_i \leq \underbrace{\frac{n}{\frac{1}{x_1} + ... \frac{1}{x_n}}}_{\text{harmonique}} \leq \underbrace{\sqrt[n]{x_1 ... x_n}}_{\text{géométrique}} \leq \underbrace{\frac{x_1 + ... + x_n}{n}}_{\text{arithmétique}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n}}}_{\text{quadratique}} \leq \max x_i$$

avec égalité (dans n'importe quel cas) ssi tous les x_i sont tous égaux.

Ces égalités sont fondamentales et extrêmement utiles ; il est regrettable qu'elles ne fassent pas plus souvent partie du baggage standard des taupins.

1.2 Application 1

Soit $a_1, ..., a_n$ des réels positifs de produit $a_1 ... a_n = 1$. Montrer que

$$\prod (2 + a_i) \geq 3^n$$

et établir le cas d'égalité.

Solution proposée.

On ne peut pas directement utiliser l'inégalité arithmético-géométrique car on veut une égalité dans l'autre sens. On peut en revanche l'appliquer à chacun des termes $2 + a_i$ sous le produit de gauche. Mais comment faire apparaître le 3 à droite ? Une idée consiste à interpréter ce 3 comme un nombre de termes, ce qui nous incite à écrire $2 + a_i = 1 + 1 + a_i$. En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux trois réels $1, 1, a_i$, on obtient

$$\prod (2 + a_i) = \prod (1 + 1 + a_i) \geq \prod 3 \sqrt[3]{1 \times 1 \times a_i} = 3^n \sqrt[3]{\prod a_i} = 3^n.$$

On a égalité ssi on a égalité dans toutes les inégalités arithmético-géométriques effectuées, *i.e.* ssi $a_i = 1$ pour tout i.

1.3 Application 2

Soient a, b, c trois réels > 0. Montrer que

$$\left(a^2 + bc\right)\left(b^2 + ac\right)\left(c^2 + ab\right) \leq \frac{8}{9}\left(a^3 + b^3 + c^3\right)^2.$$

Préciser le cas d'égalité.

Solution proposée.

Le terme de gauche est en gros une somme de terme de degré 2, et on veut qu'il soit inférieur à un somme de terme de degré 3 (modulo une puissance). Cela doit nous invoquer l'inégalité entre moyenne d'ordre 2 et 3 :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \quad \leq \quad \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}} &\iff \frac{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3}{3^3} \leq \frac{\left(a^3 + b^3 + c^3\right)^2}{3^2} \\ &\iff \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3 \leq 3\left(a^3 + b^3 + c^3\right)^2. \end{aligned}$$

On va donc chercher à transformer le terme de gauche en une moyenne d'ordre 2.

Le premier problème vient des termes "croisés" bc dans a^2+bc. Peu importe, on dispose de l'inégalité arithmético-quadratique $bc \leq \frac{b^2+c^2}{2}$, qui se retrouve soit dit en passant en développant $(b-c)^2 \geq 0$. On en déduit

$$\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)\left(c^2+ab\right) \leq \left(a^2+\frac{b^2+c^2}{2}\right)\left(b^2+\frac{a^2+c^2}{2}\right)\left(c^2+\frac{a^2+b^2}{2}\right).$$

On a presque une moyenne d'ordre 2, mais avec des coefficients non tous égaux $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Pour s'y ramener, on remarque que la somme des $a^2+\frac{b^2+c^2}{2}$ est une moyenne d'ordre 2 avec tous ses coefficients égaux, ce qui pousse à utiliser une inégalité arithmético-géométrique :

$$\begin{aligned}\left(a^2+\frac{b^2+c^2}{2}\right)\left(b^2+\frac{a^2+c^2}{2}\right)\left(c^2+\frac{a^2+b^2}{2}\right) &\leq \left[\frac{\left(a^2+\frac{b^2+c^2}{2}\right)+\left(b^2+\frac{a^2+c^2}{2}\right)+\left(c^2+\frac{a^2+b^2}{2}\right)}{3}\right]^3 \\ &= \left[\frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{3}\right]^3 = \frac{8}{27}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3.\end{aligned}$$

On conclut par l'inégalité entre moyennes d'ordre $2<3$:

$$\frac{8}{27}\left(a^2+b^2+c^2\right)^3 \leq \frac{8}{27}3\left(a^3+b^3+c^3\right)^2 = \frac{8}{9}\left(a^3+b^3+c^3\right)^2.$$

Pour le cas d'égalité, il faut qu'il y ait égalité dans l'inégalité $M(2) \leq M(3)$, donc on doit avoir $a=b=c$. Il est facile de vérifier que l'on a bien égalité partout dans ce cas.

1.4 Application 3

Soit $x_1,...,x_{n\geq 2}$ des réels >0 de somme $x_1+...+x_n=1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{n-1}}.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Solution proposée.

Indépendamment de ce qui précède, une condition $\sum x_i = 1$ *doit* nous faire penser à du Jensen (inégalité de convexité). Dans notre problème, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est concave sur $]0,1[$ en tant que composée des fonctions concaves $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \longmapsto -x$. Jensen nous dit alors que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}x_i\times x_i}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sum x_i^2}}$$

avec égalité ssi tous les x_i sont égaux (par *stricte* concavité).

On a obtenu (à peu de choses près) une moyenne d'ordre 2, que l'on veut minorer par une moyenne d'ordre $\frac{1}{2}$ (le terme $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{n-1}}$). Ce ne devrait pas être trop difficile...

Pour le faire habilement, on peut essayer d'intercaler entre nos deux moyennes $2>\frac{1}{2}$ la moyenne d'ordre 1, qui est triviale à calculer vue la condition $\sum x_i = 1$.

Partons du terme de droite, et appliquons $M\left(\frac{1}{2}\right) \leq M(1)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{n-1}} = n\sqrt{\frac{1}{n-1}}\frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{n} \leq n\sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Partons à présent du terme de gauche (déjà minoré) et utilisons $M(2) \geq M(1)$ (qui s'appelle aussi Cauchy-Schwartz quand tous les coefficients sont égaux...) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sum x_i^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-n\left(\sum\frac{x_i}{n}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

La boule est bouclée.

Pour le cas d'égalité, on a utilisé une fois Jensen, et $M\left(\frac{1}{2}\right) \leq M(1) \leq M(2)$. On a donc égalité au départ ssi on a égalité dans ces trois inégalités, *i.e.* ssi tous les x_i sont égaux.

2 Un peu de géométrie

Soit ABC un triangle non aplati. On note α, β, γ les mesures de ses angles dans $]0, \pi[$. Montrer que

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} \geq \frac{8}{3 + 2\cos\gamma}$$

et donner le cas d'égalité.

Solution proposée.

On peut résoudre cet exercice entièrement de manière géométrique à l'aide des formules usuelles. Montrons à quel point la convexité nous mâche le travail.

On remarque que la fonction $\frac{1}{\sin}$ est convexe sur $]0, \pi[$: sa dérivée vaut $\frac{\cos}{\sin} = \cot$ qui est décroissante. On peut donc appliquer Jensen :

$$\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta} = 2\left(\frac{1/2}{\sin\alpha} + \frac{1/2}{\sin\beta}\right) \geq 2\frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)} = \frac{2}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Le seule paramètre intervenant est maintenant $c = \cos\frac{\gamma}{2}$, vu que $\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1$. On veut donc

$$\frac{2}{\cos\frac{\gamma}{2}} \overset{?}{\geq} \frac{8}{3 + 2\cos\gamma} \iff \frac{1}{c} \overset{?}{\geq} \frac{4}{3 + 2\left(2c^2 - 1\right)}$$
$$\iff 3 + 2\left(2c^2 - 1\right) \overset{?}{\geq} 4c \iff 4c^2 - 4c + 1 \overset{?}{\geq} 0 \iff (2c - 1) \overset{?}{\geq} 0.$$

On en déduit le résultat avec égalité ssi $\alpha = \beta$ (égalité dans Jensen) et $c = \frac{1}{2}$, *i.e.* $\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{3}$, ou encore $\gamma = \frac{2\pi}{3}$. Le cas d'égalité s'énonce donc : ABC isocèle avec un angle au sommet de symétrie de $120°$.

3 Un amuse-gueule

Soit a, b, c, d des réels > 0 de somme $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \leq \frac{1}{2}$$

et préciser le cas d'égalité.

Solution proposée.

La condition fait immédiatement penser à du Jensen. En introduisant la fonction $x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ qui est convexe sur $\mathbb{R}^+$, on a immédiatement

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} = \sum \frac{a^2}{a+b} = \sum a \frac{1}{1 + \frac{b}{a}} \leq \frac{1}{1 + \sum a\frac{b}{a}} = \frac{1}{1 + \sum b} = \frac{1}{2}$$

avec égalité ssi tous les $\frac{a}{b}$ sont égaux. En notant λ cette valeur commune, on a donc $a = \lambda b = \lambda^2 c = \lambda^3 d = \lambda^4 a$, d'où $\lambda^4 = 1$ (car $a \neq 0$) et $\lambda = 1$ (car $\frac{a}{b} > 0$). Finalement, on a égalité ssi $a = b = c = d = \frac{1}{4}$.

4 Encore des inégalités...

Soit $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ de réels > 0. Comparer

$$\sqrt[n]{a_1...a_n} + \sqrt[n]{b_1...b_n} \text{ et } \sqrt[n]{(a_1 + b_1)...(a_n + b_n)}.$$

Solution proposée.

On regarde les petits n pour intuiter le sens de l'inégalité. Pour $n=1$, on veut comparer $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a+b}$, mais on sait que

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+b+2\sqrt{ab} \geq a+b = \left(\sqrt{a+b}\right)^2.$$

On va donc chercher à montrer que

$$\sqrt[n]{a_1...a_n} + \sqrt[n]{b_1...b_n} \overset{?}{\geq} \sqrt[n]{(a_1+b_1)...(a_n+b_n)}.$$

On peut simplifier cette dernière inégalité homogène en les a_i, b_j en introduisant $c_i = \frac{b_i}{a_i}$:

$$1+\sqrt[n]{c_1...c_n} \overset{?}{\geq} \sqrt[n]{(1+c_1)...(1+c_n)}.$$

On a envie de prendre le logarithme pour se débarasser du produit à droite :

$$\ln\left(1+\sqrt[n]{c_1...c_n}\right) \overset{?}{\geq} \frac{1}{n}\sum \ln(1+c_i).$$

On a envie de reconnaître du Jensen à une fonction du type $\ln(1+*)$. Si l'on essaye la concavité du logarithme, cela ne passera pas :

$$\frac{1}{n}\sum \ln(1+c_i) \leq \ln\left(\sum \frac{1+c_i}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{c_1+...c_n}{n}\right) \overset{?}{\leq} \ln\left(1+\sqrt[n]{c_1...c_n}\right) \iff \frac{c_1+...c_n}{n} \leq \sqrt[n]{c_1...c_n},$$

or, on dispose de l'inégalité en sens inverse...

La concavité de ln est donc trop forte. Nous allons donc "convexifier" la fonction ln en la rapprochant d'une fonction affine, pour laquelle l'inégalité de Jensen est en fait une égalité : considérons $\ln(1+\exp)$. Il faut prier pour que l'écart à la fonction affine Id soit du côté concave et non convexe (sinon on n'obtiendra pas le bon sens dans l'inégalité voulue). Dérivons :

$$\partial_x \ln(1+e^x) = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

qui croît strictement comme composée de deux fonctions décroissantes. Sauvés ! Reste à appliquer Jensen :

$$\frac{1}{n}\sum \ln(1+c_i) = \frac{1}{n}\sum \ln\left(1+e^{\ln c_i}\right) \leq \ln\left(1+e^{\sum \frac{\ln c_i}{n}}\right) = \ln\left(1+\sqrt[n]{c_1...c_n}\right).$$

On a égalité ssi on a égalité dans Jensen, *i.e.* ssi les c_i sont tous égaux, *i.e.* ssi les vecteurs $(a_1,...,a_n)$ et $(b_1,...,b_n)$ sont colinéaires.

5 Convexité et intégration

Dans tout exercice mêlant ces deux thèmes, l'absence de dessin est quasi-éliminatoire. Les interprétations géométriques doivent être utilisées dans une large mesure : interprétation de la convexité en termes de graphe au-dessus des demi-tangentes et en-dessous des cordes, interprétation des intégrales comme des aires.

On retiendra également un principe de simplification du problème (surtout dans le second exercice) : remplacer f par λf ou $f+a$ permet d'imposer des conditions supplémentaires qui rendrent quasi-trivial l'énoncé.

5.1 Mise en jambe

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *concave. Montrer que*

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f \leq (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Solution proposée.

Soit A et B les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, $C = \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ et M le milieu de AB (qui doit être en-dessous de B).

Le terme de gauche est l'aire d'un rectangle dont un des côtés horizontal passe en M, *i.e.* l'aire d'un trapèze rectangle de côté incliné dirigé par la corde $[AB]$.

Le terme du mileu est l'aire sous le graphe de f.

Le terme de droite est l'aire d'un rectangle dont un des côtés horizontal passe en C, *i.e.* l'aire d'un trapèze rectangle de côté incliné dirigé par une demi-tangente en C.

Le résultat est alors trivial car la demi-tangente en C est au-dessus du graphe de f qui lui-même est au-dessus de la corde $[AB]$.

On aurait également pu complètement réduire le problème.

En posant $f^*(x) = f(x(b-a)+a)$, qui est concave comme composée de f concave et d'une fonction affine, on peut supposer $[a,b] = [0,1]$. En effet, le résultat doit être est vrai pour f^* si l'énoncé est correct, et réciproquement si f^* vérifie

$$\frac{f^*(0)+f^*(1)}{2} \leq \int_1^0 f^* \leq f^*\left(\frac{1}{2}\right),$$

on retrouve les inégalités sur f par un changement de variables $x \longmapsto x(b-a)+a$.

Remarquer de plus l'inégalité est homogène en f, *i.e.* invariante par dilation $f \longmapsto \lambda f$ avec $\lambda \neq 0$. Elle est en outre invariante par translation $f \longmapsto f + \mu$: chacun de trois termes se voit augmenté de la même quantité μ. Pour finir, elle est invariante par ajout de pente quelconque $f \longmapsto f + \nu \, \mathrm{Id}$: on rajoute $\frac{\nu}{2}$ partout.

On peut donc supposer $f(0) = 0$ par tranlation, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ par ajout de pente, et $f(1) = 1$ par dilation (si $f(1) = 0$, f est identiquement nulle sur $[0,1]$ et le problème n'a que peu d'intérêt...).

Le dessin s'en voit alors grandement simplifié et le résultat est immédiat.

Remarque. Le travail effectué en seconde partie peut sembler peu utile vu la simplicité du problème, mais il fait réellement gagner du temps dans certains cas plus compliqués. Voir exercice suivant...

5.2 Un joli problème

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable et $n \geq 1$ un entier. Montrer que

$$0 \leq \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f \leq \frac{f'(n) - f'(0)}{8}.$$

Solution proposée.

Avant tout chose, essayons de comprendre les termes de l'énoncé. Celui du milieu n'est pas joli, il y a des effets de bords dûs aux $\frac{1}{2}$. On le réécrit de manière plus homogène en répartissant le $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ chez tout le monde :

$$\begin{aligned} & \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} \\ = \; & \frac{f(0)}{2} + \left(\frac{f(1)}{2} + \frac{f(1)}{2}\right) + ... + \left(\frac{f(n-1)}{2} + \frac{f(n-1)}{2}\right) + \frac{f(n)}{2} \\ = \; & \left(\frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2}\right) + ... + \left(\frac{f(n-1)}{2} + \frac{f(n)}{2}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{f(i) + f(i-1)}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant qu'on est parti, écrivons tout sous forme d'un signe somme :

$$\begin{aligned} & 0 \overset{?}{\leq} \frac{f(0)}{2} + f(1) + f(2) + ... + f(n-1) + \frac{f(n)}{2} - \int_0^n f \overset{?}{\leq} \frac{f'(n) - f'(0)}{8} \\ \iff & 0 \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f(i) + f(i-1)}{2} - \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i f \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f'(i) - f'(i-1)}{8} \\ \iff & 0 \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \left(\frac{f(i) + f(i-1)}{2} - \int_{i-1}^i f\right) \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^n \frac{f'(i) - f'(i-1)}{8}. \end{aligned}$$

Le problème sera donc résolu si l'on montre chacune des égalités

$$0 \overset{?}{\leq} \frac{f(i) + f(i-1)}{2} - \int_{i-1}^{i} f \overset{?}{\leq} \frac{f'(i) - f'(i-1)}{8},$$

ce qui revient à faire $n = 1$. Remarquer qu'en fait le problème est *équivalent* au cas $n = 1$, puisque l'énoncé doit être vrai pour $n = 1$.

Ceci étant dit, passons aux interprétations géométriques. Posons A et B les points $(0, f(0))$ et $(1, f(1))$, C le point d'intersection des tangentes en 0 et 1.

Le terme du milieu représente l'aire de la lunulle comprise entre la corde $[AB]$ et le graphe de f, qui est ≥ 0 par hypothèse de convexité, d'où l'inégalité de gauche.

Pour comprendre le $\frac{1}{8}$ à droite, on ne sait pas vraiment comment faire...

Cherchons alors à simplifier notre problème. Si l'énoncé est vrai (et il l'est...), il doit être valable pour une fonction f convexe ayant mêmes dérivées en 0 et en 1 et qui colle les tangentes en 0 et 1 aussi près que l'on veut. En d'autres termes, il nous *faut* montrer que l'aire du triangle ABC est majorée par $\frac{f'(1)-f'(0)}{8}$. À ce stade, le problème ne met plus en jeu que deux paramètres, les pentes $f'(0)$ et $f'(1)$, et un collégien pourrait terminer l'exercice en calculant des équations de droites et des aires de triangles.

Toutefois, nous sommes plus aguerris que les collégiens, et las de moults calculs longs et pénibles, nous allons grandement simplifier cette dernière étape. Remarquons en effet que l'inégalité à montrer

$$\frac{f(1) + f(0)}{2} - \int_{0}^{1} f \overset{?}{\leq} \frac{f'(1) - f'(0)}{8}$$

est invariante par translation $f \longmapsto f + \lambda$, par ajout de pente $f \longmapsto f + \mu \,\mathrm{Id}$, et par dilatation $f \longmapsto \nu f$. On peut donc imposer $f(0) = 0$ par translation, $f'(0) = 0$ par ajout de pente, et $f(1) = 1$ par dilation (si $f(1) = 0$, $f \equiv 0$ et l'inégalité est triviale). Il est maintenant aisé de mener les calculs, après ces *trois* simplifications effectuées.

Notons $\alpha = f'(1)$ l'unique paramètre restant. Le point C se situe sur l'axe des abscisses ; pour trouver sa position, on écrit

$$y_B - y_C = \alpha (x_B - x_C) \implies 1 = \alpha (1 - x_c) \implies x_B = 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

Noter bien que $\alpha \geq 1$ car la pente de la tangente en B doit dépasser celle de la corde AB. On veut donc

$$\mathcal{A}(ABC) \overset{?}{\leq} \frac{f'(1) - f'(0)}{8} \iff \frac{1}{2} x_C \overset{?}{\leq} \frac{\alpha}{8} \iff 1 - \frac{1}{\alpha} \overset{?}{\leq} \frac{\alpha}{4} \iff \alpha^2 - 4\alpha + 4 \overset{?}{\geq} 0 \iff (\alpha - 2)^2 \overset{?}{\geq} 0,$$

ce qui est clair (on a même le cas d'égalité $\alpha = 2$).

Remarque. Il apparaît sur ce problème que les simplifications sont loin d'avoir été inutiles...

5.3 Jensen pour les intégrales

Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 \varphi \circ f.$$

Solution proposée.

On ne dispose que de Jensen sur des sommes finies, donc on s'y ramène en approximant f et $\varphi \circ f$ par leurs sommes de Riemann (possible car f et $\varphi \circ f$ sont continues) :

$$\varphi\left(\int_0^1 f\right) = \varphi\left(\lim_{n\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \overset{\varphi \text{ continue}}{=} \lim_{n\infty} \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\right) \overset{\varphi \text{ convexe}}{\leq} \lim_{n\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \varphi\left(f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = \int_0^1 \varphi \circ f.$$

6 Convexité dans la convexité

Soit f et g deux fonctions convexes sur $[0, 1]$ telles que $\max\{f, g\}$ soit positif. Montrer qu'il y a un $h \in [f, g]$ qui reste positif.