Continuité

Marc SAGE

19 décembre 2005

Table des matières

1 Une application uniformément continue est affinement bornée

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'on peut trouver deux réels α et β tels que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left|f\left(x\right)\right|\leq\alpha\left|x\right|+\beta.$$

Solution proposée.

Par définition de l'uniforme continuité, il existe un $\delta>0$ tel que $|x-y|\leq\delta\implies\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq1$.

Traçons le graphe de f entre les abscisses 0 et $a\geq0$. Pour aller de 0 à a, on fait environ $\frac{a}{\delta}$ pas de longueur δ sur chacun desquels le dénivelé est uniformément majoré par 1 d'où un dénivelé total d'au plus $\simeq\frac{a}{\delta}$. En rajoutant l'ordonnée à l'origine, on a le résultat. Pour $a\leq0$, on applique ce qui précède à $\widetilde{f}\left(x\right)=f\left(-x\right)$.

Plus formellement, pour un réel a positif, on découpe $[0,a]$ en k tranches de largeur δ plus un chouïa, disons

$$k\delta\leq a<\left(k+1\right)\delta$$

où $k=\left\lfloor\frac{a}{\delta}\right\rfloor$. On a alors

$$\begin{aligned}&\left|f\left(a\right)-f\left(0\right)\right|\\\leq\ &\left|f\left(a\right)-f\left(k\delta\right)\right|+\left|f\left(k\delta\right)-f\left(\left(k-1\right)\delta\right)\right|+...+\left|f\left(\delta\right)-f\left(0\right)\right|\\\leq\ &1+1+...+1=k+1=\left\lfloor\frac{a}{\delta}\right\rfloor+1\leq\frac{a}{\delta}+1,\end{aligned}$$

d'où $\left|f\left(a\right)\right|\leq\frac{a}{\delta}+1+f\left(0\right)$.

2 Croissance et de continuité

Soit $f:[1,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ décroissante telle que $\frac{f}{\mathrm{Id}}$ croît. Montrer que f est continue.

Solution proposée.

On se donne par l'absurde un $a\geq1$ et un $\varepsilon_0>0$ tels que

$$\forall\delta>0,\ \exists x\geq1,\ \left\{\begin{array}{c}|x-a|<\delta\\\left|f\left(x\right)-f\left(a\right)\right|>\varepsilon_0\end{array}\right..$$

Fixons un $\delta>0$ auquel on associe un x correspondant. On distingue deux cas selon la position de x par rapport à a.

Si $x<a$, on a

$$\varepsilon_0<f\left(x\right)-f\left(a\right)=x\frac{f\left(x\right)}{x}-f\left(a\right)\leq x\frac{f\left(a\right)}{a}-f\left(a\right)=f\left(a\right)\left(\frac{x}{a}-1\right)=f\left(a\right)\frac{|x-a|}{a}\leq\frac{f\left(a\right)}{a}\delta,$$

et pour $x>a$ on a également

$$\varepsilon_0<f\left(a\right)-f\left(x\right)=f\left(a\right)-x\frac{f\left(x\right)}{x}\leq f\left(a\right)-x\frac{f\left(a\right)}{a}=f\left(a\right)\left(1-\frac{x}{a}\right)=f\left(a\right)\frac{|x-a|}{a}\leq\frac{f\left(a\right)}{a}\delta,$$

ce qui est *absurde* pour δ assez petit.

3 Sur des cordes rationnelles

Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que $f\left(0\right)=f\left(1\right)$. Montrer qu'il y a pour tout entier $n\geq1$ au moins une solution à l'équation

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right)=f\left(x\right).$$

Solution proposée.

Si $n=1$, $x=0$ convient : $f\left(0+\frac{1}{1}\right)=f(0)$. On prend donc $n\geq 2$.

On introduit naturellement la différence $\delta(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$ dont on cherche un zéro. La forme de δ incite au télescopage :

$$\begin{aligned}
&\delta\left(1-\frac{1}{n}\right)+\delta\left(1-\frac{2}{n}\right)+...+\delta\left(\frac{1}{n}\right)+\delta(0)\\
=\ &\underbrace{f(1)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)}+\underbrace{f\left(x-\frac{1}{n}\right)-f\left(x+\frac{2}{n}\right)}+...+\underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}\\
=\ &f(1)-f(0)=0.
\end{aligned}$$

On en déduit que deux des $\delta\left(1-\frac{k}{n}\right)$ pour $k=1,...,n$ sont de signes opposés, et le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à δ donne le zéro cherché.

Remarque. On peut interpréter géométriquement le résultat : si le graphe d'une fonction continue admet une corde horizontale de longueur l, alors il admet des cordes horizontales de longueur $\frac{l}{n}$ pour tout entier $n\geq 1$.

4 La somme de deux fonctions périodiques est-elle encore périodique ?

Soit f et g deux fonctions continues périodiques non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $a>0$ la plus petite période de f et $b>0$ celle de g.

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $f+g$ soit périodique.

Solution proposée.

Regardons les cas simples : si b est un multiple de a, il est clair que $f+g$ sera b-périodique. Plus généralement, dans le cas où $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, mettons $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$, alors $aq=bp$ est clairement une période de $f+g$.

Montrons que cette condition est en fait nécessaire. Supposons par l'absurde $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$ et $f+g$ périodique de période c minimale. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a donc

$$f(x+c)+g(x+c)=f(x)+g(x),$$

ce qui se réécrit mieux sous la forme invariante

$$f(x+c)-f(x)=g(x+c)-g(x)\ ;$$

noter $\delta(x)$ cette valeur commune. Pour k,l deux entiers relatifs, utilisant tour à tour la a-périodicité de f et la b-périodicité de g, on trouve

$$\begin{aligned}
\delta(x+ka+lb) &= f(x+ka+lb+c)-f(x+ka+lb)=f(x+lb+c)-f(x+lb)\\
&= \delta(x+lb)=g(x+lb+c)-g(x+lb)=g(x+c)-g(x)=\delta(x),
\end{aligned}$$

ce qui montre que tout réel de $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est période de δ. Or, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ car $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$, donc δ est ε-périodique $\forall\varepsilon>0$; comme de plus δ est continue, δ est nécessairement constante :

$$\delta=\delta_0.$$

Mais on a en outre $f(\mathrm{Id}+c)=f+\delta_0$, d'où pour tout réel x

$$f(x+nc)=f(x)+n\delta_0,$$

ce qui force $\delta_0=0$ car f est continue périodique donc bornée. c est ainsi une période commune à f et g, donc doit être dans $a\mathbb{N}^*\cap b\mathbb{N}^*$; mais ce dernier est vide puisque $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$, d'où la contradiction voulue.

5 Relèvement des fonctions continues du cercle unité

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue. Montrer qu'il existe $r, \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que

$$f = re^{i\theta}.$$

Solution proposée.

L'existence et la continuité de r sont triviales : poser $r = |f|$. On se ramène donc tout de suite au cas où f est à valeurs dans le cercle unité $\mathbb{S}_1$ du plan complexe en considérant $\frac{f}{|f|}$.

Toute la difficulté consiste en fait à prouver le caractère *continu* du θ cherché... Cherchons déjà à relever f (*i.e.* à trouver un bon θ) autour de 0.

Regardons le cas $f(0) = 1$. On retrouve sur un dessin la formule

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i \operatorname{atn} \frac{y}{x}}$$

valable pour $x > 0$ (le lecteur sceptique pourra développer $e^{i \operatorname{atn} \frac{y}{x}}$ pour s'en convaincre), et par continuité de f en 0 on peut trouver un $\delta_0 > 0$ tel que $|x| \leq \delta_0 \implies |f(x) - f(0)| < \frac{1}{2}$, de sorte que $\operatorname{Re} f > 0$ sur $]-\delta_0, \delta_0[$ et donc

$$f = \exp\left(i \frac{\operatorname{atn} \operatorname{Im} f}{\operatorname{atn} \operatorname{Re} f}\right)$$

avec $\frac{\operatorname{atn} \operatorname{Im} f}{\operatorname{atn} \operatorname{Re} f}$ continue sur $[-\delta_0, \delta_0]$.

Dans le cas général, $\frac{f}{f(0)}$ envoie 0 sur 1, donc peut se relever autour de 0 en $\frac{f}{f(0)} = e^{i\theta}$, et en posant $f(0) = e^{i\theta_0}$ on obtient un relèvement $\theta + \theta_0$ pour f autour de 0.

Nous savons à présent que f se relève sur un $[0, \delta_0]$. L'idée est alors de chercher à pousser δ_0 le plus loin possible tout en conservant la propriéte de relèvement sur $[0, \delta_0]$. On introduit par conséquent

$$s = \sup \left\{ \delta > 0 \ ; \ \exists \theta \text{ continu tel que } f = e^{i\theta} \text{ sur } [0, \delta] \right\} \in [\delta_0, \infty]$$

et on aura gagné si $s = \infty$ (évidemment on fait pareil pour $-\infty$...).

Supposons par l'absurde que $s \in \mathbb{R}^+$. On peut relever f autour de s comme on l'a fait en 0, mettons

$$f = e^{i\varphi} \text{ sur } [s - \varepsilon, s + \varepsilon].$$

On sait de plus qu'on peut relever f sur $[0, s - \delta]$ pour $0 < \delta < \max\left\{\frac{\varepsilon}{2}, s\right\}$, disons

$$f = e^{i\theta} \text{ sur } \left[0, s - \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

L'idée est de prolonger le relèvement θ sur $[0, s + \varepsilon[$ en y recollant φ, ce qui contredira la maximalité de s. Il faut juste faire attention aux multiples entiers de 2π qui traînent par là... Puisque $e^{i\varphi} = e^{i\theta}$ sur $\left[s - \varepsilon, s - \frac{\varepsilon}{2}\right]$, on a $\varphi = \theta + 2k\pi$ avec k fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Or, $k = \frac{\varphi - \theta}{2\pi}$ est continue, donc constante, mettons $k \equiv k_0$, d'où

$$\varphi(s - \varepsilon) = \theta(s - \varepsilon) + 2k_0\pi.$$

On prolonge alors le relèvement θ en posant

$$\overline{\theta}(x) = \begin{cases} \theta(x) \text{ si } x \leq s - \varepsilon \\ \varphi(x) - 2k_0\pi \text{ si } x \geq s - \varepsilon \end{cases}.$$

$\overline{\theta}$ est clairement continu (grâce au décalage $-2k_0\pi$), et vérifie

$$\text{sur } [0, s - \varepsilon] : e^{i\overline{\theta}} = e^{i\theta} = f,$$

$$\text{sur } [s - \varepsilon, s + \varepsilon] : e^{i\overline{\theta}} = e^{i(\varphi - 2k_0\pi)} = e^{i\varphi} = f,$$

i.e. $f = e^{i\overline{\theta}}$ sur $[0, s + \varepsilon]$; cela contredit la maximalité de s.

Remarque. La démarche est à retenir. On dispose d'une propriété locale (ici le relèvement autour d'un point) que l'on cherche à rendre globale en considérant le plus grand domaine où cette propriété s'étend et en utilisant la propriété locale à la frontière de ce domaine.

Pourquoi théorème du *relèvement*, nous demandera-t-on ? L'idée est que l'on dispose d'une projection de $\mathbb{R}$ sur le cercle $\mathbb{S}_1$, donnée par $\pi(t) = e^{it}$, projection que l'on représente habituellement verticalement : si l'on enroule la droite réelle en forme de ressort infini, appliquer π revient à applatir ce ressort sur le cercle (qui du coup se trouve tout applati en bas) :

$$\begin{array}{c} \mathbb{R} \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{S}_1 \end{array}.$$

Lorsqu'on rajoute la fonction f que l'on cherche à "relever", on obtient le schéma

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}_1 \end{array}.$$

On relève alors littéralement la flèche f vers une flèche θ qui arrive plus haut :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \theta & \downarrow \pi \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}_1 \end{array}.$$

Un relèvement est donc tout bêtement une factorisation par une application gentille (ici π).

6 Une équation fonctionnelle

Trouver tous les $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continus telles que*

$$f^2 = 2f - \mathrm{Id}.$$

Solution proposée.

Les fonctions affines sont solutions, et on va montrer que ce sont les seules.

Il est immédiat qu'un tel f est injectif, donc strictement monotone par continuité. Par ailleurs, f ne peut être décroissante, sinon $f(0) \geq f(1)$ et $f^2(0) \leq f^2(1)$, ce qui contredit

$$f^2(0) = 2f(0) - 0 \geq 2f(1) - 0 > 2f(1) - 1 = f^2(1).$$

f est donc strictement croissante. En notant $\begin{cases} \alpha = \inf_{\mathbb{R}} f \\ \beta = \sup_{\mathbb{R}} f \end{cases}$, on remarque que α et β sont tous deux infinis, sinon – mettons par exemple $\beta < \infty$ –

$$2\beta - f(\beta) = 2\lim_{\infty} f - f\left(\lim_{\infty} f\right) = \lim_{\infty} 2f - \lim_{\infty} f^2 \text{ (car } f \text{ continue en } \beta) = \lim_{\infty}\left[2f - f^2\right] = \lim_{\infty} \mathrm{Id} = \infty.$$

f est donc une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

En réécrivant la relation donnée comme $f^2 - f = f - \mathrm{Id}$, on voit à l'aide d'une récurrence hardie que

$$f^n - \mathrm{Id} = n(f - \mathrm{Id})$$

pour tout entier $n \geq 1$. Si f est affine, f doit valoir $\mathrm{Id} + f(0)$, ce qui incite à évaluer l'identité ci-dessus en x et 0 puis à faire la différence :

$$\frac{f^n - \mathrm{Id} - f^n(0)}{n} = f - \mathrm{Id} - f(0).$$

Sur $\mathbb{R}^+$, on a $f^n \geq f^n(0)$ par croissance de f, d'où

$$f - \mathrm{Id} - f(0) \geq \frac{0 - \mathrm{Id}}{n} \overset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En remarquant que f^{-1} satisfait également l'équation proposée (composer par f^{-2}), on obtient donc sur $\mathbb{R}^+$

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} & \geq & \mathrm{Id} + f^{-1}(0) \\ 2\,\mathrm{Id} - f & \geq & \mathrm{Id} + 0 - f(0) \\ \mathrm{Id} + f(0) & \geq & f, \end{array}$$

d'où f affine sur $\mathbb{R}^+$. Le même raisonnement s'applique sur $\mathbb{R}^-$.

7 Connexes par arcs et applications

On dira qu'une partie A du plan complexe est *connexe par arcs* si

$$\forall x,y\in A,\ \exists\gamma\in\mathcal{C}^0\left([0,1],A\right),\ \left\{\begin{array}{l}\gamma(0)=x\\ \gamma(1)=y\end{array}\right.$$

Cela signifie que l'on peut toujours relier deux points x et y quelconques de A par un arc γ continu qui part de x, arrive en y et reste dans A.

7.1 Premières propriétés

- *Montrer qu'un convexe est connexe par arcs.*
- *Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ continue et $A\subset\mathbb{C}$ connexe par arcs. Montrer que $f(A)$ est connexe par arcs.*
- *Montrer que les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Solution proposée.
• Soit a,b deux points d'un convexe C. Le chemin

$$\gamma:\left\{\begin{array}{ccc}[0,1] & \longrightarrow & C\\ \lambda & \longmapsto & (1-\lambda)a+\lambda b\end{array}\right.$$

vérifie tout ce qu'on veut (on a relié a et b par le segment $[ab]$), ce qui montre que C est connexe par arcs.

• On applique les définitions. Soit x et y dans $f(A)$. On peut donc écrire $\left\{\begin{array}{l}x=f(\alpha)\\ y=f(\beta)\end{array}\right.$ où α et β sont dans A. Puisque A est connexe par arcs, on dispose d'un arc continu $\gamma:[0,1]\longrightarrow A$ tel que $\left\{\begin{array}{l}\gamma(0)=\alpha\\ \gamma(1)=\beta\end{array}\right.$. L'application $f\circ\gamma$ est alors continue de $[0,1]$ dans $f(A)$ et vérifie $\left\{\begin{array}{l}f\circ\gamma(0)=x\\ f\circ\gamma(1)=y\end{array}\right.$, *CQFD.*

• Soit A un connexe par arcs de $\mathbb{R}$. Montrons que A est convexe, ce qui prouvera que A est un intervalle. Pour $x,y\in A$, on dispose d'un γ continu de $[0,1]$ dans A qui commence en x et termine en y, atteignant par le théorème des valeurs intermédiaires toutes les valeurs entre $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$, *i.e.* tous les réels de $[x,y]$, *CQFD.*

La réciproque est immédiate, vu qu'un intervalle est convexe.

7.2 Une application $f:\mathbb{S}_1\longrightarrow\mathbb{R}$ continue atteint la même valeur en deux points diamétralement opposés

On notera $\mathbb{S}_1$ le cercle unité du plan complexe.

Soit $f:\mathbb{S}_1\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\exists x\in\mathbb{S}_1,\ f(-x)=f(x).$$

Solution proposée.
On introduit la différence $\delta(x)=f(-x)-f(x)$ définie sur $\mathbb{S}_1$, afin de se ramener à l'étude de zéros d'une fonction (ici δ). $\mathbb{S}_1$ étant connexe par arcs et δ continue, $\delta(\mathbb{S}_1)$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, *i.e.* un intervalle, lequel contient les deux valeurs opposées $\delta(1)$ et $\delta(-1)=-\delta(1)$; 0 doit donc s'y trouver.

Remarque. Une théorème plus général (dû à Borsuk-Ulam) affirme qu'une application continue de la sphère $\mathbb{S}_n$ de dimension n à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ prend la même valeur en deux points diamétralement opposés. En particulier, pour $n=2$, il y a toujours sur la Terre deux points antipodaux ayant mêmes pression et température (modulo quelques approximations barbares).

7.3 Théorème de Darboux

Soit f dérivable sur $[a,b]$. Montrer que $\operatorname{Im} f'$ *est un intervalle en considérant le triangle*

$$\mathcal{T} = \left\{(x,y) \in [a,b]^2 \ ; \ x < y\right\}.$$

Solution proposée.

On aimerait bien que f' soit continue, mais cela est sans espoir (dans le cas général). En revanche, la dérivée est reliée au taux d'accroissement qui, lui, va être continu sur un ensemble gentil.

Posons $\tau(x+iy) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ sur le triangle $\mathcal{T}$ vu dans le plan complexe. Montrons que τ est continue. Pour $z = x+iy \in \mathcal{T}$, on peut trouver un rayon r assez petit pour que le disque $\mathcal{D}(z,r)$ n'intersecte pas la diagonale du carré $[a,b]^2$. Sur ce disque, $\tau = \frac{f \circ \operatorname{Im} - f \circ \operatorname{Re}}{\operatorname{Im} - \operatorname{Re}}$ est continue car les fonctions f, Re et Im sont continues (et $\operatorname{Re} - \operatorname{Im}$ ne s'annule pas), ce qui montre la continuité de τ au point z, et ce pour tout z dans $\mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ étant convexe, il est connexe par arcs, donc $\operatorname{Im} \tau$ est un connexe par arcs de $\mathbb{R}$, *i.e.* un intervalle I, mettons d'intérieur $\mathring{I} =]\alpha, \beta[$.

Le théorème des accroissements finis nous dit d'autre part que $\operatorname{Im} \tau \subset \operatorname{Im} f'$, d'où $]\alpha,\beta[\subset \operatorname{Im} f'$.

Montrons (presque) réciproquement que $\operatorname{Im} f' \subset [\alpha,\beta]$. Si (par l'absurde) on peut trouver un $x \in [a,b]$ tel que $f'(x) \notin [\alpha,\beta]$, alors tous les éléments de I sont au moins à une distance $\varepsilon_0 > 0$ de $f'(x)$. Or $f'(x)$ est par définition la limite d'une suite de points de $\operatorname{Im} \tau = I$, ce qui montre que $\forall \varepsilon > 0, \ \exists \iota \in I, \ |f'(x) - \iota| < \varepsilon$, ce qui est absurde pour $\varepsilon = \varepsilon_0$.

On a finalement $]\alpha,\beta[\subset \operatorname{Im} f' \subset [\alpha,\beta]$, ce qui montre que $\operatorname{Im} f'$ est un intervalle de bornes α et β.

8 Courbe de Peano

On montre ici que le carré unité $[0,1]^2$ peut être recouvert par un application continue sur le segment $[0,1]$, *i.e.* est l'image d'un chemin.

On définit des fonctions f et g réelles 1-périodiques continues en imposant les conditions :

$$\begin{cases} \text{sur } \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right], \ (f,g) = (0,0) \\ \text{sur } \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right], \ (f,g) = (0,1) \\ \text{sur } \left[\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right], \ (f,g) = (1,0) \\ \text{sur } \left[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right], \ (f,g) = (1,1) \end{cases}$$

(des fonctions affines par morceaux font l'affaire).

On pose ensuite $\begin{cases} F(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{f\left(10^{n-1}t\right)}{2^n} \\ G(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{g\left(10^{n-1}t\right)}{2^n} \end{cases}$ et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1]^2 \\ t & \longmapsto & (F(t), G(t)) \end{array} \right. .$$

- *Montrer que φ est surjective.*
- *Montrer que φ est continue.*
- *Montrer qu'une application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ surjective ne peut être ni $\mathcal{C}^1$ ni injective.*

Solution proposée.

- Soit $(x,y) \in [0,1]^2$. On cherche t tel que $(x,y) = \varphi(t)$, *i.e.* vérifiant $\begin{cases} x = \sum_{n \geq 1} \frac{f\left(10^{n-1}t\right)}{2^n} \\ y = \sum_{n \geq 1} \frac{g\left(10^{n-1}t\right)}{2^n} \end{cases}$, ce qui amène

à considérer les développements de x et y en base 2 : $\begin{cases} x = \sum_{n \geq 1} \frac{x_n}{2^n} \\ y = \sum_{n \geq 1} \frac{y_n}{2^n} \end{cases}$. On cherche à présent t tel que

$$\begin{cases} f\left(10^{n-1}t\right) = x_n \\ g\left(10^{n-1}t\right) = y_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Fixons un $t=\sum_{i\geq 1}\frac{t_i}{10^i}$ dans $[0,1]$ et un entier $n\geq 1$. On a

$$10^{n-1}t=\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}t_i 10^{n-1-i}}_{\in\mathbb{N}}+\frac{t_n}{10}+r_n$$

avec

$$r_n=\sum_{i>n}\frac{t_i}{10^{i-n+1}}=\frac{1}{10}\sum_{i\geq 1}\frac{t_{i+n}}{10^i}\leq\frac{1}{10}\sum_{i\geq 1}\frac{9}{10^i}=\frac{1}{10}\times 0,999...=\frac{1}{10},$$

d'où $f\left(10^{n-1}t\right)=f\left(\frac{t_n}{10}+r_n\right)=f\left(\frac{t_n}{10}\right)$ et de même pour g. On veut donc

$$(x_n,y_n)=\left(f\left(\frac{t_n}{10}\right),g\left(\frac{t_n}{10}\right)\right),$$

ce qui peut se faire en distiguant les quatre cas :

$$\begin{cases}(x_n,y_n)=(0,0)\longrightarrow t_n=1\\(x_n,y_n)=(0,1)\longrightarrow t_n=3\\(x_n,y_n)=(1,0)\longrightarrow t_n=5\\(x_n,y_n)=(1,1)\longrightarrow t_n=7\end{cases}.$$

• Les fonction f et g étant bornées, les séries F et G convergent normalement, donc sont limites uniformes de fonctions continues (car f et g sont continues), donc sont continues.

• Supposons qu'un tel γ soit $\mathcal{C}^1$. L'idée est qu'alors γ' est bornée sur le segment $[0,1]$, donc la longueur $\int_0^1|\gamma'|$ du graphe est bornée. Or, en quadrillant $[0,1]$ avec N^2 points a_i tels que $|a_i-a_j|>\frac{1}{N}$ pour $i\neq j$, disons $a_i=\gamma(t_i)$ par surjectivité de γ avec $t_1<t_2<...<t_{N^2}$, γ doit passer par tous ces points, ce qui se traduit en termes de longueurs par

$$\begin{aligned}\int_0^1|\gamma'|&\geq\sum_{i=2}^{N^2}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\gamma'|\geq\sum_{i=2}^{N^2}\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\gamma'\right|=\sum_{i=2}^{N^2}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1})|\\&=\sum_{i=2}^{N^2}|a_i-a_{i+1}|>\sum_{i=2}^{N^2}\frac{1}{N}=\frac{N^2-1}{N}\longrightarrow\infty,\end{aligned}$$

ce qui est absurde.

S'il existe un γ comme dans l'énoncé supposé de plus injectif, γ est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]^2$. γ^{-1} est alors continue : en effet, les fermés du compact $[0,1]$ sont compacts, donc leur image par γ (qui est continue) est compacte, donc fermée, ce qui signifie exactement que l'image réciproque d'un fermé par γ^{-1} est fermée. On retire alors du carré le point $a=\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, de sorte que γ^{-1} est continue sur le connexe par arcs $[0,1]^2\setminus\{a\}$, donc a pour image un connexe par arcs, ce qui est impossible vu que cette image est $[0,1]\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.