Comparaisons
(version chantier)

Marc SAGE

<2015

Table des matières

Rappelons à l'occasion de cette feuille d'inégalités que Cauchy-Schwarz ne prend pas de "t" : c'est le même Schwarz que dans le théorème de Schwarz (pour inverser ∂_x et ∂_y) ou dans le lemme de Schwarz en analyse complexe. En revanche, on mettra un "t" à Laurent Schwartz, père des distributions.

sortir les méthodes du poly d'animaths.
Par équivalence marche très bien : on TUE les FRACTIONS et les RACINES

1 Newton & Mac Laurin

p_k : produit moyen de k facteurs

1.1 Newton

Pour $n = 2$, on a $p_1 = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ avec $=$ ssi $a = b$, d'où l'amorce.
Soit $n \geq 2$, $a_0, ..., a_n > 0$, $1 \leq k \leq n$.
On a

$$p'_{k+1} = \frac{k+1}{n+1} a_0 p_k + \frac{n-k}{n+1} p_{k+1}.$$

Notons $l + k = n + 1$, $a = a_0$ et $q_k = (n+1)\, p_k$.
Alors

$$\begin{aligned} q'_{k+1} &= (k+1)\, a q_k + (l-1)\, q_{k+1} \\ q'_{k-1} &= (k-1)\, a q_{k-2} + (l+1)\, q_{k-1} \text{ (où } q_{-1} = 0) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} q'_{k-1} q'_{k+1} - q'^2_k &= ((k-1)\, a q_{k-2} + (l+1)\, q_{k-1})\, ((k+1)\, a q_k + (l-1)\, q_{k+1}) - \left(k a q'_{k-1} + l q_k\right)^2 \\ &= \left(k^2 - 1\right) a^2 \underbrace{q_{k-2} q_k}_{\leq q_{k-1}^2} + \left(l^2 - 1\right) \underbrace{q_{k-1} q_{k+1}}_{\leq q_k^2} - k^2 a^2 q_{k-1}^2 - l^2 q_k^2 - 2akl q_k q_{k-1} \\ &\quad + a \left((k-1)\,(l-1) \underbrace{q_{k-2} q_{k+1}}_{= \frac{q_{k-2} q_k}{q_{k-1}} \frac{q_{k+1} q_{k-1}}{q_k} \leq q_{k-1} q_k} + (l+1)\,(k+1)\, q_{k-1} q_k \right) \\ &\leq -a^2 q_{k-1}^2 - q_k^2 + a q_k q_{k-1} \left(\underbrace{(k-1)\,(l-1) + (l+1)\,(k-1) - 2kl}_{= kl + k + l + 1 + kl - k - l + 1 - 2kl = 2} \right) \\ &= -\left(a q_{k-1} - q_k\right)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

avec $=$ ssi on a $=$ dans HR et $q_k = a q_{k-1}$. Précisons les cas d'égalité d'HR.
Si $k = 1$, $l = n$, donc $l^2 - 1 > 0$, donc on doit avoir $q_{k-1} q_{k+1} = q_k^2$, d'où par HR $a_1 = ... = a_n$.
Si $k > 1$, alors $(k-1)\, a > 0$, donc on doit avoir $q_{k-2} q_k = q_{k-1}^2$, d'où même conclusion.
Dans tous les cas, l'égalité force $a_1 = ... = a_n =: \alpha$, d'où $p_{k-1} = \alpha^{k-1}$ et $p_k = \alpha^k$. La dernière condition $a_0 p_{k-1} = p_k$ s'écrit donc $a_0 \alpha^{k-1} = \alpha^k$, d'où $a_0 = \alpha$ également.
Finalement, on a $=$ ssi tous les a_i sont égaux.

Rq : si on autorise les $a_i = 0$, alors on a $p_k p_{k+2} = p_{k+1}^2$ dès que au moins $n - k + 1$ des a_i sont nuls, donc pas de joli cas d'égalité.

Autre démo : soit $P = \prod (X + a_i) = \sum \binom{n}{i} p_i X^i$. Rolle $=>$ $P^{(i-1)}$ scindé, et $\frac{P'^2 - PP''}{P^2} = \sum \frac{1}{(X-\lambda)^2}$, d'où $P^{(i)2} < P^{(i-1)} P^{(i+1)}$ et le résultat en évaluant en 0.

1.2 Maclaurin

Soit $n \geq 2$, $a_1, ..., a_n > 0$: montrer que

$$p_1 \geq \sqrt{p_2} \geq \sqrt[3]{p_3} \geq ... \geq \sqrt[n]{p_n}.$$

on a $\frac{p_1}{p_0} \leq \frac{p_2}{p_1} \leq ... \leq \frac{p_k}{p_{k-1}}$, d'où en multiplitipliant en i les $\frac{p_i}{p_{i-1}} \leq \frac{p_k}{p_{k-1}}$à k fixé

$$\frac{p_k}{p_0} \leq \left(\frac{p_k}{p_{k-1}}\right)^k, \text{ CQFD.}$$

On a = ssi tous les a_i sont égaux.

1.3 Applications

soit $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + 1$ un polynôme scindé à coef dans R^+. Mq $P(x) \geq (x+1)^n$
De m ; $p_{n-t} \geq p_n^? = 1$, donc $P(x) = \sum \binom{n}{i} p_i x^i \geq \sum \binom{n}{i} x^i \geq (1+x)^n$.

soit $a_1, ..., a_n > 0$. Mq $\sigma_k \sigma_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 \cdots a_n$.
DEM : eq $\sigma_k \sigma_{n-k} \geq \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}\sigma_n$ ie $p_k p_{n-k} \geq p_n$. Or $p_i \geq p_n^{\frac{i}{n}}$ d'où le résultat pour $i = k$ et $n - k$.

2 Cauchy-Schwarz & Holder

cauchy-schwarz : démo comme holder particulier.
autre terme qui encadre CS –> cf algbèbre 3 FGN.

Holder géralisé : $\alpha + \beta + \gamma = 1 \implies \sum a_i^\alpha b_i^\beta c_i^\gamma \leq \left(\sum a_i\right)^\alpha \left(\sum b_i\right)^\beta \left(\sum c_i\right)^\gamma$.

Preuve : Par homoégénité, OPS $\sum a_i = 1$, puis $\sum b_i = 1$ et de même $\sum c_i = 1$. On a alors $a_i^\alpha b_i^\beta c_i^\gamma \overset{\text{IAG}}{\leq} \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i$, puis on somme sur i.

On généralise en $\sum \alpha_i = 1 \implies \sum_i \prod_j a_{i,j}^{\alpha_j} \leq \prod_i \left(\sum_j a_{i,j}\right)^{\alpha_j}$

3 Mauvais élèves

Qui n'a jamais écrit $\sum \frac{a_i}{b_i} = \frac{\sum a_i}{\sum b_i}$ ou encore $\left(\sum a_i\right)^2 = \sum a_i^2$? Lorsqu'on combine les deux, on obtient

$$\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum a_i\right)^2}{\sum b_i}.$$

C'est une application direccte de Cauchy-Schwarz à $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ et $\sqrt{b_i}$.

Ex : on donne $a^2 + b^2 = \left(c^2 + d^2\right)^3$. Montrer que $\frac{c^3}{a} + \frac{d^3}{b} \geq 1$. Pour faire apparaitre des carrés, on note qu'il suffit d'avoir $\left(\frac{c^3}{a}\right)^2 + \left(\frac{d^3}{b}\right)^2 \geq 1$. Or, mauvais élève nous dit que

$$\frac{\left(c^3\right)^2}{a^2} + \frac{\left(d^3\right)^2}{b^2} \geq \frac{\left(c^3 + d^3\right)^2}{a^2 + b^2} = 1, \text{ CQFD.}$$

On peut aussi appliquer Holder ....

4 Schur Muirhead et compagnie

Lemme : si α majore β (suites >0), alors $\forall\sigma,\exists\lambda_\sigma\in[0,1]$ de somme 1 tel que

$$(\beta_1,...,\beta_n)=\sum\lambda_\sigma\left(\alpha_{\sigma(1)},...,\alpha_{\sigma(n)}\right)$$

Alors

$$\sum_\sigma\prod a_i^{\alpha_{\sigma(i)}}=\sum_\sigma\sum_\tau\lambda_\tau\prod a_i^{\alpha_{\sigma(i)}}=\sum_\sigma\sum_\tau\lambda_\tau\prod a_i^{\alpha_{\sigma\tau(i)}}\overset{\text{IAG}}{\geq}\sum_\sigma\prod a_i^{\sum\lambda_\tau\alpha_{\sigma\tau(i)}}=\sum_\sigma\prod a_i^{\beta_{\sigma(i)}}.$$

SCHUR
Soit $\varphi>0$ strictement monotone et $a,b,c>0$. Alors

$$\sum\varphi(a)(a-b)(a-c)\geq 0\text{ avec }=\text{ ssi }a=b=c.$$

DEM.
L'expression est symétrique (pas seulment par permution cyclique), donc on peut supposer $a\geq b\geq c$ si φ croît. Alors $\varphi(a)(a-b)(a-c)\geq\varphi(b)(a-b)(b-c)$ (avec $=$ ssi $a=b$) et $\varphi(c)(c-a)(c-b)\geq 0$ (avec $=$ ssi $c=a$ ou $c=b$).

5 inégalités homogènes de degré 3

on sait qu'on peut se ramener aux p_i des variables. Donnons leur une expression sympa : il y a un réel $a\geq 0$ et un réel λ du segment unité tq
$p_2=p_1^2\left(1-a^2\right)$
$p_3=p_1^3\left(1-3a^2+2\lambda a^3\right)$

DEM : l'expresion de p_2 vient de Newton $p_0p_2\leq p_1^2$. On pourra poser $A:=a^2$.
Pour p_3, on exprime le discriminant $\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)^2$ comme un trinome en p_3, d'où une localision de p_3. Plus précisément, se rappelant

$$\text{Disc}\left(aX^3+bX^2+cX+d\right)=b^2c^2+18abcd-4ac^3-4b^3d-27a^2d^2,$$

on obtient

$$\text{Disc}\left(X^3-3p_1X^2+3p_2X-p_3\right)=27\left(3p_1^2p_2^2+6p_1p_2p_3-4p_2^3-4p_1^3p_3-p_3^2\right)$$

d'où

$$\frac{\text{Disc}\,P}{-27}=p_3^2-2p_3p_1\left(3p_2-2p_1^2\right)+p_2^2\left(4p_2-3p_1^2\right).$$

Subtistant l'expresion de p_2, les coeff deviennt

$$\begin{aligned}p_1\left(3p_2-2p_1^2\right)&=p_1^3(3-3A-2)=p_1^3(1-3A)\\p_2^2\left(4p_2-3p_1^2\right)&=p_1^4(1-A)^2p_1^2(4-4A-3)=p_1^6(1-A)^2(1-4A)\end{aligned}$$

d'où le discriminant réduit du trinome

$$\begin{aligned}\frac{\Delta'}{p_1^6}&=(1-3A)^2+\left(A^2-2A+1\right)(4A-1)\\&=1-6A+9A^2+4A^3-9A^2+6A-1\\&=4A^3\end{aligned}$$

et donc les racines $p_1^3\left[\left(1-3a^2\right)\pm 2a^3\right]$. On en déduit l'expression de p_3 cherchée.

APP????

Rq (cf aussi *Elements of algebra*) : le polynoe $P := X^3 - 3p_1X^2 + 3p_2X - p_3$ se simplifie alors en

$$\begin{aligned}
P &= X^3 - 3p_1X^2 + 3p_1^2\left(1-a^2\right)X - p_1^3\left(1-3a^2+2a^3\lambda\right) \\
\frac{P}{p_1^3} &= \left(\frac{X}{p_1}\right)^3 - 3\left(\frac{X}{p_1}\right)^2 + 3\left(\frac{X}{p_1}\right)\left(1-a^2\right) - \left(1-3a^2+2a^3\lambda\right) \\
&= \left(\frac{X}{p_1}-1\right)^3 - 3a^2\left(\frac{X}{p_1}-1\right) - 2a^3\lambda \\
\frac{P\left(p_1X+1\right)}{p_1^3} &= X^3 - 3a^2X - 2a^3\lambda.
\end{aligned}$$

Cherchons une racine par les formuli de Tartaglia. On l'écrit sous une somme $u+v$ avec $uv = \varepsilon$. Alors u^3 et v^3 sont racine de $X^2 - 2\lambda a^3X + a^6$ de disc réd $a^6\left(\lambda^2-1\right)$, d'où les racines $a^3\left(\lambda \pm i\sqrt{1-\lambda^2}\right)$. . Posant $\lambda = \cos\theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$, elles sécrivent $a^3e^{\pm i\theta}$, d'où $u, v = ae^{\pm i\frac{\theta}{3}}$ et la racine cherchée $2a\cos\frac{\theta}{3}$.