Quelques équations fonctionnelles

Marc SAGE

7 décembre 2017

Table des matières

1 Les morphismes additifs

1. *Montrer qu'une application* $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$ *additive*[1] *est une homothétie sur les rationnels. Même question en remplaçant* $\mathbf{R}^+$ *par* $\mathbf{R}$.
2. *Que dire d'une application* $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$ *additive continue*[2] *?*
3. *Que dire d'une application* $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$ *additive croissante*[3] *?*
4. *En déduire que le seul endomorphisme*[4] *du corps* $\mathbf{R}$ *est l'identité.*

Solution proposée.

1. Soit un tel f. On a alors $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$ et $0 = f(a-a) = f(a) + f(-a)$, d'où

   l'imparité de f.

   Maintenant, on a pour chaque $n \in \mathbf{N}$ les égalités

$$f(n) = f\left(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}}\right) \underset{\text{immédiate}}{\overset{\text{récurrence}}{=}} \underbrace{f(1) + \cdots + f(1)}_{n \text{ fois}} = nf(1),$$

   d'où (par imparité)

$$\forall q \in \mathbf{Z},\ f(q) = f(1)\,q.$$

   On écrit ensuite (à $q \in \mathbf{N}^*$ fixé)

$$f(1) = f\left(\underbrace{\frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q}}_{q \text{ fois}}\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right),$$

   d'où (par imparité)

$$\forall q \in \mathbf{Z}^*,\ f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{f(1)}{q}.$$

   On a finalement pour chaque $(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{Z}^*$ les égalités

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(p\frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = p\frac{f(1)}{q} = f(1)\frac{p}{q},$$

   d'où la conclusion.

$$f_{|\mathbf{Q}} = f(1)\operatorname*{Id}_{\mathbf{Q}}.$$

2. Soit f une telle application. Par continuité, l'identité $f_{|\mathbf{Q}} = f(1)\,\mathrm{Id}_{\mathbf{Q}}$ se prolonge à l'adhérence de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$; or, $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$, donc cette adhérence vaut tout $\mathbf{R}$, donc f est une homothétie.
3. Soit $a \in \mathbf{R}$. On peut approcher a par des rationnels par en-dessous et par au-dessus, mettons $r \leq a \leq s$ avec $r, s \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$. Par croissance, on en déduit à $n \in \mathbf{N}$ fixé l'encadrement $f(r_n) \leq f(a) \leq f(s_n)$, *i. e.* $\lambda r_n \leq f(a) \leq \lambda s_n$ avec $\lambda := f(1)$, d'où (en faisant tendre n vers l'infini) $f(a) = \lambda a$. Ainsi f est-elle encore une homothétie.

[1] *i. e.* telle que $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pour chaques a, b donnant un sens à ce qui précède

[2] Il s'agit des endomorphismes de $\mathbf{R}$ vu en tant que groupe topologique. Un *groupe topologique* est un groupe muni d'une topologie pour laquelle le produit et l'inverse sont continus. Un *endomorphisme* d'un groupe topologique G est un endomorphisme du groupe G qui est continu.

[3] Il s'agit des endomorphismes de $\mathbf{R}$ vu en tant que groupe ordonné, les morphismes préservant l'ordre étant les applications croissantes.

[4] En fait, un morphisme de corps $K \longrightarrow L$ est nécessairement injectif puisque son noyau est un idéal du corps K, donc ou bien K (mais alors le morphisme est nul et ne peut envoyer 1 sur 1), ou bien $\{0\}$ (ce que l'on veut).

4. Soit f un endomorphisme du corps $\mathbf{R}$. Il est additif, donc est une homothétie sur $\mathbf{Q}$ de rapport $f(1) = 1$, autrement dit $f_{|\mathbf{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{Q}}$. Pour conclure, il suffit de montrer que f est croissante. Or, l'ordre sur $\mathbf{R}$ peut se décrire entièrement à l'aide des opérations $+$ et $\times$ que f conserve : à a, b réels donnés, on a en effet les équivalences

$$a \leq b \iff (\exists p \geq 0,\ b = a + p) \iff \left(\exists r,\ b = a + r^2\right).$$

Pour de tels $a \leq b$ et r on aura alors

$$f(b) = f\left(a + r^2\right) = f(a) + f\left(r^2\right) = f(a) + f(r)^2 \geq f(a)\,,\ \textit{CQFD.}$$

Remarque. Sans hypothèse supplémentaire, on peut pas dire grand chose de plus. En considérant dans le $\mathbf{Q}$-ev $\mathbf{R}$ la projection π sur $\mathbf{Q}$ parallèlement à un supplémentaire de $\mathbf{Q}$, on voit que π est additif, linéaire sur $\mathbf{Q}$ (il y vaut l'identité) mais non linéaire. Il faut toutefois l'axiome du choix pour considérer un supplémentaire[5].

2 Une équation fonctionnelle $f(a) + f\left(b^2\right) = \lambda f\left(a + b^2\right)$

Soit λ un réel. Trouver les $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ f(a) + f(b)^2 = \lambda f\left(a + b^2\right).$$

Solution proposée.
Si $\lambda \neq 1$, remplacer $b \leftarrow 0$ donne successivement

$$f(a) + f(0)^2 = \lambda f(a) \implies f(0)^2 = (\lambda - 1) f(a) \implies f \equiv \frac{f(0)^2}{\lambda - 1},$$

d'où la constance de f. Évaluer en 0 livre alors les égalités $f = \frac{f^2}{\lambda - 1}$, d'où $f \equiv 0$ ou $f \equiv \lambda - 1$. Réciproquement, l'application constante $\lambda - 1$ est bien solution vu (à $a, b \in \mathbf{R}$ fixés) les égalités

$$f(a) + f(b)^2 = (\lambda - 1) + (\lambda - 1)^2 = \lambda - 1 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) = \lambda f\left(a + b^2\right).$$

On peut donc imposer désormais $\lambda = 1$ et notre hypothèse se réécrit alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ f\left(a + b^2\right) = f(a) + f(b)^2.$$

Remplacer $a, b \leftarrow 0$ donne alors $f(0) = f\left(0 + 0^2\right) = f(0) + f(0)^2$, d'où $f(0) = 0$ et remplacer $a \leftarrow 0$ donne

$$f\left(b^2\right) = f(b)^2.$$

Remplacer $a \leftarrow -b^2$ donne $0 = f(0) = f\left(-b^2\right) + f\left(b^2\right)$, d'où $f\left(-b^2\right) = -f\left(b^2\right)$, çed $\forall p \geq 0,\ f(-p) = -f(p)$, d'où l'imparité de f. Remplaçons alors $b \leftarrow \sqrt{p}$ (à $p \geq 0$ fixé) pour obtenir $f(a + p) = f(a) + f(p)$, puis remplacer $a \leftarrow c - p$ donne $f(c) = f(c - p) + f(p)$ d'où $f(c + (-p)) = f(c) - f(p) = f(c) + f(-p)$, les deux égalité montrant l'additivité de f.

Par ailleurs, l'application f croît vu les implications

$$a \leq b \implies \left(\exists r,\ b = a + r^2\right) \implies \left(\exists r,\ f(b) = f(a) + f(r)^2\right) \implies f(b) \geq f(a).$$

On en déduit (par un exercice précédant) que f est une homothétie. Puisque f préserve les carrés, l'image de 1 est idempotente ; en d'autres termes, le rapport de f vaut 0 ou 1, d'où $f = 0$ ou $f = \mathrm{Id}$, lesquelles sont bien solutions (quand $\lambda = 1$).

Finalement, les seules solutions sont l'application nulle, l'application constante $\lambda - 1$ et (si $\lambda = 1$) l'identité.

[5] Il est même *nécessaire* d'invoquer AC quelque part pour aboutir à ce résultat. On peut en effet montrer avec des méthodes de forcing (donc complètement hors de notre portée) que l'assertion « chaque forme $\mathbf{Q}$-linéaire est une homothétie » est consistante avec les autres axiomes de ZF.

3 Morphismes additifs et "inversifs"

1. *Trouver toutes les applications* $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *telles que*

$$\begin{cases} \forall a, b \in \mathbf{R},\ f(a+b) = f(a) + f(b) \\ \forall a \in \mathbf{R}^*,\ f(a) f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}.$$

2. *Que dire si l'on remplace* $\mathbf{R}$ *par un corps quelconque de caractéristique* $\neq 2$ *?*

Solution proposée.

1. L'idée est de combiner les conditions additives et inversives : pour chaques réels a et b non nuls, on a

$$f\left(\frac{a+b}{ab}\right) = f\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(b)} = \frac{f(a+b)}{f(a) f(b)},$$

puis en imposant $b = 1 - a$ (avec a autre que 1 et 0), on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{a(1-a)}\right) &= \frac{1}{f(a) f(1-a)} \\ \Longrightarrow \frac{1}{f(a-a^2)} &= \frac{1}{f(a) - f(a)^2} \\ \Longrightarrow f(a) - f(a)^2 &= f(a) - f\left(a^2\right) \\ \Longrightarrow f\left(a^2\right) &= f(a)^2, \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $a = 0$ ou 1, d'où la croissance de f. Puisque f est additive, il résulte (*cf.* exercice 1) que f est linéaire, et l'hypothèse $f(1) = 1$ impose $f = \mathrm{Id}$, qui est bien solution au problème.

2. Les mêmes raisonnements mènent à f additive et préservant les carrés. Ainsi, on aura pour tous scalaires a et b

$$\begin{aligned} \text{d'une part } f\left((a+b)^2\right) &= f\left(a^2 + 2ab + b^2\right) = f\left(a^2\right) + 2f(ab) + f\left(b^2\right), \\ \text{d'autre part } f(a+b)^2 &= (f(a) + f(b))^2 = f(a)^2 + 2f(a) f(b) + f(b)^2, \end{aligned}$$

d'où l'égalité $f(ab) = f(a) f(b)$. Ainsi, f est un endorphisme de notre corps. Réciproquement, un endomorphisme de corps est clairement additif et unitaire, ainsi qu'inversif.

Remarque. Dans la première question, nous avons montré en substance que l'opération « élever au carré » est engendrée par l'addition et l'inversion : si l'on empile les calculs effectués, on tombe sur l'identité

$$a^2 = \frac{1}{\frac{1}{a}} - \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{1-a}}.$$

Plus généralement, on montre par récurence qu'élever à une puissance quelconque est engendré *via* l'égalité

$$a^{n+1} = a^n - \frac{1}{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \cdots + \frac{1}{a^{n-1}}}$$

Ainsi, en caractéristique autre que 2 ou 3, le produit est engendré (par l'addition et l'inversion) d'après les égalités[6]

$$ab = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2} \text{ ou } ab = \frac{(a+b)^3 - a^3 - b^3}{3(a+b)}.$$

La restriction sur la caractéristique de la question 2 est par conséquent inutile.

[6] Si $a + b = 0$, alors $a + (b+1) \neq 0$, donc $f(a(b+1)) = f(a) f(b+1)$ et on simplifie par $f(a)$ pour retomber sur $f(a) f(b) = f(ab)$.

4 Morphismes homographiques pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Décrire toutes les applications injectives $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ *telles que*

$$\forall a \neq b \in \mathbf{R},\ f\left(\frac{a+b}{a-b}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{f(a)-f(b)}.$$

Solution proposée. Notons $A := f(0)$ et $B := f(1)$.

Remplacer $b \leftarrow 0$ donne $B = \frac{f(a)+A}{f(a)-A}$, d'où $f(a)(B-1) = A(B+1)$. Par injectivité, f n'est pas constante, donc $B = 1$ puis $A = 0$.

Remplacer $a \leftarrow 0$ donne alors $f(-1) = -1$. Puis remplacer[7] $b \leftarrow \lambda a$ avec $a \neq 0$ et $\lambda \neq 1$ donne

$$\begin{aligned} \frac{1+f(\lambda)}{1-f(\lambda)} &= f\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) = f\left(\frac{a+\lambda a}{a-\lambda a}\right) = \frac{f(a)+f(\lambda a)}{f(a)-f(\lambda a)}, \\ \text{d'où } f(\lambda a) &= f(\lambda) f(a), \text{ valable aussi pour } \lambda = 1 \text{ ou } a = 0. \end{aligned}$$

On en déduit l'imparité de f (car le carré de $f(-1)$ vaut 1 et f est injective) ainsi que son caractère inversif, de sorte que l'hypothèse se réécrit (en mettant le cas trivial $b = 0$ à part)

$$\forall r \neq 1,\ f\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{1+f(r)}{1-f(r)}.$$

Il est alors aisément de montrer par récurrence $f(n) = n$ pour chaque naturel n, mais il faut initier la récurrence à $n = 2$ (pas possible de faire $r = 1$), ce qui n'est pas encore établi. Observer que, si l'on montre $C := f(2) = 2$, alors f vaut l'identité sur $\mathbf{N}$, donc sur $\mathbf{Z}$ par imparité, donc sur $\mathbf{Q}$ par inversivité, donc sur $\mathbf{R}$ par croissance (qui découle de la multiplicativité), ce qui conclut.

Il nous reste donc à montrer $C = 2$. On va écrire des entiers sous la forme $\frac{1+r}{1-r}$ en se limitant à des r entiers très petits ou produits d'entiers très petits (ce que respecte bien f). On a ainsi

$$3 = \frac{2+1}{2-1} \text{ et } 5 = \frac{10}{2} = \frac{3^2+1}{3^2-1}2^2,$$

d'où en mélangeant

$$\frac{5}{3} = \frac{\left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 - 1} 2^2 \times \frac{2-1}{2+1} \text{ qui se décompose indépendamment en } \frac{5}{3} = \frac{2^2+1}{2^2-1}.$$

Appliquer f à tout cela donne une équation en C :

$$\begin{aligned} \frac{C^2+1}{C^2-1} &= \frac{\left(\frac{C+1}{C-1}\right)^2 + 1}{\left(\frac{C+1}{C-1}\right)^2 - 1} C^2 \times \frac{C-1}{C+1} \\ \frac{C^2+1}{(C-1)(C+1)} &= \frac{(C+1)^2 + (C-1)^2}{(C+1)^2 - (C-1)^2} C^2 \times \frac{C-1}{C+1} \\ \frac{C^2+1}{C-1} &= \frac{2C^2+2}{4C} C^2 (C-1) \\ 2 &= C(C-1)^2 \\ C^3 - 2C^2 + C - 2 &= 0 \\ \left(C^2+1\right)(C-2) &= 0 \\ C &= 2,\ \textit{CQFD}. \end{aligned}$$

[7] Il faut toujours essayer ce changement de variables homogène.

5 Une équation fonctionnelle avec limite

Trouver les applications $f : \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}_+^*$ de limite nulle à l'infini telles que

$$\forall a, b > 0,\ f\left(af\left(b\right)\right) = bf\left(a\right)$$

Solution proposée.

Deux remarques préliminaires. Pour chaque $t > 0$, le réel $tf\left(t\right)$ est fixe (remplacer $a, b \leftarrow t$). Par ailleurs, si t est fixe, alors son inverse $\frac{1}{t}$ est aussi fixe vu (remplacer $a \leftarrow \frac{1}{t}$ et $b \leftarrow t$) les égalités $f\left(1\right) = f\left(\frac{t}{t}\right) = f\left(\frac{1}{t}f\left(t\right)\right) = tf\left(\frac{1}{t}\right)$.

Soit maintenant $t > 0$ fixe. Remplacer $a \leftarrow t$ et $b \leftarrow t^n$ donne alors $f\left(\ tf\left(t^n\right)\ \right) = t^{n+1}$, d'où par récurrence $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ f\left(t^n\right) = t^n$. Si $t \leq 1$, son inverse est fixe (remarque 2), ce qui permet d'imposer $t \geq 1$; si la comparaison est stricte, on obtient la tendance $f \xrightarrow{\infty} \infty$, contraire à l'hypothèse $f \xrightarrow{\infty} 0$, d'où $t = 1$. On en déduit pour chaque réel a (remarque 1) l'égalité $af\left(a\right) = 1$, d'où $f = \frac{1}{\mathrm{Id}}$, laquelle est bien solution.

6 Un exercice d'IMO 2017

Déterminer les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ f\left(a + b\right) + f\left(f\left(a\right)f\left(b\right)\right) = f\left(ab\right).$$

Solution proposée.

Deux remarques préliminaires : 1) l'application nulle est solution 2) si f est solution alors $-f$ aussi.

Soit un tel f, par lequel on note les images avec des primes, l'égalité ci-dessus se réécrivant alors

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ f\left(a + b\right) = f\left(ab\right) - f\left(a'b'\right).$$

Si $0' = 0$, remplacer $b \leftarrow 0$ donne alors $a' = 0' - f\left(0\right) = 0$ et $f = 0$, qui convient. On peut donc imposer (*cf.* rq 1)

$$0' \neq 0.$$

S'il y un $a \neq 1$ tel que $a' = 0$, remplacer $b \leftarrow \frac{a}{a-1}$ donne $ab = a + b$ et $f\left(0\right) = f\left(a'b'\right) = f\left(ab\right) - f\left(a + b\right) = 0$, absurde. On a donc les implications

$$\forall a \in \mathbf{R},\ a' = 0 \Longrightarrow a = 1.$$

Remplacer $a, b \leftarrow 0$ donne $ab = a + b$ d'où $f\left(a'b'\right) = 0$ et $a'b' = 1$, çed $0'^2 = 1$, d'où $1' = 0$ et $0' = \pm 1$. On peut alors imposer (*cf.* rq 2)

$$0' = -1 \text{ et } 1' = 0.$$

Remplacer $b \leftarrow 1$ donne $f\left(a + 1\right) = a' - f\left(0\right) = a' + 1$, d'où (remplacer $a \leftarrow c - 1$) $f\left(c - 1\right) = c' - 1$. On a alors[8] les égalités

$$F := 1 + f = f\left(1 + \mathrm{Id}\right) \text{ et nous allons montrer } F := \mathrm{Id}.$$

Les images par F seront notées avec des astérisques, de sorte que les résultats précédents se réécrivent

$$0^* = 0 \qquad 1^* = 1 \qquad a^* = 1 \Longrightarrow a = 1 \qquad F\left(a \pm 1\right) = a^* \pm 1 \qquad \text{d'où } \left(-1\right)^* = -1.$$

L'équation originelle avec remplacement $\begin{array}{c} a \leftarrow \alpha + 1 \\ b \leftarrow \beta + 1 \end{array}$ se réécrit alors $f\left(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1\right) = f\left(\alpha + \beta + 1\right) + 1 + f\left(\ f\left(\alpha + 1\right)\ f\left(\beta + 1\right)\ \right)$, çed[9]

$$F\left(\alpha\beta + \alpha + \beta\right) = F\left(\alpha + \beta\right) + F\left(\alpha^*\beta^*\right).$$

[8] *Heuristique* : remplacer $b \leftarrow 0$ donne $a' = -1 - f\left(-a'\right)$, d'où $f = \mathrm{Id} - 1$ sur $-\operatorname{Im} f$, motivant le souhait d'établir $F = \mathrm{Id}$.

[9] Bien que la présence de $\alpha + \beta$ à gauche est plus compliquée que l'équation initiale sur f, tout ce qui suit d'exprimera plus simplement avec F (censée valoir Id, valeur plus simple que celle $1 - \mathrm{Id}$ attendue pour f).

Imposer $\alpha\beta = 1$ donne $1 + F(\alpha+\beta) = F(\alpha+\beta) + F(\alpha^*\beta^*)$, d'où $F(\alpha^*\beta^*) = 0$, çed $\alpha^*\beta^* = 1$. On en déduit les égalités[10]

$$\forall \alpha \neq 0,\ F\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha^*}.$$

L'idée est alors de montrer l'additivité de F, ce qui conclura d'après l'exercice 3. Pour cela, nous allons montrer que F préserve les doubles puis confronter cette forme d'homogénéité à la non-homogénéité de l'équation de F.

Pour chaque réel $\gamma \notin \{0,1\}$, remplacer[11] $\alpha \leftarrow \frac{\gamma}{1-\gamma}$ donne $F\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) = \frac{1}{F\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} = \frac{1}{F\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} = \frac{1}{F\left(\frac{1}{\gamma}\right)-1} = \frac{1}{\frac{1}{\gamma^*}-1} = \frac{\gamma^*}{1-\gamma^*} = \frac{1}{1-\gamma^*} - 1$, le membre de gauche se réécrivant par ailleurs $F\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right) = F\left(\frac{1}{1-\gamma} - 1\right) = \frac{1}{1+F(-\gamma)} - 1$, d'où l'égalité $F(-\gamma) = -\gamma^*$, valide même si $\gamma \in \{0,1\}$.

Remplacer $\beta \leftarrow -1$ livre $F(-\alpha+\alpha-1)) = F(\alpha-1) + F\left((-1)^*\alpha^*\right)$, çed $-1 = \alpha^* - 1 + F(-\alpha^*)$, d'où[12] $\alpha^{**} = \alpha^*$.

Remplacer $\beta \leftarrow 1$ donne $F(2\alpha+1)) = F(\alpha+1) + F(1^*\alpha^*)$, çed $F(2\alpha)+1 = \alpha^*+1+\alpha^{**}$, d'où $(2\alpha)^* = 2\alpha^*$.

Remplacer enfin $\begin{cases} \alpha \leftarrow 2a \\ \beta \leftarrow 2b \end{cases}$ donne $F(4ab+2a+2b) = F(2a+2b) + F(4a^*b^*)$ et diviser par 4 en notant $\begin{cases} p := ab \\ \sigma := \frac{a+b}{2} \end{cases}$ livre

$$F(p+\sigma) - F(\sigma) = F(a^*b^*) = F(ab+a+b) - F(2\sigma) = F(p+2\sigma) - 2F(\sigma),$$

égalités tenant pour chaques réels p, σ vérifiant[13] $\sigma^2 \geq p$. Or, étant donnés deux réels p et σ (sans condition), on aura la comparaison $(\sigma+N)^2 > p$ pour N assez grand, donc (après simplification[14] par N) l'égalité ci-dessus est valide *sans condition* sur p et σ et se réécrit $F(p+\sigma) + F(\sigma) = F((p+\sigma)+\sigma)$. En particulier, remplacer $\begin{cases} \sigma \leftarrow v \\ p \leftarrow u-v \end{cases}$ livre $F(u) + F(v) = F(u+v)$, *CQFD.*

Conclusion : les trois applications recherchées sont 0, $\mathrm{Id}-1$ et $1-\mathrm{Id}$.

Remarque. Une autre piste[15] (une fois imposées les égalités $0' = -1$ et $1' = 0$) serait de partir de l'égalité $a'' = 1 - a'$ (obtenue en remplaçant $b \leftarrow 1$), d'en déduire celles

$$(1-a')' = (a'')' = a''' = (a')'' = 1 - (a')' = 1 - a'' = a'$$

et de conclure $a' = 1 - a$ en montrant l'*injectivité* de f. On a déjà l'injectivité "en 0" vu les implications

$$a' = -1 \Longrightarrow f(a+1) = 0 \Longrightarrow a+1 = 1 \Longrightarrow a = 1.$$

Soient ensuite $s, p \in \mathbf{R}$ tels que $s' = p'$ et soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $\begin{cases} a+b = s \\ ab = p-1 \end{cases}$. Une telle invocation est permise si $s^2 \geq 4p$, comparaison valide en incrémentant suffisament s et p à la fois (cela ne change pas l'hypothèse $s' = p'$ puisque f respecte l'incrémentation). On a alors les égalités

$$f(a'b') = f(ab) - f(a+b) = f(p-1) - f(s) = p' - 1 - s' = -1,$$

d'où[16] $a'b' = 0$, mettons (par symétrie) $a' = 0$, d'où $a = 1$ et $s = a + b = 1 + b = ab + 1 = p$, *CQFD.*

7 Un exercice d'IMO 2015

Déterminer les applications $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telles que

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\quad \begin{array}{l} f(a+f(a+b)) + f(ab) \\ = a + f(a+b) + f(a)\,b \end{array}.$$

[10] L'inversivité de F permettrait de montrer qu'elle fixe chaque rationnel par récurrence sur le dénominateur réduit (un peu comme l'on appliquerait la loi de réciprocité quadratique), renforçant ainsi notre confiance en l'égalité $F = \mathrm{Id}$ désirée.

[11] L'idée est de mélanger l'inversion, l'incrémentation, la décrémentation et l'opposition, tout en sachant que F en préserve au moins trois sur les quatre.

[12] remplacer $\gamma \leftarrow \alpha^*$

[13] remplacer en effet $a, b \leftarrow \sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - p}$

[14] Une récurrence immédiate montrerait à a réel fixé les égalités $\forall z \in \mathbf{Z},\ g(a+z) = a^* + z^*$.

[15] inspirée de https ://www.quora.com/How-do-you-solve-P2-from-the-2017-International-Math-Olympiad

[16] C'est ici que l'on comprend le décalage $p-\mathbf{1}$ imposé dans l'invocation de a et b.

Solution proposée.

L'identité étant clairement solution, notons $\delta := f - \mathrm{Id}$ et appelons Z son lieu d'annulation. On notera les images par δ avec des barres coiffantes, l'équation se réécrivant alors

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ \delta\left(2a + b + \overline{a+b}\right) = \overline{a}b - \overline{ab}.$$

Remplacer $b \leftarrow 1$ donne $\delta\left(2a + 1 + \overline{a+1}\right) = 0$, çed (remplacer $a \leftarrow c - 1$) $2c - 1 + \overline{c} \in Z$.

Remplacer $a \leftarrow 0$ donne $\delta\left(b + \overline{b}\right) = (b-1)\,\overline{0}$. Si Z est inclus dans $\{1\}$, alors $\overline{c} = 2 - 2c$ et $f = 2 - \mathrm{Id}$, laquelle est bien solution vu les égalités

$$2 - (a + (2 - a - b)) + 2 - ab = b - ab = a + (2 - (a + b)) + (2 - a)\, b.$$

Soit sinon $z \neq 1$ dans Z : on a $(z-1)\,\overline{0} = \delta\left(z + \overline{z}\right) = \delta\left(z + 0\right) = \overline{z} = 0$, d'où[17]

$$\overline{0} = 0, \quad b + \overline{b} \in Z \quad \text{et} \quad -1 \in Z.$$

Échanger a et b, noter $s := a + b$ puis soustraire donne $\delta\left(s + a + \overline{s}\right) - \delta\left(2s - a + \overline{s}\right) = (s - a)\,\overline{a} - a\overline{s-a}$. Remplacer[18] $s \leftarrow 0$ donne $\overline{a} - \overline{-a} = -a\overline{a} - \overline{-a}$, çed $(1+a)\,\overline{a} = (1-a)\,\overline{-a}$. Remplacer $a \leftarrow 1$ donne

$$\overline{1} = 0$$

et les égalités $\forall a \neq 1,\ \overline{-a} = \frac{1+a}{1-a}\overline{a}$ montrent (avec l'appartenance $-1 \in Z$)

la stabilité de Z par opposition.

Remplacer $a \leftarrow 1$ donne $\delta\left(2 + b + \overline{1+b}\right) = \overline{1}b - \overline{b} = -\overline{b}$, çed (remplacer $b \leftarrow c - 1$)

$$\delta\left(c + 1 + \overline{c}\right) = -\overline{c-1}.$$

Nous allons montrer que Z est stable par incrémentation, ce qui (avec l'égalité précédente et sachant $c + \overline{c} \in Z$) livrera l'appartenance $c - 1 \in Z$ et la nullité de δ. Il suffit pour cela d'établir la stabilité de Z par décrémentation[19].

Soit donc $z \in Z \setminus \{1, 2\}$ et notons d le décrémenté $z - 1$ (les décrémentés 0 et 1 sont déjà dans Z). Remplacer $\left\{\begin{array}{c} a \leftarrow -1 \\ b \leftarrow z + 1 \end{array}\right.$ donne $\delta\left(d + \overline{z}\right) = -\overline{-z-1} \underset{c \leftarrow -z}{\overset{\text{remplacer}}{=}} \delta\left(-z + 1 + \overline{-z}\right)$, d'où (vu que $z, -z \in Z$) l'égalité $\overline{d} = \overline{-d}$. Or l'imposition $d \neq 1$ permet[20] d'écrire $\overline{-d} = \frac{1+d}{1-d}\overline{d}$ et l'imposition $d \neq 0$ de conclure $\overline{d} = 0$.

Les applications recherchées sont finalement Id et $2 - \mathrm{Id}$.

[17] Remplacer $c \leftarrow 0$ montre que Z contient $2 \cdot 0 - 1 + \overline{0}$.

[18] À a fixé, ce s peut être imposé *à volonté* en remplaçant $b \leftarrow s - a$.

[19] Incrémenter revient en effet à opposer, décrémenter puis opposer.

[20] On a vu plus haut comment δ agissait sur l'opposition.