équations fonctionnelles

Marc SAGE

<2017

Table des matières

1 MOrphismes continus $+$ $\times$

1.1 enmorphismes réels continus pour $+$ & $\times$

Quels sont les morphismes réels from un sg additif de $\mathbf{R}$?

Fondamental : enmorphisme additifs de $\mathbf{Q}$ sont les homothétie. Ainsi, les endo addtifs continus de $\mathbf{R}$sont les homothéties.

Récapitulatif

source / but	$\mathbf{R}+$	$\mathbf{R}\times$	
$\mathbf{R}+$	$\lambda\,\mathrm{Id}$	0 ou $e^{\lambda\cdot}$	
$\mathbf{R}_+^*\times$	$\lambda\ln$	0 ou Id^λ	où λ réel
$\mathbf{R}^*\times$	$\lambda\ln\lvert\cdot\rvert$	0 ou $\lvert\cdot\rvert^\lambda$	
$\mathbf{R}\times$	0	0 ou $\lvert\cdot\rvert^{\lambda\geq 0}$	

$\mathbf{R}+\longrightarrow\mathbf{R}+$: par densité de $\mathbf{Q}$ on obtient une homothétie (ok si continu remplacer par croissant, ce qui est impliqué par préserver carrés et sommes, ou encore par conserver différences et inverses)

$\mathbf{R}+\longrightarrow\mathbf{R}\times$. Si on peut considéer $\ln f$, alors $\ln f:\mathbf{R}+\longrightarrow\mathbf{R}+$, ie $\ln f=\lambda\,\mathrm{Id}$ d'où $f=e^{\lambda\cdot}$. Mq $f>0$. On a déjà $f=f\left(2\frac{\cdot}{2}\right)=f\left(\frac{\cdot}{2}\right)^2\geq 0$. De plus, si $f(a)=0$, alors $f(a+\cdot)=0$ et f nulle. Finalmenent, $f=0$ ou $f=e^{\lambda\cdot}$ (on pourra inclure $\lambda=-\infty$)

$\mathbf{R}_+^*\times\longrightarrow\mathbf{R}+$. $f\circ\exp:\mathbf{R}+\longrightarrow\mathbf{R}+$, donc $f(e^t)=\lambda t$, d'où (pour $a>0$) $f=f\left(e^{\ln\cdot}\right)=\lambda\ln$.

$\mathbf{R}^*\times\longrightarrow\mathbf{R}+$. Par ce qui précède $0=f(1)=f\left((-1)^2\right)=2f(-1)$, d'où f paire et $f=\lambda\ln\lvert\cdot\rvert$

$\mathbf{R}\times\longrightarrow\mathbf{R}+$? Par ce qui précède et continuité en 0, on o $\lambda=0$ et $f=0$ (démo directe : $f(0)=f(0\cdot)=f(0)+f$ donc f constante, or $f(2\cdot)=2f$, donc $f=0$)

$\mathbf{R}_+^*\times\longrightarrow\mathbf{R}\times$ On $f\exp:\mathbf{R}+\longrightarrow\mathbf{R}\times$, d'où $f\exp=e^{\lambda\,\mathrm{Id}}$ d'où $f(a)=f\left(e^{\ln a}\right)=e^{\lambda\ln a}=a^\lambda$ (ou 0)

$\mathbf{R}^*\times\longrightarrow\mathbf{R}\times$ on a par ce qui précède $1=f(1)=f\left((-1)^2\right)=f(-1)^2$, donc $f(-1)=\pm1$. SElon les cas, on trouve $f=\pm\lvert\cdot\rvert^\lambda$ (ou 0)

$\mathbf{R}\times\longrightarrow\mathbf{R}\times$ La solution $f=\pm\lvert\cdot\rvert^\lambda$ se prolonge en 0 ssi $\lambda\geq 0$. Conclusion : 0 ou élever à une pusisance ≥ 0.

RQ : les solution trouvées sont toutes dérivables (disons sur $\mathbf{R}^{++}$). Cela peut se montrer directement par un argument d'intégration et on peut alors résoudre des équa diff.

1.2 morphismes $\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{C}$ continus pour $+$ & $\times$ version intégration

EG $+\longrightarrow+$ Intégrer en $b=0...,1$ donne $\int_a^{a+1}f=f(a)+\int_0^1 f$, d'où f C^1 et par réc C^∞. Deriver en a => $f'(a)=f'(a+b)$, d'où f' cst et f linéaire ($f(0)=0$ facile)

Intérêt : on peut intégrer à valeurs dans $\mathbf{C}$, là où nos méthodes réelles (les carrés sont positifs) lorque la loi d'arrivée est $\times$ ne foncitonnent plus.

EG $\mathbf{R}+\longrightarrow\mathbf{C}\times$. Supposons $f(a+b)=f(a)f(b)$ On intègre de $b=0,...,M$ avec$\int_0^M f\neq 0$ (si $\int_0^\cdot f=0$, sa dérivé est nulle, ie $f=0$) d'où $f(a)=\frac{1}{\int_0^M f}\int_a^{a+M}f$ dérivable . Dériver en a donne $f'(a+b)=f'(a)f(b)$ puis ($a=0$) $f'(b)=f'(0)f(b)$, ie $f'=\lambda f$, d'où $f=Ce^{\lambda\cdot}$ et $C=C^2$. Conclsuion : f nulle ou $f=\exp(\lambda\cdot)$.

On obtient le même tableau (les autrse cas $\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{R}\times \longrightarrow \mathbf{C}+, \times$ se ramènement de même à ces deux premiers)

$$\begin{array}{ccc} \text{source / but} & \mathbf{C}+ & \mathbf{C}\times \\ \mathbf{R}+ & \lambda \operatorname{Id} & 0 \text{ ou } e^{\lambda \cdot} \\ \mathbf{R}_+^*\times & \lambda \ln & 0 \text{ ou } \operatorname{Id}^\lambda \\ \mathbf{R}^*\times & \lambda \ln|\cdot| & 0 \text{ ou } |\cdot|^\lambda \\ \mathbf{R}\times & 0 & 0 \text{ ou } |\cdot|^{\lambda\geq 0} \end{array} \quad \text{où } \lambda \text{ complexe}$$

1.3 enmorphismes de C continus pour + & ×

On utilise ce qui précéde, afin d'obtenir le tablea suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{source / but} & \mathbf{C}+ & \mathbf{C}\times \\ \mathbf{C}+ & \lambda \operatorname{Re} + \mu \operatorname{Im} & 0 \text{ ou } e^{\lambda \operatorname{Re} + \mu \operatorname{Im}} \\ \mathbf{C}^*\times & \lambda \ln|\cdot| & 0 \text{ ou } |\cdot|^\lambda \operatorname{Id}^k \\ \mathbf{C}\times & 0 & 0 \text{ ou } |\cdot|^{\lambda\geq 0} \operatorname{Id}^{k\geq 0} \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{c} \lambda, \mu \text{ complexes} \\ k \text{ entier} \end{array}$$

On se ramènent à une source réelle en restreignant à $\mathbf{R}$ et $i\mathbf{R}$

$\mathbf{C}+ \longrightarrow \mathbf{C}+$ $f_{|\mathbf{R}}$ et $f(i\cdot)_{|\mathbf{R}}$ vont $\mathbf{R}+ \longrightarrow \mathbf{C}+$, donc sont des homothéties, d'où

$$f = f(\operatorname{Re} + i \operatorname{Im}) = f \circ \operatorname{Re} + f(i \operatorname{Im}) = f_{|\mathbf{R}}(\operatorname{Re}) + f(i\cdot)_{|\mathbf{R}} \circ \operatorname{Im} = \lambda \operatorname{Re} + \mu \operatorname{Im}.$$

$\mathbf{C}+ \longrightarrow \mathbf{C}\times$ $f_{|\mathbf{R}}$ et $f(i\cdot)_{|\mathbf{R}}$ vont $\mathbf{R}+ \longrightarrow \mathbf{C}\times$, donc sont des exponentielles (ou 0), d'où

$$f = f(\operatorname{Re} + i \operatorname{Im}) = f_{|\mathbf{R}}(\operatorname{Re}) \times f(i\cdot)_{|\mathbf{R}} \circ \operatorname{Im} = e^{\lambda \operatorname{Re}} e^{\mu \operatorname{Im}} \text{ (ou 0)}$$

$\mathbf{C}^*\times \longrightarrow \mathbf{C}+$ on a $f \circ \exp : \mathbf{C}+ \longrightarrow \mathbf{C}+$, donc $f\left(e^{a+ib}\right) = \lambda a + i\mu b$. invariante par $b \mapsto b + 2\pi$, ce qui force $i\mu 2\pi = 0$ et $\mu = 0$. Ainsi, $f\left(re^{i\theta}\right) = f\left(e^{\ln r + i\theta}\right) = \lambda \ln r$, d'où $f = \lambda \ln|\cdot|$

$\mathbf{C}\times \longrightarrow \mathbf{C}+$ comma avant $f = 0$

$\mathbf{C}^*\times \longrightarrow \mathbf{C}\times$ on a $f \circ \exp : \mathbf{C}+ \longrightarrow \mathbf{C}\times$, donc $f\left(e^{a+ib}\right) = e^{\lambda a + i\mu b}$ (ou 0) invariante par $b \mapsto b + 2\pi$, ce qui force $e^{i\mu 2\pi} = 1$ et $\mu \in \mathbf{Z}$ (noté $k := \mu$). Ainsi, $f\left(re^{i\theta}\right) = f\left(e^{\ln r + i\theta}\right) = e^{\lambda \ln r + ik\theta} = r^\lambda e^{ik\theta}$, d'où $f = |\cdot|^\lambda \operatorname{Id}^k$ (ou 0)

$\mathbf{C}\times \longrightarrow \mathbf{C}\times$ comma avant (plgement possible en 0 ssi $\lambda, k \geq 0$.

1.4 "exponentielle" non continues

!!! Toutes les equa fonction de cette feuille peuvent avoir d'autres solution sans hyhtèse d econtinuité. !!!!

On part de $\varphi : R \longrightarrow R$ additive non linéaire (eg : projecteur sur $\mathbf{Q}$ dans le $\mathbf{Q}$eev $\mathbf{R}$), on forme $\exp := \exp \circ \varphi$ et $\ln := \varphi \circ \ln$, puis $\operatorname{ch} := \frac{\exp + \exp(-\cdot)}{2}$ etc.... qui vérifient tout ce qu'on veut (sansêtre les bonnes fonctions)

RQ culturelle : on peut avec ZF et AC_dep exlcure cela, au sens où il y a des moèdle de ZF+ACD où toute forme Qlinrée sur R est une homothéi.

Eq Boltzmann physicien cours MALET
très bons exemples...
(isootrpopie + limite null en l'infini)

Involutions contines de $\mathbf{R}$ (donc inj, donc mono, donc homéo) (stable par conjugation)

Quitte à conuguer par translation par $f(0)$, OPS $f(0) = 0$. Alors ou bien f décroît sur $\mathbf{R}^-$ (puis symétrique sur $\mathbf{R}^+$ par rapport à première bissectrice) ou bien $f = \operatorname{Id}$.

Involution de $\mathbf{R}^{++}$: idem (pas besoin de conjuguer)

2 Formules addition et continuité

2.1 $\binom{\cos}{\sin}$ et $\binom{\text{ch}}{\text{sh}}$ par formules addition croisées

EXO ($\cos$ **et** $\sin$ **par les formules d'addition)** : *continues bornées de* $\mathbf{R}$ *dans*$\mathbf{R}$ *tq*

$$\begin{array}{l} f(a+b) = f(a) f(b) - g(a) g(b) \\ g(a+b) = g(a) f(b) + f(a) g(b) \end{array} ?$$

DEM : on rq $f + ig$ transforme $+$ en $\times$, donc est une expontielle complexe (c'est normal, c'est de là que viennent les formules d'addition !), d'où $\binom{f}{g} = \binom{e^{\lambda \cdot} \cos(\omega \cdot)}{e^{\lambda \cdot} \sin(\omega \cdot)}$, le borné imposse $\lambda = 0$. (santi check : $f^2 + g^2$ transforme $+$ en $\times$)

EXO (ch **et** sh **par les formules d'addition)** : *continues de* $\mathbf{R}$ *dans*$\mathbf{R}$ *tq*

$$\begin{array}{l} f(a+b) = f(a) f(b) + g(a) g(b) \\ g(a+b) = g(a) f(b) + f(a) g(b) \end{array} ?$$

DEM : on rq $f + g$ transforme $+$ en $\times$, donc est une expontielle complexe $e^{(\lambda+\omega)\cdot}$, de même $f - g = e^{(\lambda-\omega)\cdot}$, d'où $f = \frac{e^{(\lambda+\omega)\cdot} + e^{(\lambda-\omega)\cdot}}{2} = e^{\lambda \cdot} \operatorname{ch}(\omega \cdot)$ et même $g = e^{\lambda} \operatorname{sh}(\omega \cdot)$.

2.2 th **et** tan **par formules addition**

EXO (th **par formule addition)** : *trouver les cotinues tq*

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a) f(b)} ?$$

IDée : inverser $\operatorname{th} x = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ (ie $e^{2x} = \frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}$) pour se ramenr à une équa sur exp
DEM : les cstes solution sont $C = \frac{2C}{1+C^2}$, ie $C = 0$ ou $1 + C^2 = 2$, ie $C = \pm 1$.
Poser $e := \frac{1+f}{1-f}$ (on va mq $f \neq 1$) envoie $+$ en$\times$

$$e(a+b) := \frac{1 + f(a+b)}{1 - f(a+b)} = \frac{1 + \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}}{1 - \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}} = \frac{(1 + f(a))(1 + f(b))}{(1 - f(a))(1 - f(b))} = e(a) e(b)$$

donc $e(x) = \exp(2\lambda x)$, d'où $f(x) = \frac{e^{2\lambda x}-1}{e^{2\lambda x}+1} = \operatorname{th}(\lambda x)$.

GAffe ! il faut $f \neq 1$: sinon, mettons $f(2a) = 1$, alors $2f(a) = 1 + f(a)^2$, donc $f(a) = 1$ aussi, d'où $f\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) = 1$ et par continuité $\alpha := f(0) = 1$. Mais alors $(b = 0)$ donne $f = \frac{f+1}{1+f} = 1$, exclu.

EXO (tan **par formule addition)** : *trouver les cotinues tq*

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 - f(a) f(b)} ?$$

IDée : utiliser $\operatorname{th} ia = i \tan a$ pour utilise ce qui précède. Mieux : on ne récupère que la méthode, à savoir $\exp(2\cdot) = \frac{1+\operatorname{th}}{1-\operatorname{th}}$). Posons donc $e = \frac{1+if}{1-if}$ (ie $f = i\frac{1-e}{1+e}$) bien déf car f réelle. Alors e trnadofmr $+$ en $\times$

$$e(a+b) = \frac{1 + i\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}}{1 - i\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}} = \frac{1 - \alpha\beta + i\alpha + i\beta}{1 - \alpha\beta - i\alpha - i\beta} = \frac{(1 + i\alpha)(1 + i\beta)}{(1 - i\alpha)(1 - i\beta)} = e(a) e(b)$$

donc $e = \exp(2\lambda \cdot)$, d'où $f = i\frac{1-e^{2\lambda \cdot}}{1+e^{2\lambda \cdot}} = -i\frac{e^{\lambda \cdot} - e^{-i\lambda}}{e^{\lambda \cdot} + e^{-i\lambda}} = \tan(\lambda \cdot)$ pour un certain complexe λ.

2.3 $\cos$ ou ch par formule d'addition

EXO ($\cos$ **et** ch **par formule d'addition)** *continue tq*

$$f(a+b)+f(a-b)=2f(a)f(b) \text{ ?}$$

DEM ensemble des solutios contiet $0, 1, \cos$ et ch et est stabe par $\circ$homothétie. Mq c'est tout.
Si $f \neq 0$, diviser par un $f(a) \neq 0$ mq f paire.
On montre C^∞ car (intégrer en $b = 0, ..., M$ en supposant $\int_0^M f \neq 0$)

$$2\left(\int_0^M f\right) f(a) = \int_0^M f(a+\cdot) + \int_0^M f(a-\cdot) = \int_a^{a+M} f + \int_{a-M}^{a} f \text{ qui est } C^1$$

d'où (dériver deux fois en b et évlauer $b=0$) $f'' = f''(0) f$, d'où (par parité) $f = A\cos(\omega\cdot)$ ou $A\operatorname{ch}(\omega\cdot)$ avec $A + A = 2AA$, ie $A = 0$ ou 1.

2.4 autre formules additions

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DU COSINUS ET DU SINUS ORDINAIRES ET HYPERBOLIQUES
Autor(en) : Cioranesco, N.
Objekttyp : Article
Zeitschrift : L'Enseignement Mathématique
Band (Jahr) : 31 (1932)
Heft 1 : L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

$f(a+b)f(a-b) = f(a)^2 + f(b)^2 - 1$ continue −> $\pm\operatorname{ch}(c\cdot)$ où $c \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$

$f(a+b)f(a-b) = f(a)^2 - f(b)^2$ continue −> $A\operatorname{sh}(c\cdot)$ où $c \in \mathbf{R} \cup i\mathbf{R}$

3 doubles & carrés et dérivabilité en 0

3.1 Morphismes $DL_1(0)$ double carré, notations $\mathbb{P}^{1/2}$ et $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$

On regarde à présent juste les formues de duplication / carré.

EG (double) : une fonction f tq $f(2a) = F(f(a), a)$ (disons définie sur une partie stable par double/moitité) est la donnée de sa restriction à la couronne de module$[1, 2]$. EG si $F(x, y) = 2x$ itérer l'homothétie de centre l'orgine et de rapport 2 ou $\frac{1}{2}$). Il y en a beuacoup ! Même avec la continuité hors de 0 (qui équivaudra à celle de cette restriction ainsi qu'à l'égalité $f(|a| = 2) = 2f\left(\frac{a}{2}\right)$, EG on fait ce qu'on veut de continu et raccordable sur $[1, 2]$ ou sur une uniion finie de demi droites). En revanche, la *dérivablité en* 0 va éliminer sréisuement les candidats.

RQ UTILIE : deux solution coindent ssi elles coincident sur un voisinage de 0. On ne regardera par conséquent *que* les solution définies autour de 0.

On note $\mathbb{P}^{1/2}$ (rzsp. $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$) une partie de $\mathbf{C}$ contenant 0 (resp 1) et stable par moitié (resp racine principale). EG :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{1/2} &= \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{R}^+, \left\{\frac{1}{2^n}\right\}, ... \\ \mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}} &= \mathbf{R},]0, 1], [1, \infty[, \{\mathrm{Re} > 0\}, \{\mathrm{Im} \geq 0\} ... \end{aligned}$$

Rq : les $\mathbb{P}^{1/2}$ et les $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$ sont échangés par les applicatios "(pré)image par exp" (mais pas de manière bij car exp pas inj)   Rq : un $\mathbb{P}^{1/2}$ (resp $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$) rcontient toujours une suite tendant vers 0 (resp. 1) (itérer les moitiés/racine d'un point deds).

On va obtenir le tableau suivant pour les fonction dérivables en

source/but	$\mathbf{C},+$	$\mathbf{C}^*,\times$	
$\mathbb{P}^{1/2}$ (der en 0)	$\lambda\,\mathrm{Id}$	$e^{\lambda\cdot}$	
$\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$ (der en 1)	$\lambda\,\mathrm{Ln}$	$e^{\lambda\,\mathrm{Ln}}$	(restrction : $a, a^2 \in \mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}} \implies \mathrm{Re}\, a > 0$
$\mathbf{R}^*$ (der en 1)	$\lambda \ln\lvert\cdot\rvert$	$\lvert\cdot\rvert^\lambda$ sur $\mathbf{R}_+^*$ $\pm_\lambda \lvert\cdot\rvert^\lambda$ sur $\mathbf{R}_-^*$	

rq : rajouter 0 ou pas au début ne change rien : si apparait l'éqiation fonctielle donne $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$, et cela n' aucune inflcuence sur les autres complexes

rq : on a toujours les solutions additives $\lambda\,\mathrm{Re} + \mu\,\mathrm{Im}$ et les multiplicatives $|a|^\lambda a^k$; mais d'une part $\mathbf{C}$dériavalbe en 1ssi $\mu = i\lambda$ et $k = \lambda$, d'autre part les mltilplicatifs sur $\mathbf{R}^*$ dvienennt $|a|^\lambda$ ou $|a|^\lambda a$ (cas particuliter où $\pm_\lambda$ cst)

EXO   *$f(2\cdot) = 2f$ et f dérivable en 0 ? (de $\mathbb{P}^{1/2}$ vers $\mathbf{C}$) Autre solutions différentiables sans dérivabilité ? simplement continues ?*

DEM $f(0) = 2f(0)$, ie $f(0) = 0$. Alors $\frac{f(a)}{a} = \frac{f\left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{a}{2}} = \frac{f\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\frac{a}{2^n}} \longrightarrow f'(0)$, d'où $f$homothétie.

RQ : on peut remplacer "f der en 0" par "f der en 0 dans chaque direction", alors f est une homothétie sur chaque demi-droite d'origine. Cela servira même en réel pour distinguer les cas $\mathbf{R}_\pm$.

Sans dér : les endo $\lambda\,\mathrm{Re} + \mu\,\mathrm{Im}$.

Avec juste continuité en 0 : un tel f est borné au voisinag de 0, donc bornée sur chaque segment par duplication. Réciproquement, soit $A > 0$, soit un graphe *borné* sur $[A, 2A]$ (def M un maj dessus) soit $a_n \longrightarrow 0$, def $N_n := \min\left\{N\ ;\ 2^N a_n \in [A, 2A]\right\}$ (fait sens APCR et $\longrightarrow \infty$ car $a_n \longrightarrow 0$) : alors $|f(a_n)| = \left|\frac{1}{2^{N_n}} f\left(2^{N_n} a_n\right)\right| \leq \frac{M}{2^{N_n}} \longrightarrow 0$. Conclusion :

$$\begin{array}{ccc} \text{sous l'hypothèse } f(2\cdot) = 2f \text{, on a} & f \text{ continue en } 0 \iff & f \text{ dér en } 0 \iff \\ \text{l'égalité } f(0) = 0 \text{ et les équivalences} & \exists A > 0 \text{ tq } f \text{ bornée sur } [A, 2A] & \exists \lambda,\ f = \lambda\,\mathrm{Id} \end{array}$$

(en particuliuer ; la continuité hors de 0 implique celle en 0)

EXO   *$f(2\cdot) = f^2$ dériable en 0 ? (de $\mathbb{P}^{1/2}$vers $\mathbf{C}$)*

RQ : la suite $\left|f\left(\frac{a}{2^n}\right)\right| = |f(a)|^{\frac{1}{2^n}}$ tend vers $|f(0)| = \begin{cases} 1 \text{ si } f(a) \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, donc ou bien $f = 0$ ou bien $f(0) = 1$ et f ne s'annule jamais, ce que l'on imposera.

DEM cas réel $f = f\left(\frac{\cdot}{2}\right)^2 > 0$ atour de 0 donc $f > 0$ partout (sinon on coupe l'inf des zéro en 2). ALors $\ln f$ commute au double, est dérivable en 0, donc $\ln f$ homotéhie et $f = \exp(\lambda\cdot)$

DEM cas général $f \approx 1$ dans un certain voisinage de 0 de $\mathbb{P}^{1/2}$ sur leque Ln transofmre $\times$ en $+$, donc où $\mathrm{Ln}\, f$commute au double (et sera dérivable en 0 si Ln l'est en 1) donc $\mathrm{Ln}\, f$ homotéhie et $f = e^{\lambda\cdot}$. Cela se proonge à tout $\mathbb{P}^{1/2}$ car $f(a) = f\left(2^n \frac{a}{2^n}\right) = f\left(\frac{a}{2^n}\right)^{2^n} = \left(e^{\lambda \frac{a}{2^n}}\right)^{2^n} = e^{\lambda a}$. Vérifions que Ln est bien dérivable en 1 : on a d'une part

$$\mathrm{Arg}(1+z) = 2\,\mathrm{atn}\, \frac{\mathrm{Im}(1+z)}{\mathrm{Re}(1+z) + |1+z|} = 2\,\mathrm{atn}\left(\frac{1}{2} \frac{\mathrm{Im}\, z}{1 + \mathrm{Re}\, z + o(z)}\right) = 2\,\mathrm{atn}\left(\frac{\mathrm{Im}\, z + o(z)}{2}\right) = \mathrm{Im}\, z + o(z)$$

d'autre part

$$\ln|1+z| = \ln\sqrt{(1+z)(1+\overline{z})} = \frac{1}{2}\ln(1 + 2\,\mathrm{Re}\, z + o(z)) = \mathrm{Re}\, z + o(z)$$

d'où

$$\mathrm{Ln}(1+z) = \ln|1+z| + i\,\mathrm{Arg}(1+z) = z + o(z)\text{, CQFD.}$$

EXO   *$f\left(a^2\right) = 2f(a)$ et dérivable en 1 ? (de $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$vers $\mathbf{C}$)   Même question en remplaçant $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$* par $\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}^*, \mathbf{R}$.

DEM L'enesmble $\exp^{-1}\left(\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}\right)\cap(\mathbf{R}+i\,]-\pi,\pi])$ est un $\mathbb{P}^{1/2}$. On définit $g=f\circ\exp$ de $\mathbb{P}^{1/2}$ vers $\mathbf{C}$, dérivbale en 0, d'où $g(2\alpha)=f\left(e^{2\alpha}\right)=2f\left(e^{\alpha}\right)=2g(\alpha)$, donc g homotthétie et $f(a)=f\left(e^{\operatorname{Ln}a}\right)=g(\operatorname{Ln}a)=\lambda\operatorname{Ln}a$.

Ainsi, dès que a et a^2 sont dans $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$, on a $\operatorname{Ln}a^2=2\operatorname{Ln}a$, ie $2\operatorname{Arg}a=\operatorname{Arg}a^2\in\,]-\pi,\pi]$, d'où $\operatorname{Arg}a\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Réciproquement, $\lambda\operatorname{Ln}$ sur une telle $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$ foncionne.

En restreignant à $\mathbf{R}_+^*$, on a une partie $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$, donc $f(a>0)=\lambda\ln a$. Sur $\mathbf{R}^*$, on af paire d'où $f=\lambda\ln|\cdot|$. Sur tout $\mathbf{R}$, on rajoute la valeur (nulle) en 0.

RQ : $\ln|\cdot|$ satisfiat l'équation fontionnellr, est différentiable en 1 mais qui n'est pas dérivable au sens complexe car $\ln|1+z|=\operatorname{Re}z+o(z)$ où l'application tangente n'est pas une $\mathbf{C}$-homohétie (sur $\mathbf{R}$ elle est dérivable mais alors le module est jsute un signe)

EXO *$f\left(a^2\right)=f(a)^2$ et f dériable en 1 ? (de $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$ vers $\mathbf{C}^*$). Même question en remplaçant $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$* par $\mathbf{R}_+^*$ *ou*$\mathbf{R}^*$.

L'enesmble $\exp^{-1}\left(\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}\right)\cap(\mathbf{R}+i\,]-\pi,\pi])$ est un $\mathbb{P}^{1/2}$. On définit $g=f\circ\exp$ de $\mathbb{P}^{1/2}$ vers $\mathbf{C}^*$, dérivbale en 0, d'où $g(2\alpha)=f\left(e^{2\alpha}\right)=f\left(e^{\alpha}\right)^2=g(\alpha)^2$, donc g expontneitl et $f(a)=f\left(e^{\operatorname{Ln}a}\right)=g(\operatorname{Ln}a)=e^{\lambda\operatorname{Ln}a}$.

En restreignant à $\mathbf{R}_+^*$, on a une partie $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$, donc $f(a>0)=e^{\lambda\operatorname{Ln}a}=a^{\lambda}$. Sur $\mathbf{R}^*$, on a $f(a<0)^2=f\left(a^2\right)=a^{2\lambda}$, donc $f(a<0)=\pm|a|^{\lambda}$ (avec le même λ que sur $\mathbf{R}_+$) qui fonctioonne

3.2 sinus par (fausse) formule duplication + 0dérivabilité

EXO **($\sin$ et sh par duplication et dérivabilité en 0)** *trouver les f dérivables en* 0 sur un $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot)=2f\cos\qquad\text{ou }=2f\operatorname{ch}$$

DEM On a $f(0)=0$. Equation linéaire -> OPS $f'(0)=1$ La fonction $i:=\frac{f}{\sin}$ou$\frac{f}{\operatorname{sh}}$ est inchangé par double et est prolongeable par continuité en 0 :

$$\frac{f(t)}{\sin t}=\frac{t+o(t)}{t+o(t)}=\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\longrightarrow 1.$$

Ainsi, $i(a)=i\left(\frac{a}{2^n}\right)=\lim_0 i=1$ cst, donc $f=\sin$ ou sh autour de 0, ce qui se propage d'après l'équation.

3.3 tan et th par formule duplicaion + 0dérivabilité

EXO **(th par duplication et dérivabilité en 0)** *Trouver les f der en 0 défine sur* un $\mathbb{P}^{1/2}$ *tq*

$$\left(1+f^2\right)f(2\cdot)=2f.$$

DEM Les parties $\{f=1\}$ et $\{f=-1\}$ sont stables par doubles (clair) et moitités ($f(2a)=1$ =>$2f(a)=1+f(a)^2$=>$f(a)=1$, idem pour -1), donc la partie $\{f\neq\pm1\}$ aussi.

SUr $\{f\neq1\}$ on pose $e(x):=\frac{1+f}{1-f}$ (on attend $\operatorname{th}(2\lambda\cdot)$). e envoie double sur carré :

$$e(2x)=\frac{\left(1+f^2\right)+\left(1+f^2\right)f(2\cdot)}{\left(1+f^2\right)-\left(1+f^2\right)f(2\cdot)}=\frac{(1+f)^2}{(1-f)^2}=e(x)^2,$$

donc $e(x)=\exp(2\lambda x)$ (ou $e=0$) d'où $f(x)=\frac{e^{2\lambda x}-1}{e^{2\lambda x}+1}=\operatorname{th}(\lambda x)$ (ou $f=-1$)

Par dérivatblité en 0, l'une seulement des trois parties $\{f=\neq\pm1\}$est non vide.

EXO **($\tan$ par duplication et dérivabilité en 0)** *quelle sont les f der en 0 définie sur* un $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot)\left(1-f^2\right)=2f\,?$$

DEM

1. poser $g := if$. Alors $g(2\cdot)\left(1+g^2\right) = 2g$, donc $g = \pm i$ ou $g = \operatorname{th}(\omega\cdot)$.
2. cas réel : valeur α en 0 vériifie $\alpha\left(1-\alpha^2\right) = 2\alpha$, ie $\alpha = 0$ ou $2 = 1-\alpha^2 < 2$ abs.

    On pose $g := \operatorname{atn} f$. On se place dans un voisinage de 0 où $|2g| < \frac{\pi}{2}$ (alors $|f| = |\tan g| < 1$) alors

$$g(2\cdot) = \operatorname{atn} f(2\cdot) = \operatorname{atn}\frac{2f}{1-f^2} = \operatorname{atn}\frac{2\tan g}{1-\tan^2 g} = \operatorname{atn}\tan(2g) = 2g,$$

Ainsi, g linéaire (cf ci-desssus) sur ce voisinsage et f ets de la forme voulue au voisinage de 0.

Soit s le sup des $0 < x < \frac{\pi}{2}$ tq $f = \tan$ sur $[0,x]$. Si $s < \frac{\pi}{2}$, alors on prend un réel $a > s$ plus petit que $2s$ et que $\frac{\pi}{2}$: alors $0 < \frac{a}{2} < s$, donc $f(a) = \frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{1-f\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \tan(a)$, absurde.

Mq ensuite par réc sur $f = \tan$ sur $\left]0, n\frac{\pi}{2}\right[\setminus \mathbf{Z}\frac{\pi}{2}$ (on vient de faire $n=1$) (puis idem dans les négatifs).

Supposons ok pour uu $N \geq 1$. Alors $\forall x \in \left]N\frac{\pi}{2}, (N+1)\frac{\pi}{2}\right[$, x n'est pas dans $\mathbf{Z}\frac{\pi}{2}$ (sinon $\frac{x}{\frac{\pi}{2}}$ entier, absurde) et on a $0 < \frac{x}{2} < \frac{N+1}{2}\frac{\pi}{2} \leq N\frac{\pi}{2}$, donc par récurrence $f(x) = \tan x$, cqfd.

3.4 sinus par formule duplication + 0dérivabilité

LEM Soient r suite$\longrightarrow 0$ NON NULLE ÀPCR et $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tq $|\lambda| < 1$ et $\frac{r_{n+1}}{r_n} = \lambda + O(r_n)$. Alors $\exists C > 0,\ |r_n| \sim C|\lambda|^n$.

DEM Soit $\Lambda > 0$ tq $|\lambda| < \Lambda < 1$, soit $\varepsilon > 0$, soit N tq $n > N \Longrightarrow \left|\frac{r_{n+1}}{\lambda r_n}\right| < 1+\varepsilon$ (ok car $r \longrightarrow 0$), soit $n > N$: alors $\left|\frac{r_{n+1}}{\Lambda r_n}\right| < \left|\frac{\lambda}{\Lambda}\right|(1+\varepsilon) \overset{\text{imposer } \varepsilon = \left|\frac{\lambda}{\Lambda}\right|-1}{=} 1$, donc (multiplier) $\forall p$, $\left|\frac{r_{N+p}}{\Lambda^p r_N}\right| < 1$, d'où $r_n = O(\Lambda^n)$ et $\sum r_n$ acv.

On veut alors $\left(\left|\frac{r_n}{\lambda^n}\right|\right)$ cv dans $\mathbb{R}_+^*$, çed $\left(\ln\left|\frac{r_n}{\lambda^n}\right|\right)$ cv, çed $\sum\left[\ln\left|\frac{r_{n+1}}{\lambda^{n+1}}\right| - \ln\left|\frac{r_n}{\lambda^n}\right|\right]$cv, or TG vaut $\ln\left|\frac{r_{n+1}}{\lambda r_n}\right| = \ln|1+O(r_n)| = O(r_n)$ (rq : $\forall c \in \mathbf{C},\ |1+c| = \sqrt{1+2\operatorname{Re} c+|c|^2} = 1+O(c)$)

EXO (sh **par duplication et dérivabilité en** 0) *trouver les f dérivables en* 0 sur un $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot)^2 = (2f)^2\left(1+f^2\right)$$

DEM ($\alpha := f(0)$) Alors $f(2\cdot) = 2\sigma f\sqrt{1+f^2}$ où σ est une fn signe. Excluons solution où $g := f^2$ constante 0 ou $-\frac{3}{4}$.

$\boxed{\text{cas } \alpha = 0}$ On peut résoudre $2g = \sqrt{1+g(2\cdot)}-1$ (pas $-\sqrt{\ }$ car $\alpha = 0$). Soit $a > 0$ tq $g(a) \neq 0$, alors $a_n := g\left(\frac{a}{2^n}\right)$ vérifie $a_{n+1} = \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{2} = \frac{a_n}{4} + O\left(a_n^2\right)$, d'où (LEM) $|a_n| \sim \frac{C}{4^n}$. Si $f'(0) = 0$, alors $a_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 = o\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 = o\left(\frac{1}{4^n}\right)$, abs. Alors injecter DL1 donne $\sigma = \frac{\lambda 2c+o(c)}{2(\lambda c+o(c))}\frac{1}{1+o(1)} \sim 1$, donc $\sigma = 1$ autour de 0

f^2+1 reste proche de 1 autour de 0. Posons $e := \sqrt{1+f^2}+\varepsilon f$ (avec $\varepsilon^2 = 1$) où $\sqrt{\ }$ est la racine carré principale (qui est dér en 1 : à la main comme dans $\mathbf{R}$). Alorsvérifions que e est une exponentielle ($e \neq 0$ sinon $1+f^2 = f^2$) : d'une part e dér en 0 (car $\sqrt{\ }$ l'est en 1), d'autre part

$$\begin{aligned} e(2\cdot) &= \sqrt{1+4f^2\left(1+f^2\right)}+\varepsilon 2\sigma f\sqrt{1+f^2} = \sqrt{\left(1+2f^2\right)^2}+\varepsilon 2f\sqrt{1+f^2} \\ &= 2f^2+1+2\varepsilon f\sqrt{1+f^2} = e^2. \end{aligned}$$

Alors $f = \frac{e_+-e_-}{2} = e^{\lambda\cdot}\operatorname{sh}(\omega\cdot)$, d'où en réinjectant

$$2e^{2\lambda\cdot}\operatorname{sh}(\omega\cdot)\operatorname{ch}(\omega\cdot) = f(2\cdot) = 2f\sqrt{1+f^2} = 2e^{\lambda\cdot}\operatorname{sh}(\omega\cdot)\sqrt{1+e^{2\lambda\cdot}\left(\operatorname{ch}^2(\omega\cdot)-1\right)}.$$

Eleer au carré impose $\lambda = 0$. Finalement, f est un $\operatorname{sh}(\omega\cdot)$ autour de 0 (et cela se propage)

$\boxed{\text{cas } \alpha^2 = -\frac{3}{4}}$ On obtient $g = \frac{-1-\sqrt{1+g(2\cdot)}}{2}$d'où $\delta := g-g(0) = g+\frac{3}{4} = \frac{1-\sqrt{1+4\delta(2\cdot)}}{4}$ et $a_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1+4a_n}}{4} = -\frac{a_n}{2}+O(a_n)$ et $|a_n| \sim \frac{C}{2^n}$. Si $f'(0) = 0$, alors $a_n = f\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 = o\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 = o\left(\frac{1}{4^n}\right)$, abs. Or dériver éq originelle donc $2\ 2f'(2\cdot) f(2\cdot) = 4\left(2ff'\left(1+f^2\right)+f^2 2ff'\right)$, d'où $f'(2\cdot) f(2\cdot) = \left(1+2f^2\right)2ff'$, d'où $1=\left(1+2\alpha^2\right)2$ et $\alpha^2 = \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$, abs. Donc g cste. Mais la continiuité en 0de f imposer σ cst autour de 0.

Conclusion : les solutions sont les $\operatorname{sh}(\omega\cdot)$ (dont 0) et $\frac{i\sqrt{3}\sigma}{2}$ où σfn signe cst autour de 0.

RQ : en duplquuant un graphe (cf DM cos), on obtient une sol à l'éqau fonc tjs continue en 0 (mais pas forcément der car on n'est pas parti forcément d'un sh)

EXO (sin **par duplication et dérivabilité en** 0) *trouver les* f *dérivables en* 0 sur un $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot)^2 = (2f)^2\left(1-f^2\right)$$

DEM $f(2\cdot) = 2\sigma f\sqrt{1-f^2}$, excluons solution où $g := f^2$ constante 0 ou $\frac{3}{4}$.

$\boxed{\text{cas } \alpha = 0}$ On peut résoudre $1-2g = \sqrt{1-g(2\cdot)}$ (pas $-\sqrt{}$ car $\alpha = 0$). Soit $a>0$ tq $g(a)\neq 0$, alors $a_n := g\left(\frac{a}{2^n}\right)$ vérifie $a_{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-a_n}}{2} = \frac{a_n}{4}+O\left(a_n^2\right)$, d'où (LEM) $|a_n| \sim \frac{C}{4^n}$ et l'on conclut comme ci-dessus $f'(0)\neq 0$ puis $\sigma\sim 1$. Alors idem avec $e := \sqrt{1-f^2}+i\varepsilon f$, d'où $f = \frac{e_+-e_-}{2i} = e^{\lambda\cdot}\sin(\omega\cdot)$ puis $\lambda = 0$.

$\boxed{\text{cas } \alpha^2 = \frac{3}{4}}$ alors $g = \frac{1+\sqrt{1-g(2\cdot)}}{2}$ d'où $\delta = \frac{\sqrt{1+4\delta}-1}{4}$ et $|a_n|\sim\frac{C}{2^n}$. Comme ci-dessus, on a $f'(0)\neq 0$, d'où $f'(2\cdot) f(2\cdot) = \left(1-f^2\right)2ff'$, d'où $1 = \left(1-2\alpha^2\right)2$ et $\alpha^2 = \frac{\frac{1}{2}-1}{-2}$, abs.

Conclusion : les solutions sont les $\sin(\omega\cdot)$ (dont 0) et $\frac{\sqrt{3}\sigma}{2}$ où σfn signe cst autour de 0.

Même rq pour pleinns de solutions continues non dériavalbes

3.5 DM : cos et ch par formule duplication + DL_2 en 0

EXO (cos **et** ch **par duplication et** DL_2 **en** 0) *trouver les* f *réelles admettant un* $DL_2(0)$ *sur un* $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot) = 2f^2-1.$$

Que se passe-t-il si on supose juste $DL_1(0)$ *? juste continue en* 0 ?

DEM On connaît cos et ch (et les constantes 1 ou $-\frac{1}{2}$)

Idée : se ramne à équa fonctionnelle sur $\exp(i\cdot) = f+i\sqrt{1-f^2}$ et $\exp = f+\sqrt{f^2-1}$ Il faut pour cela préciser la position de f par rapport à 1, d'où le DL2.

Analyse Puisque $2f^2\geq 0$, on a $f\geq -1$. Puisque f bornée autour de 0 (car continue en 0), f est loc bornée. On a de plus $\begin{cases} f(0) = 2f(0)^2-1 \\ f'(0) = 22f'(0) f(0)\end{cases}$, d'où $\begin{array}{c} f(0) = 1 \text{ ou } -\frac{1}{2} \\ f'(0) = 0 \text{ ou (exclu) } 1 = 2f(0)\end{array}$. Enfin, selon la valeur en 0, de la continuité en 0 on tire $f\gtrless 0$ autour de 0, d'où $f\left(\frac{\cdot}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+f}{2}}$ avec le *même* signe $\pm$ autour de 0.

Bilan : il y a un $A>0$ et un signe $\varepsilon\in\{\pm 1\}$ tels que $\begin{cases} f\geq -1 \text{ majorée sur } [A,2A[\\ f\left(\frac{\cdot}{2}\right) = \varepsilon\sqrt{\frac{1+f}{2}} \text{ sur }]0,2A[\\ f(0) = \frac{1+3\varepsilon}{4}\ \left(1 \text{ ou } -\frac{1}{2}\right) \\ f'(0) = 0\end{cases}$

Suite analyse

$\boxed{\text{Cas } f(0) = -\frac{1}{2}}$ Autour de 0 on a $f\left(\frac{\cdot}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1+f}{2}}$, çed (def $\delta := f+\frac{1}{2}$) $\delta\left(\frac{\cdot}{2}\right) = \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{\frac{1}{2}+\delta}{2}} = \frac{1-\sqrt{1+2\delta}}{2} = \frac{1-(1+\delta+o(\delta))}{2} = -\frac{\delta}{2}+O\left(\delta^2\right)$.

Supposons f non constante et soit $a>0$ tq $\delta(a)\neq 0$: alors $\delta\left(\frac{a}{2}\right)\neq 0$ et (rec) $a_n := \delta\left(\frac{a}{2^n}\right)\neq 0$ ÀPCR, d'où sens à $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\delta\left(\frac{1}{2}\frac{a}{2^n}\right)}{\delta\left(\frac{a}{2^n}\right)} = -\frac{1}{2}+O(a_n)$ et (LEM) $\exists C>0$, $|a_n|\sim\frac{C}{2^n}$. D'autre part, puisque $f'(0) = 0$, on a $\delta(t) = o(t)$, d'où $\delta\left(\frac{a}{2^n}\right) = o\left(\frac{a}{2^n}\right)$, çed $a_n = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$: absurde. Donc $f = -\frac{1}{2}$. (on a juste utilisé dér en 0, pas le DL2)

$\boxed{\text{Cas } f(0) = 1}$ Autour de 0 on a $f\left(\frac{\cdot}{2}\right) = +\sqrt{\frac{1+f}{2}}$, çed (def $\delta := f-1$) $\delta\left(\frac{\cdot}{2}\right) = \sqrt{1+\frac{\delta}{2}}-1 = \frac{\delta}{4}+O\left(\delta^2\right)$

<u>CCas $f''(0)=0$</u> Supp f non constante et soit $a>0$ tq $\delta(a)\neq 0$: alors $a_n:=\delta\left(\frac{a}{2^n}\right)\neq 0$ ÀPCR, d'où sens à $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}+O(a_n)$ et (LEM) $\exists C>0\ |a_n|\sim\frac{C}{4^n}$. Or $\delta(t)=o\left(t^2\right)$, d'où $a_n=\delta\left(\frac{a}{2^n}\right)=o\left(\left(\frac{a}{2^n}\right)^2\right)=o\left(\frac{1}{4^n}\right)$, absurde. Donc $f=1$.

<u>CCas $f''(0)>0$</u> alors $f\geq 1$ autour de 0 où l'on def $e:=f+\sqrt{f^2-1}$ (on attend ch + sh = exp, mq e dér en 0^+ et morphisme double carré). D'une part

$$f^2-1=\left(1+\lambda t^2+o\left(t^2\right)\right)^2-1=2\lambda t^2\left(1+o(1)\right),\text{ d'où }\sqrt{f^2-1}\overset{\lambda\geq 0}{=}\sqrt{2\lambda}\,|t|+o(t),$$

ce qui mq e admet DL1 en 0^+, çed e der en 0^+. D'aute part :

$$\begin{aligned}e(2\cdot) &= f(2\cdot)+\sqrt{f(2\cdot)^2-1}=2f^2-1+\sqrt{\left(2f^2-1\right)^2-1}=f^2+\sqrt{4f^4-4f^2}+f^2-1\\ &= f^2+2|f|\sqrt{f^2-1}+\sqrt{f^2-1}^2=\left(f+\sqrt{f^2-1}\right)^2=e^2.\end{aligned}$$

Donc $e=e^{\omega\cdot}$ (cas $e=0$ donne $f^2=f^2-1$ absurde) d'où $f^2-1=(e-f)^2=e^2-2ef+f^2$, çed $f=\frac{e^2+1}{2e}=\mathrm{ch}(\omega\cdot)$, ce qui se propage loin de 0. (Pour d'autres direction, eg 0^-, le DL2 donne le même $\pm\omega$ racine de $f''(0)>0$ (en pariteulier ω *réel*))

<u>CCas $f''(0)<0$</u> Idem avec $e:=f+i\sqrt{1-f^2}$ avec cette fois $0<f''(0)=\omega^2$ d'où $\omega\in i\mathbf{R}$ et $f=\cos(\omega\cdot)$.

Synthèse : soit $A>0$, soit $\varepsilon\in\{\pm 1\}$, soit $F\geq -1$ majorée sur $[A,2A[$ puis def $\begin{cases} f:=F \text{ sur } [A,2A[\\ f\left(\frac{\cdot}{2}\right):=\varepsilon\sqrt{\frac{1+f}{2}} \text{ sur }]0,2A[\\ f(0):=\frac{1+3\varepsilon}{4}\ \left(1 \text{ ou } -\frac{1}{2}\right)\end{cases}$

et $\begin{cases}\delta:=f-f(0)\\ t_n:=\frac{A}{2^n}\ a_n:=\delta(t_n)\\ M_n:=\max_{[t_n,t_{n-1}]}\delta\end{cases}$.

LEM* Soit $f:Vois_{\text{dans }\mathbb{R}_+}(0)\longrightarrow\mathbb{C}$, soit $a_n\overset{\searrow\searrow}{\longrightarrow}0$ tq $a_n=O(a_{n+1})$ (eg $a_n=\frac{1}{2^n}$), soit $\gamma\in\mathbb{R}$. Mq $f(t)=o(t^\gamma)$ ssi $\max_{[a_na_{n-1}]}|f|=o(a_n^\gamma)$.

DEM Soit $\varepsilon>0$.

=> Soit $\delta>0$ tq $0<t<\delta\Longrightarrow|f(t)|<\varepsilon t^\gamma$, soit N tq $a_N<\delta$, soit $n>N$: alors $\max_{[a_na_{n-1}]}|f|$ atteint en un certain $t\in[a_n,a_{n-1}]\subset\,]0,a_N]\subset\,]0,\delta[$, d'où $\max_{[a_na_{n-1}]}|f|=|f(t)|<\varepsilon t^\gamma\overset{t<a_{n-1}}{<}\varepsilon a_{n-1}^\gamma\overset{a_n=O(a_{n+1})}{<}C^\gamma\varepsilon a_n^\gamma$.

<= Soit N tq $n>N\Longrightarrow\max_{[a_na_{n-1}]}|f|<\varepsilon a_n^\gamma$, soit $0<\delta<a_N$, soit $0<t<\delta$, soit $n>N$ tq $a_n<t<a_{n-1}$: alors $f(t)\leq\max_{[a_na_{n-1}]}|f|<\varepsilon a_n^\gamma<\varepsilon t^\gamma$.

$\boxed{\text{Cas } \varepsilon=-1}$ Alors $\delta\left(\frac{\cdot}{2}\right)=\frac{1-\sqrt{1+2\delta}}{2}$ et reprendre le $\boxed{\text{Cas } f(0)=-\frac{1}{2}}$ mq f non dér en 0 (sauf si f cste).

$\boxed{\text{Cas } \varepsilon=+1}$ Alors $\delta\left(\frac{\cdot}{2}\right)=\sqrt{1+\frac{\delta}{2}}-1$. Mq f dér en 0 mais f n'admet pas (sauf si f cste) de $DL_2(0)$ de terme quardratique nul.

Puisque $\varphi(t):=\sqrt{1+\frac{t}{2}}-1$ croît et $\delta\left(\frac{\cdot}{2}\right)=\varphi\circ\delta$, on a $M_{n+1}=\varphi(M_n)$, d'où (réc) ou bien $M_n\neq 0$ÀPCR ou bien $M_n=0$ÀPCR, donc $|M_n|=O\left(\frac{1}{4^n}\right)$ dans tous les cas (trivial si M_n nul ÀPCR, sinon LEM avec $\varphi(t)=\frac{t}{4}+O(t)$), de même pour $m_n:=\min_{[t_n,t_{n-1}]}\delta$, d'où

$$\max_{[t_n,t_{n-1}]}|\delta|=\max\left\{\left|\max_{[t_n,t_{n-1}]}\delta\right|,\left|\min_{[t_n,t_{n-1}]}\delta\right|\right\}=\max\{|M_n|,|m_n|\}=\frac{\max\{O(1),O(1)\}}{4^n}=\frac{O(1)}{4^n}$$

donc $\forall\gamma<2$, $\frac{\max_{[t_n,t_{n-1}]}|\delta|}{t_n^\gamma}=O(1)\frac{2^{\gamma n}}{4^n}=o(1)$, çed (LEM*) $\delta(t)=o(t^\gamma)$: mieux que dérivable !

Si f non constante, repdnre le <u>CCas $f''(0)=0$</u> ci-dessus pour nier $\delta(t)=o\left(t^2\right)$

Résumé synthèse : on donne $\begin{array}{l} f:=F \text{ sur } [A,2A[\\ f\left(\frac{\cdot}{2}\right):=\varepsilon\sqrt{\frac{1+f}{2}} \text{ sur }]0,2A[\\ f(0):=\frac{1+3\varepsilon}{4}\ \left(1 \text{ ou } -\frac{1}{2}\right)\end{array}$. Alors $\begin{array}{c} f \text{ continue en } 0\\ \text{ssi } F \text{ majorée}\end{array}$ et dans ce cas

ou bien $\varepsilon=-1$: alors $\begin{array}{l}\text{ou bien } f=-\frac{1}{2}\\ \text{ou bien } f \text{ non dérivable en } 0\end{array}$

ou bien $\varepsilon=1$: alors $\begin{array}{c} f \text{ dérivable en } 0\\ \text{avec } f'(0)=0\end{array}$ et $\begin{array}{l}\text{ou bien } f=1\\ \text{ou bien } f \text{ n'admet pas de } DL_2(0)\\ \text{ou bien } f \text{ admet un } DL_2(0) \text{ de tq } \neq 0\\ \text{et alors } f \text{ est un } \cos(\omega\cdot) \text{ ou un } \mathrm{ch}(\omega\cdot)\end{array}$

Conclusion :

* les solutions admettant un $DL_2(0)$ sont les cosinus $\operatorname{ch}(c\cdot)$ pour un $c\in\mathbf{R}\cup i\mathbf{R}$ (dont 1 qd $c=0$).et la constante $-\frac{1}{2}$

* les solutions dérivables en 0 mais sans $DL_2(0)$ permettant de trancher position relative courbe/tangente s'obtiennent en imposant $\begin{array}{c}\varepsilon=-1\\ F=-\frac{1}{2}\end{array}$ ou $\begin{array}{c}\varepsilon=1\\ F\text{ pas ch}\end{array}$.

* les sol continues en 0 non dérivables en 0 s'obtiennent en imposant $\begin{array}{c}\varepsilon=-1\\ F\text{ non cste}\end{array}$

EG superposition des deux ch (eg à l'aide d'une parittionde $\mathbf{R}$ en deux parties stables par double.moitié, eg $f=\chi_{\mathbf{Q}}\cos+\chi_{^c\mathbf{Q}}\operatorname{ch}$). Mieux, on partionne $\mathbf{Q}$ selon la valuation 3-adique (inchange par double/moitité), d'où unefamilel dénombrablbe de ch, 1, cos (le $-\frac{1}{2}$pose pb de continuité) Le DL_2 impose un seul élément de la famille.

Géné : même EXO en supposant f *complexe*

$\boxed{\text{Cas } f(0)=-\frac{1}{2}}$ *cf* cas réel

$\boxed{\text{Cas } f(0)=1}$ Posons $e_\pm:=f\pm\sqrt{f^2-1}$ (avec racine principale). Alors d'une part

$$\begin{aligned}e(2\cdot)&=f(2\cdot)+\sqrt{f(2\cdot)^2-1}=2f^2-1+\sqrt{4f^2(f^2-1)}\\ &=f^2+2\sqrt{f^2(f^2-1)}+\sqrt{f^2-1}^2\overset{?}{=}e^2\text{ ok si }\sqrt{f^2(f^2-1)}\overset{?}{=}f\sqrt{(f^2-1)}\end{aligned}$$

or comme $f\simeq1$ on a déjà $\sqrt{f^2}=f$ et ce qu'on veut découle de $\operatorname{Arg}c(c+1)=\operatorname{Arg}c+\operatorname{Arg}(c+1)$ pour c assez proche de 0 (les trois compelxes restent alors dans le même demiplan Im $\lesseqgtr 0$). D'autre part, e est dérivable[1] en 0^+ (utilsieer le DL_2 et $\sqrt{tc}=\sqrt{t}\sqrt{c}$ pour $t\geq0$) :

$$\begin{aligned}&f^2(t)=\left(1+\lambda t^2+o\left(t^2\right)\right)^2=1+2\lambda t^2+o\left(t^2\right)\\ &\text{d'où }\sqrt{f^2-1}(t)=\sqrt{2\lambda t^2+o(t^2)}\overset{t\geq0}{=}t\sqrt{2\lambda+o(1)}\sim\sqrt{2\lambda}t\end{aligned}$$

Alors $e_\pm$ est ou bien nulle (alors $f=\mp\sqrt{f^2-1}$ d'où au carré $f^2=f^2-1$ impossible) ou bien $e_\pm=e^{(\lambda\pm\omega)\cdot}$. On en déduit $f=\frac{e_++e_-}{2}=e^{\lambda\cdot}\operatorname{ch}(\omega\cdot)$. Réinjecter donne $e^{2\lambda\cdot}\left(2\operatorname{ch}^2(\omega\cdot)-1\right)=2e^{2\lambda\cdot}\operatorname{ch}^2(\omega\cdot)-1$ et $\lambda=0$. On propage ensuite à tout $\mathbb{P}^{1/2}$.

Quetsion ouverte : qd f *complexe*, peut-on montrer dans le $\boxed{\text{Cas }\varepsilon=+1}$ la négligabilité $\max_{[t_n,t_{n-1}]}|\delta|=o\left(\frac{1}{2^n}\right)$? ? ? traduire la croisance de $\sqrt{\frac{1+\mathrm{Id}}{2}}$ pour une norme à trouver ? ? ?

3.6 $\binom{\cos}{\sin}$ et $\binom{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}$ par formules duplication/carré croisées + 0dérivabilité

EXO (**$\cos\operatorname{ch}$ et $\sin\operatorname{sh}$ par les formules des carrés**) *trouver les* f,g dérivable en 0 *tq*

$$\begin{array}{c}f^2(a)=\frac{1+f(2a)}{2}\\ g^2(a)=\frac{1-f(2a)}{2}\end{array}\quad\text{ou}\quad\begin{array}{c}f^2(a)=\frac{f(2a)+1}{2}\\ g^2(a)=\frac{f(2a)-1}{2}\end{array}$$

DEM : $f(2\cdot)=2f^2-1$, donc ou bien $f(0)=-\frac{1}{2}$ (alors $f=-\frac{1}{2}$et $g=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, signe indéterminé, le même pour avoir der en 0), ou bien $f(0)=1$ et $g(0)=0$, d'où $\frac{1-f(2t)}{2}=g^2(t)=(\lambda t+o(t))^2=\lambda^2t^2+o\left(t^2\right)$, donc f DL_2 et $f=\cos(\omega\cdot)$ et $g=\pm\sin(\omega\cdot)$ (signe indéterminé) ($\omega=0$ possible).

2e variante : remplacer g par ig.

EXO (**$\cos$ et $\sin$ par les formules de duplication**) *trouver les* f,g *der en* 0 *tq*

$$\begin{array}{c}f(2a)=f(a)^2-g(a)^2\\ g(2a)=2f(a)g(a)\end{array}\ ?\quad\text{Variante2}\ \begin{array}{c}f(2a)=2f(a)^2-1\\ g(2a)=2f(a)g(a)\end{array}\ ?\quad\text{Variante3}\ \begin{array}{c}f(2a)=1-2g(a)^2\\ g(2a)=2f(a)g(a)\end{array}$$

[1] dans le cas $-1/2$, la fonction $\sqrt{f^2-1}=\sqrt{-\frac{3}{4}+o(t)}$ n'est pas forcment continue en 0 !

DEM : (rq : si g sol°, alors $-g$ aussi)

$\boxed{\text{variante 1}}$ on rq $f \pm ig$ transforment doubles en carrés (rq : si $\binom{f}{g}$ sol alors $e^{c\cdot}\binom{f}{g}$ aussi)

si l'une est nulle : alors l'équation devient $f(2a) = 2f(a)^2$, donc$2f$ transofmre doubles en carrés, donc est ou bien nulle (cas $f = 0 = g$) ou bien une expontielle complexe et $\binom{f}{g} = \frac{e^{c\cdot}}{2}\binom{1}{\pm i}$, qui sont sol.

si les deux sont exp : mettons $f, g = e^{(\lambda+i\omega)\cdot}, e^{(\lambda-i\omega)\cdot}$, d'où $f = \frac{e^{(\lambda+i\omega)\cdot}+e^{(\lambda-i\omega)\cdot}}{2} = e^{\lambda\cdot}\cos(\omega\cdot)$ et de même $g = e^{\lambda\cdot}\sin(\omega\cdot)$ (le cas $\omega = 0$ donne sol cstes $1, 0$). (RQ : si plus f, g *bornés* alors $\lambda \in i\mathbf{R}$)

IDEM pour $f(2a) = f(a)^2 + g(a)^2$

$\boxed{\text{variante2}}$ RQ : eq homogène en g, donc il va y avoir un paramètre $\lambda := g'(0)$.

Si $f = -\frac{1}{2}$, alors $g(2\cdot) = -g$ d'où $g = g\left(\frac{\cdot}{4^n}\right) \longrightarrow g(0) = 0$. OPDI $f \neq -\frac{1}{2}$. Alors $f(0) = 1$ (d'où $g(0) = 0$) et

$$g(a) = 2f\left(\frac{a}{2}\right)g\left(\frac{a}{2}\right) = 2^n g\left(\frac{a}{2^n}\right)\prod_{i=1}^{n} f\left(\frac{a}{2^i}\right) \underset{\text{ok si } \lambda\neq 0}{\overset{?}{\longrightarrow}} \lambda a\,\Pi(a)$$

si l'on mq $\Pi := a \mapsto \prod_{n\geq 1} f\left(\frac{a}{2^n}\right)$ cv, ce qui est le cas pour $a \simeq 0$ car alors $\ln f\left(\frac{a}{2^n}\right)$ fait sens **SI CAS REEL ? ? ?** et $= \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{4^n}\right)\right) = O\left(\frac{1}{4^n}\right)$ cv en $\sum$. (RQ : même si $f = -\frac{1}{2}$ on a encore $g = \lambda\,\mathrm{Id}\,\Pi$ avec $\lambda = 0$ et $\Pi = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$)

Synthèse : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit f tq $f(2a) = 2f(a)^2 - 1$ Alors Π cv (*cf.* avant) et vérifie $\Pi(2a) = f(a)\Pi(a)$. Def $g(a) := \lambda\Pi(a)a$ quii vérifie $g(0) = 0$ et $g(2a) = 2f(a)g(a)$. Mq g der en 0 (avec $g'(0) = \lambda$) Le TV vaut $\frac{g(a)-g(0)}{a-0} = \lambda\Pi(a)$: si $\lambda = 0$ alors $g = 0$ et le TV est nul, donc $\longrightarrow \lambda$; sinon mq $\Pi \overset{0}{\longrightarrow} 1$.

Soit $\alpha \in [A, 2A[$ où f max (imposer A assez petit pour que $\alpha \neq 0$) et def $\alpha_n := f\left(\frac{a}{2^n}\right) = \max_{\frac{1}{2^n}[A,2A[} f$ (par croisance de $\sqrt{\frac{1+\mathrm{Id}}{2}}$ **SI CAS REEL ? ? ?**) (chacun $\neq 0$) de sorte que $\Pi(\alpha_n) = \frac{\Pi(\alpha)}{\alpha_1\ldots\alpha_n} \longrightarrow 1$ (idem β min avec $f(\beta) > 0$). Soit $\varepsilon > 0$, soit N tq $n > N \Longrightarrow \begin{matrix}|\Pi(\alpha_n) - 1| \\ |\Pi(\beta_n) - 1|\end{matrix} < \varepsilon$, soit $t < \frac{1}{2^N}$, soit $n > N$ tq $\frac{1}{2^{n+1}} < t < \frac{1}{2^n}$: alors $(\forall i > 0)$ $\frac{1}{2^{n+i+1}} < \frac{t}{2^i} < \frac{1}{2^{n+i}}$ d'où $f\left(\beta_{n+i}\right) < f\left(\frac{t}{2^i}\right) < f(\alpha_{n+i})$ et $\Pi(\beta_n) \leq \Pi(t) \leq \Pi(\alpha_n)$ où chaque membre $\longrightarrow 1$, CQFD

RQ : $\lambda = 0$ ssi $g = 0$.

SC : si f DL_2, alors $f = \mathrm{ch}(\omega\cdot)$ (ou $-\frac{1}{2}$ et $g = 0$), donc $g\left(\frac{\cdot}{\omega}\right)$ vérfie fausse éqution du sinus (ou $g = \mathrm{Id}$ si $\omega = 0$), d'où $g = \mathrm{sh}(\omega\cdot)$ (SC : calculer Π dans ces cas)

Cas complexe ? ? ?

$\boxed{\text{variante3}}$ (cas où images REELLES) $f \leq 1$ (car 1 moins un carré). évaluer en 0 livre $\binom{f(0)}{g(0)} = \binom{1}{0}$ (d'où $f'(0) = 0$) ou bien $f(0) = \frac{1}{2} = g(0)$ (et $f'(0) = 0 = g'(0)$). PUisque $f(0) > 0$, la continuité en 0 donne $|f| \leq 1$ autour de 0

def $\binom{F}{G} := \binom{2f}{2g}$, alors $\begin{cases} F(2\cdot) = 2 - G^2 \\ G(2\cdot) = FG \end{cases}$ et $|F| \leq 2$.

CAS $\binom{f(0)}{g(0)} = \binom{1}{0}$. Mq $\delta := F^2 - 4 + G^2 = 0$ (on sera alors ramené à $f(2a) = f(a)^2 - g(a)^2$ (vairante 1), d'où $\binom{f}{g} = \binom{\cos(\omega\cdot)}{\sin(\omega\cdot)}$). On a $\delta(0) = 0$ et

$$\begin{aligned} |G(a)| &= \left|F\left(\frac{a}{2}\right)G\left(\frac{a}{2}\right)\right| \leq 2\left|G\left(\frac{a}{2}\right)\right| \leq \cdots \leq 2^n\left|G\left(\frac{a}{2^n}\right)\right| \\ &= a\left|\frac{G\left(\frac{a}{2^n}\right) - G(0)}{\frac{a}{2^n} - 0}\right| \longrightarrow |G'(0)|\,a \quad \text{d'où } G(a)^2 \leq Ca^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta(2\cdot) &= F(2\cdot)^2 - 4 + G(2\cdot)^2 = \left(2 - G^2\right)^2 - 4 + F^2G^2 \\ &= 4 - 4G^2 + G^4 - 4 + F^2G^2 = G^2\left(-4 + G^2 + F^2\right) = -G^2\delta, \\ \text{d'où } |\delta(a)| &\leq G^2\left(\frac{a}{2}\right)\left|\delta\left(\frac{a}{2}\right)\right| \leq C\left(\frac{a}{2}\right)^2 C\left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdots C\left(\frac{a}{2^n}\right)^2\left|\delta\left(\frac{a}{2^n}\right)\right| \\ &\leq \left|Ca^2\right|^n\left|\delta\left(\frac{a}{2^n}\right)\right| = \underbrace{o(1)}_{\text{si } |a|<\frac{1}{C}} \quad \underbrace{O(1)}_{\text{car } \delta \text{ continue en } 0} \quad \overset{n\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

CAS $F(0) = 1 = G(0)$ (si DSE, on peut mq $F = 1 = G$)

? ? ? Alors $F'(0) = 0 = G'(0)$. Def $\binom{a_n}{b_n} := \binom{F\left(\frac{a}{2^n}\right)}{G\left(\frac{a}{2^n}\right)}$ chacune > 0 ÀPCR (par coninutié en 0), d'où $\left\{ \begin{array}{c} a_{n-1} = 2 - b_n^2 \\ b_{n-1} = a_n b_n \end{array} \right.$,

çed $\left\{ \begin{array}{c} b_n = \sqrt{2 - a_{n-1}} = \sqrt{2 - \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}} \\ a_n = \frac{b_{n-1}}{b_n} = \sqrt{\frac{2-a_{n-2}}{2-a_{n-1}}} \end{array} \right.$. Def $\binom{\alpha_n}{\beta_n} := \binom{a_n - 1}{b_n - 1} \longrightarrow \binom{0}{0}$ et $\binom{A_n}{B_n} := 2^n \binom{\alpha_n}{\beta_n}$, alors

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{1 - \alpha_{n-2}}{1 - \alpha_{n-1}}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}{1 - \alpha_{n-1}}} - 1 \sim \frac{1}{2} \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}{1 - \alpha_{n-1}} \sim \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}{2},$$

çed $A_n \sim A_{n-1} - 2A_{n-2}$. De plus, 0dérvi donne $\frac{a_n - 1}{\frac{a}{2^n}} \longrightarrow 0$, çed $A_n \longrightarrow 0$ (idem pour β_n).

On a $F^2 = \frac{2-F(4\cdot)}{2-F(2\cdot)}$ et $G = \prod_{n\geq 1} F\left(\frac{\cdot}{2^n}\right)$. <=, puisque $\begin{array}{cc} F & G \\ F' & G' \end{array} (0) = \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}$,on retrouve eq fonc de départ. ? ? ?

EXO (ch **et** sh **par les formules de duplication)** : *fonction de* $\mathbf{R}$ *dans*$\mathbf{R}$ *dér en* 0 tq

$f(2a) = f(a)^2 + g(a)^2$	Variantes 2	Variantes 3 déjà
$g(2a) = 2g(a) f(a)$	(idem que avant)	couverte ci-dessu ? ? ?

DEM : on rq $f + g$ transforme doubles en carrés, donc est ou bien nulle ($f = g = 0$) ou bien une expontielle complexe $e^{(\lambda+\omega)\cdot}$, de même $f - g = e^{(\lambda-\omega)\cdot}$, d'où $f = \frac{e^{(\lambda+\omega)\cdot} + e^{(\lambda-\omega)\cdot}}{2} = e^{\lambda\cdot} \operatorname{ch}(\omega\cdot)$ et même $g = e^{\lambda} \operatorname{sh}(\omega\cdot)$.(cas $\omega = 0$ donne sol cstes $1, 0$)

RQ : dans le cas DSE, def au vois de 0 dans R mq de au vois de 0 dans C, ce qui donne sens à $f(i\cdot)$

4 Equa diff

4.1 Sinus par duplication & dérivée

EXO trouver les f dérivables tq

$$f(2\cdot) = 2ff'$$

RQ : si f sol alors $\frac{f(\lambda\cdot)}{\lambda}$ solution
sin & sh 0 Id $e^{\frac{\cdot}{2}}$

admettons analytique en 0 (DEM ? ? ? CEG ? ? ?) def $a_n := f^{(n)}(0)$. Dériver N fois donne

$$2^{N-1} a_N = \sum_{p+q=N} \binom{N}{p} a_p a_{q+1}$$

$\boxed{a_0 \neq 0}$ OPI $a_0 = \frac{1}{2}$. Mq alors $a_n = \frac{1}{2}$ (rec), d'où $f = \frac{\exp}{2}$ (et plus génlt $f(t) = \frac{e^{\lambda t}}{2\lambda}$)
$\boxed{a_0 = 0}$ $N \leftarrow 1$ donne $a_1 = 0 + a_1^2$ d'où $a_1 \in \{0, 1\}$.
mq $a_{2n} = 0$ (rec, utiliser $N \leftarrow 2n$)
$\underline{a_1 = 0}$ alors a_N poly en $a_{i<N}$ sans terme cst donc (rec) nul et $f = 0$.
$\underline{a_1 = 1}$ def $A_n := a_{2n+1}$ et mq $\forall n \geq 0$, $A_n = A_1^n$ (rec).
$A_1 = 0$: alors $f = \mathrm{Id}$, qui est solutino
$A_1 \neq 0$: OPI $A_1 = 1$ d'où $f = \operatorname{sh}$ (et plus génlt $f(t) = \frac{\operatorname{sh} \lambda t}{\lambda}$, dont sin)

Fait : les solutions de $f(2\cdot) = 2ff'$ qui admettent un $DSE(0)$ sont 0, Id, $\exp\left(\frac{\cdot}{2}\right)$, sh et leurs conjugués par les homothéties (par exemple $\frac{\exp}{2}$ et $\sin = \frac{\operatorname{sh}(i\cdot)}{i}$).

Question ouverte : y a-t-il d'autres solutions dérivables ? Moins précisément : la dérivabilité au voisinage de 0 implique-t-elle l'holomorphie en 0 ?

4.2 Cosinus par duplication & dérivée

EXO trouver les f dérivables tq

$$f(2\cdot) = 1 - 2f'^2$$

def $-F := f'$: alors $F(2\cdot) = 2FF'$ et *cf* avant :
$F = 0 \Longrightarrow f \text{cst } 1$
$F = \frac{\operatorname{sh} \lambda t}{\lambda} \Longrightarrow f = C - \frac{\operatorname{ch} \lambda t}{\lambda^2}$ réijecter donne $f = 1 + \frac{1 - \operatorname{ch} \lambda t}{\lambda^2}$ ($\lambda \leftarrow i$ donne $f = \cos$)
$F = \mathrm{Id} \Longrightarrow f = C - \frac{t^2}{2}$ réinjecter donne $C = 1$ d'où $f = 1 - \frac{t^2}{2}$
$F = \frac{e^{\lambda t}}{2\lambda} \Longrightarrow f = C - \frac{e^{\lambda t}}{2\lambda^2}$réinjecter donne $C = 1$ d'où $f = 1 - \frac{e^{\lambda t}}{2\lambda^2}$

EXO trouver les f dérivables tq

$$f(2\cdot) = 1 + 2f'^2$$

idée 1 : reprendre $1 - 2f'^2$ –> $f = 1 \qquad 1 + \frac{\operatorname{ch} \lambda t - 1}{\lambda^2} \qquad 1 + \frac{t^2}{2} \qquad 1 + \frac{e^{\lambda t}}{2\lambda^2}$

idée 2 : Si Dom f stable par $\frac{1}{4}$tour, def $g := f(i\cdot)$ pour se ramner à avant. (RQ : dans le cas DSE, def au vois de 0 dans R mq de au vois de 0 dans C, ce qui donne sens à $f(i\cdot)$)

EXO trouver les f dérivables tq

$$f(2\cdot) = f^2 \pm f'^2$$

(idée 1 idée 2 IDEM –> OPS $f(2\cdot) = f^2 - f'^2$
$0 \quad 1 \quad \frac{e^{\pm \lambda t}}{1 - \lambda^2} \qquad e^{t \sin \theta} \frac{\cos(t \cos \theta - \theta)}{\cos \theta}$(dont cos ; *cf* plus loin pour autre forme générale$\frac{e^{\lambda t} - \lambda^2 e^{\frac{t}{\lambda}}}{1 - \lambda^2}$) $\qquad (1 \pm t)\, e^{\mp t}$
admettons analytique en 0.def $a_n := f^{(n)}(0)$. Dériver $n + 1$ fois donne
$n \leftarrow -1 \qquad a_0 = a_0^2 - a_1^2$
$n \leftarrow 0 \qquad a_1 = (a_0 - a_2)\, a_1$
$n \leftarrow 1 \qquad 2a_2 + a_2^2 + a_1 a_3 = a_0 a_2 + a_1^2$
$n \leftarrow 2 \qquad (4 - a_0 + 3a_2)\, a_3 + a_1 a_4 = 3a_1 a_2$
et $\forall n \geq 2$

$$[2^n + (n+1)\, a_2 - a_0]\, a_{n+1} = a_1 a_n + n a_2 a_{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} \binom{n}{p} (a_p - a_{p+1})\, a_{n+1-p}$$

$\boxed{a_1 \neq 0}$ $\quad a_{n \geq 2} = \varphi(a_{i<n})$, $a_0 = a_0^2 - a_1^2$ avec $a_0 \neq 0$ Réciproque : soient $\alpha, \beta \neq 0$ tq $\beta^2 = \alpha(\alpha - 1)$ et soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tq $\alpha = \frac{1}{1 - \lambda^2}$. Alors $\alpha - 1 = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda^2}$ d'où $\beta^2 = \left(\frac{\lambda}{1 - \lambda^2}\right)^2$ et $\beta = \pm \frac{\lambda}{1 - \lambda^2}$; or $\frac{e^{\pm \lambda t}}{1 - \lambda^2}$ est SOL et vérifie $a_0 = \alpha$ et $a_1 = \frac{\neq \lambda}{1 - \lambda^2} = \beta$. (*heurisque* : calculer de proche en proche avec $\binom{a_0}{a_1} = \binom{2}{\sqrt{2}}$ semble donner $a_n = \sqrt{2}^{n-2}$ d'où idée $e^{\lambda t}$, à rectifier en $Ce^{\lambda t}$)

$\boxed{a_1 = 0}$ $\quad$ alors $a_0 \in \{0, 1\}$

$\underline{a_0 = 0}$ $\quad$ alors $a_2 \in \{0, -2\}$
si $a_2 = 0$, alors a_{n+1} poly en les $a_{i \leq n}$ sans terme cst donc $a = 0$ et $f = 0$.
S $a_2 = -2$, remplacer $n \leftarrow 2$ donne $a_3 = 0$ puis remplacer $n \leftarrow 3$ livre absurde

$\underline{a_0 = 1}$ $\quad$ alors $a_0 \in \{0, -1\}$
si $a_2 = 0$, alors $(2^n - 1)\, a_{n+1}$ poly en les $a_{1 \leq i \leq n}$ sans terme cst donc $a = 0$ et $f = 1$. OPdcS $a_2 = -1$. Alors

$$\forall n \geq 3,\ [2^n - n - 2]\, a_{n+1} = -n a_{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} \binom{n}{p} (a_p - a_{p+1})\, a_{n+1-p}$$

où indices à droite $\in [1, n]$ donc f déterminée par $\gamma := a_3$.

Heursique : calculer de proche en proche quand $\gamma = 1$ donne $\left(\underline{1, 0, -1}, 1, 0, -1, 0...\right)$ d'où (après bp travail) $\frac{2e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, de la forme $Ce^{\lambda t} \cos(\omega t - \varphi)$. *Fait* : l'application $e^{\lambda t}(A \cos \omega t - B \sin \omega t)$ vérifie $\begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}$ ssi $\begin{matrix} A = 1 \\ \lambda = B\omega \\ (B^2 + 1)\omega^2 = 1 \end{matrix}$, donc est solution

$$t \mapsto e^{B\omega t}(\cos \omega t - B \sin \omega t) \text{ dès que } \left(B^2 + 1\right)\omega^2 = 1.$$

(par exemple $\binom{\omega}{B} = \binom{\cos\theta}{\tan\theta}$ donne $e^{t \sin\theta} \frac{\cos(t \cos\theta - \theta)}{\cos\theta}$)

Synthèse : soit $C \in \mathbb{C}$, soit $\binom{\omega}{B}$ une racine carée de $\begin{pmatrix} 1 - C^2 \\ \frac{C^2}{1-C^2} \end{pmatrix}$ (alors ωB est une racine de C^2 que l'on peut imposer valoir C) : on alors $\left(B^2 + 1\right)\omega^2 = 1$, donc la solution associée est la solution telle que $a_3 = -2C$ (détailler calcul $f'''(0) = -2B\omega$). PB si $C = \pm 1$ (çed $\gamma = \pm 2$), couvert par $(1 + \sigma t)e^{-\sigma t}$ où $\sigma = \pm 1$ (intuité car sur petites valeurs on observe $a_{n+1} = (-1)^n n$ ou $-n$) qui est bien sokution tq $a_3 = \pm 2$.

4.3 Tangente par duplication & dérivée

EXO trouver les f dérivables tq

$$(2 - f') f(2\cdot) = 2f$$

RQ : si f SOLalors $\frac{f(\lambda\cdot)}{\lambda}$ aussi pour chaque $\lambda \in \mathbf{C}^*$.
cstes $\quad \frac{\tan(\lambda\cdot)}{\lambda} \quad$ Id (qd $\lambda \to 0$)

admettons analytique en 0.def $a_n := f^{(n)}(0)$. Dériver n fois donne
$n \leftarrow 0 \quad 2a_0 = a_0(2 - a_1)$
$n \leftarrow 1 \quad 2a_1 = 2a_1(2 - a_1) - a_0 a_2$
$n \leftarrow 2 \quad 2a_2 = 4a_2(2 - a_1) - 4a_1 a_2 - a_0 a_3$
et $\forall n \geq 2$

$$a_0 a_{n+1} + a_n \underbrace{[2 - 2^n(2 - a_1) + 2na_1]}_{\neq 0 \text{ si } n \neq 3, \text{ donc } f \text{ det par } a_3} = -\sum_{\substack{p+q=n \\ 2 \leq p < n \\ 1 \leq q \leq n-2}} 2^p \binom{n}{p} \underbrace{a_p a_{q+1}}_{\substack{\text{indices} \\ \text{dans } [1,n[}}$$

$\boxed{a_0 \neq 0}$ alors $a_1 = 0 = a_2$ et (rec) $a_n = 0$ d'où f cst.
$\boxed{a_0 = 0}$
$\underline{a_1 = 0}$ idem $f = 0$
$\underline{a_1 \neq 0}$ $a_1 = 1 \quad a_2 = 0$. Alors $\text{Coef}_{a_n} \neq 0$ si $n \neq 3$, donc f det par a_3.
Si $a_3 = 0$, alors (rec) $a_n = 0$ et $f = \text{Id}$. OPdcS $a_3 \neq 0$. Alors $g := \frac{\tan \lambda t}{\lambda}$ est SOL et vérifie $g'''(0) = \lambda^2 \tan'''(0) = 2\lambda^2$, donc vaut f en imposant $2\lambda^2 = a_3$.

4.4 sin et cos par formules d'addition avec dérivée

EXO (sin **par formule d'addition & dérivée)** *dér tq*

$$f(a + b) = f(a) f'(b) + f'(a) f(b) \ ?$$

RQ : si f SOL alors $\frac{f(\lambda\cdot)}{\lambda}$ SOL
$0 \quad \frac{e^{\lambda t}}{2\lambda} \quad \text{Id} \quad \frac{\text{sh}(\lambda t)}{\lambda}$ (si de plus réelle bornée alors $\frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$)
RQ : $a = b$ donne $f(2\cdot) = 2ff'$ que l'on a résolu : mêmes solutions :-)

DEM les constantes solution sont 0. Sinon, on prend un $f(b) \neq 0$ pour exprimer $f'(a)$ à l'aide des autres –> f C^∞.

Conditino intiales Faire $b=0$ donne $f=f'(0)\,f+f(0)\,f'$. Si $f(0)\neq 0$, alors $f=Ce^{\lambda\cdot}$ avec $1=2C\lambda$ (pas borné). Sinon, $f=f'(0)\,f$ donne ou bien $f=0$ (exclu) ou bien $f'(0)=1$. Donc OPS $(f,f')(0)=(0,1)$.

équa diff Dériver en a donne $f'(a+b)=f'(a)\,f'(b)+f''(a)\,f(b)$, demême en dérvant b , d'où égalité $f''(a)\,f(b)=f(a)\,f''(b)$: d'où ou bien $f''=0$ (d'où f affine $=a\,\mathrm{Id}+b$ et les CI donne$a=1$ et $b=0$: cela devient Id qui n'est pas borné)) ou bien $f''=?f$, donc f est un $Ae^{\lambda\cdot}+Be^{-\lambda\cdot}$ et les CI donnent $B=-A$ et $A=\frac{1}{2\lambda}$ d'où $f=\frac{\mathrm{sh}(\lambda t)}{\lambda}$.

EXO (cos **par formule d'addition & dérivée)** *dér bornée tq*

$$f(a+b)=f(a)\,f(b)-f'(a)\,f'(b)\ ?$$

0 1 $\frac{e^{\pm\lambda t}}{1-\lambda^2}$ $\frac{e^{\lambda t}-\lambda^2 e^{\frac{t}{\lambda}}}{1-\lambda^2}$ $(1\pm t)\,e^{\mp t}$ (si de plus réelle borneé alors cos $(\lambda\leftarrow i)$)

RQ : $a=b$ donne $f(2\cdot)=f^2-f'^2$ que l'on a résolu : mêmes solutions :-)

DEM les constantes solution sont 0 et 1. Sinon, on prend un $f'(b)\neq 0$ pour exprimer $f'(a)$ à l'aide des autres $->$ f C^∞.

Conditino intiales Faire $b=0$ donne $f=f(0)\,f-f'(0)\,f'$. Si $f'(0)\neq 0$, alors $f=Ce^{\lambda\cdot}$ avec $C\left(1-\lambda^2\right)=1$ (pas borné). Sinon, $f=f(0)\,f$ donne $f=0$ (exclu) ou $f(0)=1$. Dériver en a puis b donne $f''(a+b)=f'(a)\,f'(b)-f''(a)\,f''(b)$, donc $(b=0)$ $f''=-f''(0)\,f''$, d'où $f''=0$ (d'où f polynome non cst, imposible à cause des degrés) ou $f''(0)=-1$. Donc OPS $(f,f',f'')(0)=(1,0,-1)$.

équa diff PAr ailleurs, on a

$$f(a)\,f'(b)-f'(a)\,f''(b)\overset{\mathrm{der}\ b}{=}f'(a+b)\overset{\mathrm{der}\ a}{=}f'(a)\,f(b)-f''(a)\,f'(b)\,,$$

d'où en divisant par un $f'(b)\neq 0$ l'éq

$$f''-\left[\frac{f+f''}{f'}\right](b)\,f'+f=0.$$

S'il y un b tq $\left[\frac{f+f''}{f'}\right](b)\neq\pm 2$, alors poly car scindé simple et $f=Ae^{\lambda t}+Be^{\frac{t}{\lambda}}=\frac{e^{\lambda t}-\lambda^2 e^{\frac{t}{\lambda}}}{1-\lambda^2}$.

Si $f+f''=2f'$, alors $f=e^t(A+Bt)=(1-t)\,e^t$. De meme, si $f+f''=-2f'$, alors $=e^{-t}(A+Bt)=(1+t)\,e^{-t}$

une équation du type $f''=\lambda f-f$. Ainsi, en posant $f=e^{r\cdot}g$ où r à ajuster, on trouve

$$\begin{aligned}0&=f''-\lambda f'+f=e^{r\cdot}\left(\left(g''+2rg'+r^2g\right)-\lambda\left(g'+rg\right)+g\right)\\&=e^{r\cdot}\left(g''+(2r-\lambda)\,g'+\left(r^2-\lambda r+1\right)g\right)\end{aligned}$$

Prendre $r=\frac{\lambda}{2}$ donne $g''=?g$, donc g est ou bien un $Ae^{\lambda\cdot}+Be^{\mu\cdot}$ (alors bornée en ∞ $=>r<-\max\{\lambda,\mu\}$, et bornée en $-\infty$ implique $r>-\min\{\lambda,\mu\}$, impossible) ou bien un cos mais alors bornée implique $r=0$, d'où $f=C\cos(\omega\cdot+\varphi)$. Mais les condition intniiaes impliques $(f'0=0)$ $0=C\sin\omega$ d'où $\omega=0\mathrm{mod}2\pi$, $(f0=0)$ $C=1$ et $\omega^2=1$, d'où $f=\cos$.

version hyperboliques ? ? ? remplacer $f\leftarrow f(i\cdot)$

4.5 pur équa diff

EXO : f 2der tq $f''+cf=0$ *(où* $c\in\mathbf{C}$*)*

cos sin ? ? ?

$c=0$ $<=>$ f affine. Sinon poly car X^2+c scindé simple $(c=:\rho^2)$ et $f=Ae^{\rho t}+Be^{-\rho t}=A'\,\mathrm{ch}\,\rho t+B'\,\mathrm{sh}\,\rho t=C\,\mathrm{ch}\,(\rho t+\tau)$.

EXO der croisées : (f,g) der tq $\binom{f'}{g'}=\binom{\pm g}{f}$

$e:=f\pm ig$ vérifie $e'=ie$, d'où $e=0$ ou $e=e^{\lambda\cdot}$

EXO *trouver les* f *deux fois dérivable (autrse solutions si juste dérivable ?) tq*

$$f^2+f'^2=cste.$$

DEM On se place sur l'ouvert $\Omega := \{f' \neq 0\}$, mettons sur un intervalle maximal $]a,b[$. Alors dériver et simplifier donne $f'' + f = 0$, d'où $f = C\cos(\cdot - \varphi)$. Par continuité de f', on a $0 = f'(a) = -C\sin(a-\varphi)$, d'où $a = b$ modulo π.

Suppsons inf fini. Alors le fermé $f' = 0$ n'est pas dense dans $]a-\varepsilon, a[$ (sinon f', quii y est nulle, se prolinge par continuité, donc f cste à gauche de a, pb avec D^2), donc il y a un intervalle infini dans $]a-\varepsilon, a[\, \cap\, \Omega$, impossible pour $\varepsilon < \pi$.

Ainsi $\Omega = \mathbf{R}$ et $f = C\cos(\cdot - \varphi)$.

Si juste D^1, on prend sur un intervalle un $C\cos(\cdot - \varphi)$ entre deux valeurs extrèmes ± 1 , on en prend d'autres, puis on relie les valeurs etrmès par des dorites horizontales $f = \pm 1$ (la liaison est C^1 mais pas D^2).

EXOtrouver les f dérivable tq $f' = f^2 + 1$

DEM Posons $g := \operatorname{atn} \circ f$. Alors g der et $g' = \frac{f'}{1+f^2} = 1$, donc $g = \operatorname{Id} + Cst$ et $f = \tan g = \tan(\cdot + C)$.

EXO *trouver les f dérivable tq* $\frac{f''}{2} = f^3 + f$ *et* $(f, f')(0) = (0,1)$

DEM $\frac{1}{2} f' f'' = f^3 f' + f f'$

$\frac{1}{4}\left(f'^2 - 1\right) = \frac{f^4}{4} + \frac{f^2}{2}$

$f'^2 = f^4 + 2f^2 + 1 = \left(f^2+1\right)^2$

Soit I intervalle maximal. Par CL, I est ouvert. Alosrs$\frac{f'}{1+f^2} = \pm 1$; or cotinue, vaut 1 en 0, donc $\equiv 1$. Ainsi $f' = 1 + f^2$, d'où (cf avant) $f = \tan(\cdot - C)$. et CI impose $C = 0$.

EXO trouver les f dérivable tq $\frac{f''}{2} = f^3 - f$ *et* $(f, f')(0) = (0,1)$

DEM cf ci-dessus :$f'^2 = \left(f^2-1\right)^2$. Soit I intervalle maximal où $|f| < 1$. Par CL, I est ouvert, et l'uc de f montre que $I = \mathbf{R}$ (f' bnée donc f lip donc f uc donc f prlog par continuité aux bornes). Alosrs$\frac{f'}{1-f^2} = \pm 1 \equiv 1$, d'où $[\operatorname{ath} f]' = 1$ et $g = \operatorname{Id} + C$, d'où $f = \operatorname{th}(\cdot - C)$; puis CI impose $C = 0$.