Fonctions convexes
(version chantier)

Marc SAGE

<2017

Table des matières

JEnsen : c'est de l'assoc barycentrique. Démo : récurrence de Cauchy :-)

EXO : *montrer que dans la def de convece on peut remplacer le* $\forall$ *par un* $\exists$ *sous une hypotès de continuité. (d'où l'exo calssique avec juste les milieu sous les cordes)*

DEM :supposons f au-dessus d'une corde $[a,b]$. Quitte à soustraire une focntion affine, on peut supposer $g(c) > 0 = g(a) = g(b)$ avec $a < c < b$. On étend le domaine où $f > 0$ autour de c en considérant $\alpha = \inf\{x < v\ ;\ f(x) > 0\}$ et idem β à droite. Alors $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ par continuité et f strictent au-dessu de la corde $]\alpha, \beta[$, contradiction.

Soit a. f (sttt) convexe ssi $\tau_a f$ croit (stt)
Si f D^1, c'est dire f au-dessus de toutes ses tangentes.

Rappel : f ext local en a => $f'(a) = 0$, <= fausse. Vrai si f convexe :
$f'(a) = 0$ et $f''(a) \geq 0$ => min (dessin parabole)
$f'(a) = 0$ et $f''(a) \leq 0$ => max (dessin parabole majoré)

EG : $\sin \geq \frac{2}{\pi}$ Id.

Young : $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Moyennes d'ordre alpha –> priordial
on retrouver l'IAG, CS, puis Holder généralisé...
Dessin important pour intuitino , et meme plus –> dico avec inégalité crades à écrire
Lien visuel avec intégration

Une fonction convexe et dérivable est C1.
Preuve : Sa dérivée est croissante et a la propriété des valeurs intermédiaires (Darboux powaaa !), donc est continue.

rq culturelle : une ***fonction d'Orlicz*** : $R^+ \longrightarrow R^+$ croissante, nulle en 0 (et seulement en 0), continue en 0.
On dit que f et g sont équivalente si $\exists a, \alpha, b, \beta > 0$ tq $\begin{array}{l} f(a\cdot) \leq \alpha g(\cdot) \\ g(b\cdot) \leq \beta f(\cdot) \end{array}$.
Sot φ d'Orlicz : alors φ concave$\Longrightarrow$ φ sous-additive$\Longrightarrow$ φ eq à une fonction concave (mais $\lceil\cdot\rceil$ est sous-additif pas concave)
cf page 3 http ://archive.numdam.org/ARCHIVE/SC/SC_1971-1973__11-12_/SC_1971-1973__11-12__A3_0/SC_197 1973__11-12__A3_0.pdf
–> PO 1 **http ://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/sm/sm46/sm46116.pdf**
(cf chapitre lavoisier)

interpol log-convexe de factorielle : le théorème de **Bohr–Mollerup** porte le nom des deux mathématiciens danois Harald Bohr et Johannes Mollerup, qui l'ont prouvé en 1922. Le théorème caractérise la fonction Γ, définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_{\mathbb{R}^+} t^x e^{-t} \frac{dt}{t}$$

comme la seule fonction f définie pour $x > 0$ qui vérifie simultanément les trois propriétés suivantes :

1. $f(1) = 1$
2. $f(x+1) = xf(x)$ pour $x > 0$
3. f est log-convexe