Quelques exercices de calculs sur les nombres complexes

Marc SAGE

4 octobre 2005

Table des matières

1 Calcul de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos kx$

Calculer pour un réel x

$$S=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos kx.$$

Solution proposée.
Remarquons tout d'abord que

$$1+e^{ix}=\left(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}\right)e^{i\frac{x}{2}}=2\cos\frac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}},$$

ce qui se voit très bien sur un dessin si l'on connaît sa géométrie du losange.

On complète ensuite la partie imaginaire en introduisant $T=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kx$, ce qui permet d'écrire (merci Moivre)

$$S+iT=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos kx+i\sin kx)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ikx}=\left(1+e^{ix}\right)^{n}=\left(2\cos\frac{x}{2}\right)^{n}e^{in\frac{x}{2}},$$

d'où S et T en identifiant parties réelles et imaginaires.

2 Factorisation de $a\cos x+b\sin x$

Soit x un complexe et a,b des réels. Factoriser

$$a\cos x+b\sin x.$$

Solution proposée.
Tout se passe bien en passant aux exponentielles et en introduisant les module et argument de $a+bi=re^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}a\cos x+b\sin x &= a\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+b\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\frac{e^{ix}}{2}(a-bi)+\frac{e^{-ix}}{2}(a+bi)\\ &= \frac{e^{ix}}{2}re^{-i\theta}+\frac{e^{-ix}}{2}re^{i\theta}=r\frac{e^{i(x-\theta)}+e^{i(\theta-x)}}{2}=r\cos(x-\theta).\end{aligned}$$

Remarque. Ce résutat en apparence stupide est très utile en physique pour factoriser des sommes de signaux synchrones (de même pulsation). Il vaut mieux donc le garder dans un coin de sa tête.

3 Sur les sommes de racine de l'unité

Soit $n\geq 1$, ω une racine n-ième de l'unité et p un entier premier avec n. On veut calculer

$$\left\{\begin{array}{l} S=\sum_{k=1}^{n}\omega^{kp}\\ T=\sum_{k=1}^{n}k\omega^{k}\end{array}\right..$$

Solution proposée.
Si $\omega^p=1$, alors $S=n$; sinon ω^p est une racine n-ième de l'unité et alors $S=0$. Finalement

$$S=\left\{\begin{array}{l} n \text{ si } \omega^p=1\\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right..$$

De façon plus précise, écrivons

$$\omega = e^{2\pi i \frac{\nu}{n}} \text{ où } \nu \in \{1, ..., n\}$$

et cherchons une CNS pour que $\omega^p = 1$.

On dispose des équivalences

$$\omega^p = 1 \iff e^{2\pi i p \frac{\nu}{n}} = 1 \iff p\frac{\nu}{n} \in \mathbb{Z} \iff n \mid p\nu \overset{p\wedge n=1}{\iff} n \mid \nu \iff \frac{\nu}{n} \in \mathbb{Z} \iff \omega = 1,$$

d'où

$$S = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Concernant T, l'idée pour se débarasser du k devant le ω^k (car c'est lui qui nous embête) est d'écrire T comme la dérivée d'une certaine fonction. Plus précisément, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$$

et on dérive :

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = f'(x) = \frac{((n+1)x^n - 1)(x-1) - \left(x^{n+1} - x\right)}{(x-1)^2}$$

d'où

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^{n} k\omega^k = \omega f'(\omega) = \omega \frac{((n+1)\omega^n - 1)(\omega - 1) - \left(\omega^{n+1} - \omega\right)}{(\omega - 1)^2} = \omega \frac{((n+1) - 1)(\omega - 1) - (\omega - \omega)}{(\omega - 1)^2} \\ &= \omega \frac{n(\omega - 1)}{(\omega - 1)^2} = n\frac{\omega}{\omega - 1}. \end{aligned}$$

Une autre idée consiste à remarquer que l'ensemble des ω^k sous le signe $\sum$ est invariant par multiplication par ω (géométriquement, le n-gone régulier est stable par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$). On compare donc naturellement T et ωT (on prend en fait ω^{-1} par commoditité dans les indices) :

$$\begin{aligned} T - \omega^{-1}T &= \sum_{k=1}^{n} k\omega^k - \sum_{k=1}^{n} k\omega^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = n\omega^n + \sum_{k=0}^{n-1} k\omega^k - \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = n - \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = n, \end{aligned}$$

et on retrouve $T = \frac{n}{1-\omega^{-1}} = \frac{n\omega}{\omega - 1}$.

4 Polynômes de Tchebychev

Soit n un entier naturel. Montrer que $\cos(nx)$ est un polynôme en $\cos x$ de degré n dont on demande le coefficient dominant. Que dire de $\sin nx$ et $\tan nx$?

Solution proposée.

Une idée : $\cos a$ est la partie réelle de e^{ia}. Deux formules : Moivre et $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Le reste, de la routine :

$$\cos nx = \operatorname{Re} e^{inx} = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)^n = \operatorname{Re}(\cos x + i\sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \operatorname{Re}\left(i^k\right) \sin^k x \cos^{n-k} x.$$

La partie réelle sélectionne les termes avec k pair, et il suffit alors de tranformer $\sin^k x = \left(1 - \cos^2\right)^{\frac{k}{2}}$ pour obtenir un polynôme en $\cos x$. Puisque les $\sin^k x$ sont de degré k en $\cos x$ et de coefficient dominant $(-1)^{\frac{k}{2}} = i^k$, le polynôme $\cos nx$ est de degré n et de coefficient dominant

$$\sum_{\substack{k=0,\dots,n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}.$$

Pour calculer la somme ci-dessus, on lui associe la somme avec les k impairs, et l'on calcule aisément la somme et la différence des deux :

$$\sum_{\substack{k=0,\dots,n\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0,\dots,n\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

$$\sum_{\substack{k=0,\dots,n\\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0,\dots,n\\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

Le coefficient cherché vaut donc 2^{n-1}.

Concernant le sinus, on prend cette fois la partie imaginaire, ce qui sélectionne les k impairs. En tranformant $\sin^k x = \left(1-\cos^2 x\right)^{\frac{k-1}{2}} \sin x$, on voit que $\sin nx$ est le produit d'un polynôme en $\cos x$ par un terme $\sin x$.

Pour la tangente, en utilisant ce qui précède, on obtient $\sin x$ fois une fraction rationnelle en $\cos x$.

Remarque. Le polynôme T_n tel que $\cos nx = T_n(\cos x)$ est appelé n-ième *polynôme de Tchebychev* (de première espèce). Il intervient dans de nombreux domaines en analyse.

On pourra utiliser les polynômes de Tchebychev pour résoudre l'exercice suivant : *trouver tous les rationnels r tels que* $\cos(r\pi)$ *soit rationnel.* Réponse : seules les fractions de dénominateur 1, 2 ou 3 conviennent.

5 Calcul des noyaux de Dirichlet et Féjèr

Soit $x \in \mathbb{C}$. On définit le *noyau de Dirichlet* (issu de la théorie de Fourier) par

$$D_n(x) = \sum_{p=-n}^{n} e^{ipx}$$

et le *noyau de Fejér* par

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{p=0}^{n} D_p(x).$$

Donner une formule close (*i.e.* explicite, sans signe $\sum$) pour D_n et F_n.

Solution proposée.

Pour calculer D_n, on fait apparaître une série géométrique en e^{ix}, puis on répartit les termes pour avoir du sinus :

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{p=-n}^{n} e^{ipx} = e^{-inx} \sum_{p=0}^{2n} \left(e^{ix}\right)^p = e^{-inx} \frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}} \\ &= e^{-inx} \frac{e^{\frac{2n+1}{2}ix}\left(e^{-\frac{2n+1}{2}ix} - e^{\frac{2n+1}{2}ix}\right)}{e^{\frac{1}{2}ix}\left(e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{\frac{1}{2}ix}\right)} = \frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x} - e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Pour F_n, il s'agit de multiplier en haut et en bas par un facteur gentil afin que la somme se télescope :

$$\begin{aligned} (n+1) F_n(x) &= \sum_{p=0}^{n} D_p(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\sin\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{p=0}^{n} \sin\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)x\right] \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sum_{p=0}^{n} -\frac{1}{2}\left(\cos\left[(p+1)x\right] - \cos(px)\right) = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\cos\left[(n+1)x\right] - 1\right) \\ &= \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Remarque. On prendra garre à ne pas écrire $(n+1) F_n = D_n^2$... Pourquoi ce terme $n+1$ nous dira-t-on ? Il s'agit tout simplement de *moyenner* les D_n. Intérêt ? Effacer les pathologies de D_n. On vérifiera que, lorsque l'on mesure le cercle unité par $\frac{d\theta}{2\pi}$ (comprendre : l'intégrale sur le cercle d'une fonction f est donnée par $\int f = \int_0^{2\pi} f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$), on trouve

$$\int D_n = \int F_n = 1.$$

En traçant le graphe de D_n et F_n, on voit que ces derniers fournissent de bonnes approximations du Dirac en 0, lesquelles sont des objets très pratiques pour la théorie de l'approximation. Et, dans ce cadre, F_n est bien plus agréable à manipuler que D_n.