

# Dérivation

## (version chantier)

Marc SAGE

<2015

### Table des matières

|          |                                                                        |          |
|----------|------------------------------------------------------------------------|----------|
| 0.1      | Dérivée de l'exp . . . . .                                             | 2        |
| <b>1</b> | <b>Définitions notations</b>                                           | <b>2</b> |
| <b>2</b> | <b>Dérivées successives d'un produit, d'un inverse, d'une composée</b> | <b>3</b> |
| <b>3</b> | <b>Rolle &amp; accroissemnt finis</b>                                  | <b>5</b> |
| 3.1      | Rolle . . . . .                                                        | 5        |
| 3.2      | Dérivée et variation . . . . .                                         | 6        |
| 3.3      | hopital, th limite dérivée . . . . .                                   | 6        |
| <b>4</b> | <b>Dérivées successives</b>                                            | <b>7</b> |
| <b>5</b> | <b>TY TL TI</b>                                                        | <b>7</b> |
| <b>6</b> | <b>fonctions pallie</b>                                                | <b>7</b> |
| <b>7</b> | <b>approche numérique</b>                                              | <b>8</b> |
| <b>8</b> | <b>Pour aller plus loin</b>                                            | <b>8</b> |

Dessin de la **tangente** (de *tangere*, toucher), insister sur l'équivalent avec l'approximation par une droite.

Prendre la tangente veut bien dire ce que ça veut dire : on a une approximation *locale*, dès qu'on s'éligne, on ne peut rien dire.

Ne pas hésiter à revenir à la définition précise de l'approximation si l'on veut travailler avec (le problème du  $o$  est qu'il cache la variable)

Si pas de théorème classique, REVENIR au taux d'accroissement (EG :  $x^k \sin \frac{1}{x}$ )

## 0.1 Dérivée de l'exp

**Idée de démonstration.**

- Montrons tout d'abord que  $\exp|_{\mathbf{R}_+}$  est dérivable en 0 avec  $\left[\exp|_{\mathbf{R}_+}\right]'(0) = 1$ .  
Soit  $t > 0$  réel : on regarde le taux de variation

$$\begin{aligned} \frac{\exp t - \exp 0}{t - 0} - 1 &= \frac{\exp t - 1 - t}{t} \\ &= \frac{\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots}{t} \\ &= \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^3}{4!} + \dots \\ &= t \underbrace{\left( \frac{1}{2!} + \frac{t}{3!} + \frac{t^2}{4!} + \dots \right)}_{=: \theta(t)}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire  $\frac{\exp t - \exp 0}{t - 0} - 1 = t \theta(t)$  (tout est positif). Il est raisonnable d'espérer que, pour  $t \simeq 0$ , le réel  $\theta(t)$  reste proche de  $\theta(0) = \frac{1}{2}$ , d'où l'on tirerait alors

$$\theta(t) \simeq \frac{1}{2} \implies \theta(t) < 1 \text{ et } \frac{\exp t - \exp 0}{t - 0} - 1 < t \theta(t) < t.$$

Ainsi, en prenant  $t$  suffisamment proche de 0, on pourra forcer le taux d'accroissement  $\frac{\exp t - \exp 0}{t - 0}$  à être aussi proche de la valeur 1 que l'on souhaite ; c'est dire précisément  $\frac{\exp t - \exp 0}{t - 0} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1$ , *c. q. f. d.*

- Montrons à présent que  $\exp$  est dérivable en 0 et que  $\exp' 0 = 1$ .  
Soit  $a \in \mathbf{C}^*$ . On écrit

$$\left| \frac{\exp a - \exp 0}{a - 0} - 1 \right| \underset{\substack{\text{cf. calcul} \\ \text{ci-dessus}}}{=} \left| \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \right| \leq \frac{|a|^2}{2!} + \frac{|a|^3}{3!} + \dots = \frac{\exp |a| - \exp 0}{|a| - 0} - 1$$

qui tend bien vers 0 lorsque  $|a|$  tend vers 0.

- Concluons. Soit  $a \in \mathbf{C}$  et  $\varepsilon$  un complexe non nul. D'après ce qui précède, le taux de variation  $\frac{\exp(a+\varepsilon) - \exp a}{(a+\varepsilon) - a} = \left( \frac{\exp \varepsilon - 1}{\varepsilon} \right) \exp a$  tend (lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) vers  $\exp'(0) \exp a = \exp a$ , ce qui conclut.

**Remarque.** La "démonstration" qui précède n'en est *pas* une. Elle donne cependant les grandes lignes et pourra être formalisée sans peine une fois le bon langage introduit.

## 1 Définitions notations

Commencer par définir le **taux d'accroissement** (même en complexe)  $\tau_a : f \mapsto \frac{f-f(a)}{\text{Id}-a}$  Puis dire

**dér** si  $\tau_a f$  a une limite

**dér à droite** si  $\tau_a f$  a une limite à droite

**dér à gauche** si  $\tau_a f$  a une limite à gauche

Attention à ne pas écrire  $f'_d(a) = f'(a^+)$  : déjà, sens de  $f'(a^+)$  (il faut que  $f$  soit définie au voisinage de  $a$  : CEG avec  $x \pm x^3$  sur  $Q$  et  $R \setminus Q$ ), et c'est un énoncé d'interversion de limite  $\rightarrow$  danger, cf plus loin.

expliquer notations  $\frac{d}{dx}(f(x))$ ,  $\frac{df}{dx}(x)$ ,  $f'(x)$ , et pas  $f(x)'$

(le symbol  $\frac{d}{dx}$  est dû à Leibniz (source Bourbaki), la notation allemande  $\frac{\partial}{\partial x}$  est utilisé par GOURSAT qui l'attribue à JACOBI)

EG :  $\frac{d}{d(3t)}(e^{3t} + \sqrt{3t})$  : suppose aucune ambiguïté

DESSIN pour  $d(fg) = f dg + g df$  (analogue de  $(a+b)^2 = \dots$ )

(Lebniz a cru que  $d(fg) = df dg$ , et pourtant cette formule porte son nom ! Bernoulli, son élève, a remarqué que  $d(x^2) = 2x$  est un contremple.)

(formule leibniz valable pour bord en topologie : prendre (disque) $\times[0,1]$ )

**dérivée généralisée** : le TA tend vers  $\pm\infty$ .

$D^1 \subsetneq C^0 : |\cdot|$  en 0

Pire : comme la continuité, la dérivabilité en un point  $a$  n'implique pas la dérivabilité au voisinage de  $a$  !  
(Considérer une paire de fns réciproques de dérivées 1 en 0 portée l'une par  $Q$  l'autre par  $R \setminus Q$ )

## 2 Dérivées successives d'un produit, d'un inverse, d'une composée

Dérivée d'une application multilinéaire

APP :  $[fg]' = f'g + fg'$ ,  $[\lambda f]' = \lambda'f + \lambda f'$ ,  $\langle a, b \rangle' = \langle a', b \rangle + \langle a, b' \rangle$ ,  $\|a^2\|' = 2 \langle a, a' \rangle$ ,  $[a \wedge b]' = a' \wedge b + a \wedge b'$ ,

$\det(a)' = \dots$

$[f_1 \cdots f_n]' = \sum_{i=1}^n f_1 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_n$

et  $[f_1 \cdots f_n]^{(k)} = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \binom{k}{k_1, \dots, k_n} f_1^{(k_1)} \cdots f_n^{(k_n)}$

gén à Leibniz

chaîne rule  $[g \circ f]' = [g' \circ f] \times f'$  se généralise en règle triangulaire EG  $[i \circ h \circ g \circ f]' = \begin{matrix} i' \circ h \circ g \circ f \\ \times h' \circ g \circ f \\ \times g' \circ f \\ \times f' \end{matrix} :$

$$[f_n \circ \cdots \circ f_1]' = \prod_{k=1}^n [f_k' \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1].$$

DEM Rec sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , composée vide est l'identité de dérivée 1 = produit vide. Pour  $n = 1$ , on connaît. Ensuite, on dérive HR :

$$\begin{aligned} [f_n \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0]' &\stackrel{\text{chain rule}}{=} [[f_n \circ \cdots \circ f_1]' \circ f_0] \times f_0' \stackrel{\text{HR}}{=} \left( \left[ \prod_{k=1}^n [f_k' \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1] \right] \circ f_0 \right) \times f_0' \\ &= \left( \prod_{k=1}^n f_k' \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0 \right) \times f_0' = \prod_{k=0}^n f_k' \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_1 \circ f_0, \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

dérivée successive d'une composée :

$$[g \circ f]^{(k)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} \left[ g^{(\# \pi)} \circ f \right] \times \prod_{p \in \pi} f^{(\# p)} = \sum_{\lambda \vdash k} \frac{1}{\# \text{Aut } \lambda} \binom{k}{\lambda^i} \left[ g^{(l(\lambda))} \circ g \right] \times \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} f^{(\lambda_i)}$$

où  $\mathfrak{P}_k$  désigne l'ensemble des partitions ensemblistes de  $\{1, \dots, k\}$ , i. e. des  $\pi \subset \mathfrak{P}(\{1, \dots, k\})$  dont la famille canoniquement associée  $(p)_{p \in \pi}$  est une partition de  $\{1, \dots, k\}$ .

RQ : on peut remplacer  $\mathfrak{P}_k$  par  $\mathfrak{P}_E$  pour tout ensemble  $E$  de cardinal  $k$ .

DEM La seconde égalité vient en regroupant les partitions selon leur profil : le binomial compte les familles de partitions à cardinaux fixés mais les symétries de  $\lambda$  donnent le même ensemble de parts d'où le  $\frac{1}{\# \text{Aut } \lambda}$ .

On raisonne par récurrence sur  $k$ . Pour  $k = 0$ ,  $\mathfrak{P}_0$  est réduit à la partition vide, d'où

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{P}_0} \left[ g^{(\# \pi)} \circ f \right] \times \prod_{p \in \pi} f^{(\# p)} = \left[ g^{(0)} \circ f \right] \times \prod_{p \in \emptyset} f^{(\# p)} = [g \circ f] \times 1.$$

Pour  $k = 1$ , c'est la formule connue. Ensuite, dériver l'hypothèse de récurrence donne

$$[g \circ f]^{(k+1)} = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} \left[ g^{(\# \pi + 1)} \circ f \right] \times f' \times \prod_{p \in \pi} f^{(\# p)} + \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} \left[ g^{(\# \pi)} \circ f \right] \times \sum_{p \in \pi} f^{(\# p + 1)} \prod_{p' \neq p} f^{(\# p')}.$$

En regroupant les partitions  $\Pi$  de  $\mathfrak{P}_{k+1}$  selon que  $k + 1$  est tout seul ou non, *i. e.* selon

$$\mathfrak{P}_{k+1} = \coprod_{\pi \in \mathfrak{P}_k} \{ \pi \cup \{ \{k+1\} \} \} \amalg \coprod_{\pi \in \mathfrak{P}_k} \coprod_{p \in \pi} \{ (\pi \setminus \{p\}) \cup \{p \cup \{k+1\}\} \},$$

on voit que la somme ci-dessus vaut  $\sum_{\Pi \in \mathfrak{P}_{k+1}} [g^{(\# \Pi)} \circ f] \times \prod_{p \in \Pi} f^{(\# p)}$ , CQFD.

On généralise. Appelons **partition  $n$ -emboîtée** de  $E$  tout  $n$ -uplet  $(\pi^0 = E, \pi^1, \dots, \pi^n; \pi^{n+1} = \{\pi^n\})$  tel que  $\pi^{j+1} \in \mathfrak{P}_{\pi^j}$  (les infos  $\pi^0$  et  $\pi^{n+1}$  sont redondantes mais harmonisent les notations). On note  $\mathfrak{P}_E^n$  leur ensemble. Rq  $\mathfrak{P}_E^1 \cong \mathfrak{P}_E$ . Rq la bijection

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{P}_E^n & \xrightarrow{\sim} & \prod_{\pi \in \mathfrak{P}_E} \{ \pi \} \times \mathfrak{P}_\pi^{n-1} \\ (E, \pi^1, \dots, \pi^{n+1}) & \mapsto & (\pi^1, \pi^1, \dots, \pi^{n+1}) \\ (E, \pi^0, \dots, \pi^n) & \longleftarrow & (\pi, \pi^0, \dots, \pi^n) \end{array} \right. .$$

Alors pour tout ensemble  $K$  de card  $k$

$$[f_n \circ \dots \circ f_1]^{(k)} = \sum_{\vec{\pi} \in \mathfrak{P}_K^{n-1}} \prod_{i=1, \dots, n} \prod_{p \in \pi^i} \left[ f_i^{(\# p)} \circ f_{i-1} \circ \dots \circ f_1 \right].$$

DEM. Rec sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , on a  $f_1^{(k)}$  d'un côté et de l'autre

$$\sum_{(\pi^0, \pi^1) = (K, \{K\})} \prod_{p \in \pi^1} f_1^{(\# p)} = f_1^{(\# K)} \text{ Ok}$$

Pour  $n = 2$ , on vietn de le faire.

Ensuite, on dérive :

$$\begin{aligned} [f_n \circ \dots \circ f_1 \circ f]^{(k)} &= [[f_n \circ \dots \circ f_1] \circ f]^{(k)} \stackrel{n=2}{=} \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_k} \left[ [f_n \circ \dots \circ f_1]^{(\# \pi)} \circ f \right] \times \prod_{p \in \pi} f^{(\# p)} \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_K} \left[ \sum_{\vec{\pi} \in \mathfrak{P}_\pi^{n-1}} \left[ \prod_{i=1, \dots, n} \prod_{p \in \pi^i} f_i^{(\# p)} \circ f_{i-1} \circ \dots \circ f_1 \right] \circ f \right] \times \prod_{p \in \pi} f^{(\# p)} \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_K} \sum_{\vec{\pi} \in \mathfrak{P}_\pi^{n-1}} \left[ \prod_{i=1, \dots, n} \prod_{p \in \pi^i} f_i^{(\# p)} \circ f_{i-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f \right] \times \prod_{p \in \pi} f^{(\# p)} \\ &\stackrel{\text{bijection}}{=} \sum_{\text{ci-dessus}} \sum_{(E, \pi^0, \dots, \pi^n) \in \mathfrak{P}_K} \left[ \prod_{i=1, \dots, n} \prod_{p \in \pi^i} f_i^{(\# p)} \circ f_{i-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f \right] \times \prod_{p \in \pi^0} f^{(\# p)} \\ &= \sum_{\vec{\pi} \in \mathfrak{P}_K} \prod_{i=0, \dots, n} \prod_{p \in \pi^i} \left[ f_i^{(\# p)} \circ f_{i-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0 \right], \text{ CQFD.} \end{aligned}$$

EG polyômes sont  $D^1$  : et  $\frac{P'}{P} = \sum \frac{\omega_i}{X - \lambda_i}$   
Dérivées des fonctions usuelles !

paler de la dérivation complexe : tout ci-dessus marche pareil. Mais comportement bine plus fort (D1 => holomorphe), on y reviendra.

point **anguleux**<sup>1</sup> : si  $f'_d(a) \neq f'_g(a)$

---

<sup>1</sup> on discutera plus loin du non-choix de  $f'(a^\pm)$  qui serait plus clair

$D^1$  à gauche/droite  $\Rightarrow C^0$  à gauche/droite

Plein d'opérations utiles

Pour l'inverse, l'inverse d'un homéo est dérivable ssi sa dérivée est non nulle (DESSIN!!!)

calcul dérivée inverse : dériver  $x \frac{1}{x} = 1$ . Par composition, en déduire  $\frac{1}{f}$ , puis par produit  $\frac{u}{v}$ .

(tout cela fonctionne en complexe)

$f$   $D^1$  et bij :  $f^{-1} D^1$  ssi  $f^{-1} C^0$  et  $f' \neq 0$  (cn claire, pour la cs écrire  $[\tau_{f(a)} f^{-1}](y = f(x)) = \frac{x-a}{f(x)-f(a)}$  ; lorsque  $y \rightarrow f(a)$ ,  $x \rightarrow a$ )

Eg :  $\exp : \{|\operatorname{Im}| < \pi\} \rightarrow C \setminus R^-$  bij,  $D^1$ , Ln continue, donc  $\operatorname{Ln}' = \frac{1}{\cdot}$ .

en réel, "bij +  $f^{-1} C^0$ " se réécrit " $f$  sttt mono" car  $f C^0$  (car  $D^1$ ), la condition  $f^{-1} C^0$  est toujours vérifié. Ainsi,  $f^{-1} D^1$  ssi  $f' \neq 0$ . PAs suffisant en complexe : prendre  $\exp : C \mapsto \{-\pi < \operatorname{Im} \leq \pi\}$  sur  $a + i\pi$ , la réciproque n'est pas  $C^0$  sur  $R^-$

noter  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$  pour  $[f^{-1}]' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

composée : démo avec produit de TA

Expliquer pourquoi chain-rule est valide :  $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}$  (si  $y C^1$  difféo,  $\frac{df}{dy} = f \circ y^{-1}$ )

Préférer la notation  $\frac{df}{dg}$  ! (lorsque  $g$  difféo)

eg :  $\frac{d}{dx} f(\lambda x) = \lambda f'(\lambda x)$

Dérivée logarithmique : pratique pour calcul.

Eg :  $P'/P$ ,  $xe^{ix} \rightarrow$  fois  $1 + ix$

## 3 Rolle & accroissement finis

### 3.1 Rolle

Lemme :  $f(a)$  extr loc  $\Rightarrow f'(a) = 0$ . FAUX si  $a$  pas intérieur.

Lemme bis :  $f$  min en  $\inf I \Rightarrow f'(a) \geq 0$

(expliquer qu'il faut de la place)

COR utile :  $f$  s'annule  $n$  fois  $\Rightarrow f'$  s'annule  $n - 1$  fois.

(autre solution pour l'infinité : on extrait une ss de racine mono, d'où par Rolle une racine pour la dérivée dans chaque intervalle)

APP : si  $\alpha_0 < \dots < \alpha_n$  et  $a_i \neq 0$ , alors  $\sum a_i t^{\alpha_i}$  s'annule au plus  $n$  fois sur  $R^+$  (rec sur  $n$ )

APP :  $P$  scindé sur  $R \Rightarrow P'$  scindé

EXO :  $P' - \lambda P$  scindé ?

Démo originelle des accroissements finis de Cauchy dans Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (p. 106).

Rolle, FAF

Commentaire sur IAF : contrôler la vitesse contrôle les bornes (donner un vélo à quelqu'un, il n'ira pas bien loin en quelques minutes). Mais réciproque fautive : enfermer un fou dans une pièce, il peut beaucoup s'agiter.

EG :  $\sin x^2$ ,  $\sin e^x$ ,  $\sin \frac{1}{x}$  (DESSIN)

Pire :  $x \sin \frac{1}{x}$  tend vers 0, mais n'est pas dérivable en 0 (oscillation bornée) et la dérivée diverge vers  $\pm\infty$  en  $0^+$

Pire encore :  $x^n \sin \frac{1}{x^{n-1}}$  tend vers 0 en  $O(x^n)$  mais la dérivée diverge vers  $\pm\infty$ .

Enfin, si l'on met  $x^3 \sin \frac{1}{x}$ , on a une belle application  $C^1$  :-)

EXO : suppos  $f' \rightarrow l$  en  $\infty$ . Mq  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow l$ .

DEM : intuitivement,  $f$  est une droite de pente  $l$ , l'ordonnée à l'origine étant tuée par le  $\frac{1}{x}$ .

Stuce : remplacer  $f$  par  $f - l \operatorname{Id}$  permet de supposer  $l = 0$ .

Proppremet, soit  $\varepsilon > 0$  et  $A$  tq  $x > A \Rightarrow |f'| < \varepsilon$ . Alors le TA en  $A$  est bornée par  $\varepsilon$  pour  $x > A$ , d'où la conclusion en faisant apparaître  $\frac{f(x)}{x}$ .

EXO : mq th rolle ok si on remplace CO par "vérifie TVI".

DEM : OPS  $f(a) = 0$ . Si  $f$  cCO en  $a$  et  $b$ , alors Rolle s'applique ( $f$  dér  $\Rightarrow$  f CO). Sino, mettons  $f$  discontinue en  $a$  : il a un  $\varepsilon_0$  tq... Soit  $x < b$  tq  $|f(x)| > \varepsilon_0$ . Par le TVI, il y a un  $y < x$  tq  $|f(y)| < \varepsilon_0$ . Par discontinu, il y a un  $z < y$  tq  $|f(z)| > \varepsilon_0$ . Appliquer Rolles sur  $\{x, y, z\}$

## 3.2 Dérivée et variation

la FAF donne accès aux variations selon signe dérivée :

croît ssi  $f' \geq 0$

décroît ssi  $f' \leq 0$

constant ssi  $f' = 0$

DESSIn!!!!

$f$  croît sttt ssi  $f' \geq 0$  et ne s'annule sur aucun intervalle infini

Rq :  $f'$  peut s'annuler une infinité de fois, et même sur un ensemble dense, tout en restant sttt croissante (EG : escalier du diable)

D'où tableau de signe.

EG :  $a^b + b^a > 1$  (homogén...)

Outils analytique certes puissant pour étudier les variations, mais non systématique!! Exemple de  $\frac{1+x}{1-x}$  ou  $\theta \mapsto \frac{1-r^2}{r^2-2r \cos \theta + 1}$ .

Rolle sur un intervalle qcq par homéo bornée de  $\mathbb{R}$

ROLLE (et donc FAF) faux dans  $C$  : prendre  $t \mapsto e^{it}$ . Mais IAF reste (on intègre la dérivée)

EG :  $e^x \geq x + 1$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ ,  $|\sin x| \leq |x|$  (DESSIN!!)

APP : constante ssi dérivée nulle (si connexe)

si  $f \in D^1$ , lip ssi  $f'$  borné

EXO :  $f : [a, b] \rightarrow C$  lip  $\Rightarrow$  on peut recouvrir  $\text{Im } f$  par des boules de rayon aussi petit que voulu

EXO :  $f \rightarrow \infty$ ,  $f' \rightarrow 0$ , montrr que  $e^{if(\mathbb{N})}$  dense dans  $S_1$ . Soir  $e^{i\theta} \in U$ . Pour tout  $n$ , il y a un  $x_n$  tq  $f(x_n) = e^{i\theta} + 2\pi n$ , d'où  $|e^{if(\lfloor x_n \rfloor)} - e^{if(x_n)}| \leq |\lfloor x_n \rfloor - x_n| |f'(c_n)| \leq |f'(c_n)| \rightarrow \infty$ .

## 3.3 hopital, th limite dérivée

de l'hopital : c'est un DL! Ne l'écrire que si le DL est moche

énoncé général :  $f$  et  $g \in C^0$  sur  $I$ ,  $D^1$  sur  $I \setminus \{a\}$ ,  $\lim_a \frac{f'}{g'} = l$ , alors  $\frac{f-f(a)}{g-g(a)} \rightarrow l$  (on ne sait pas que  $f$  et  $g$  sont dér en  $a$ )

DEM : on regarde  $\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f - f(a) \\ g(b) - g(a) & g - g(a) \end{vmatrix}$  nulle en  $a$  et  $b$ , donc Rolle donne un zéro pour  $\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f' \\ g(b) - g(a) & g' \end{vmatrix}$ , CQFD.

EG :  $\frac{x^5-7x^2+4x+2}{2x^5-x^3-5x+4}$  en 1 donne  $\frac{5x^4-14x+4}{10x^4-3x^2-5} \rightarrow \frac{-5}{2}$  (évite de faire la division)

COR : faire  $g = \text{Id}$  pour retrouverth FAF et limie dérivée.

théo limitede la dérive = intererfsion de limite, donc non trivial : en notant  $\lim^* : \tau_a \mapsto \lim_a \tau_a$ , on veut

$$\lim_{a \rightarrow a_0} f'(a) = \lim_{a \rightarrow a_0}^* \tau_{a_0}, \text{ ie}$$

$$\lim_{a \rightarrow a_0} \lim_{a \rightarrow a_0}^* \tau_a = \lim_{a \rightarrow a_0}^* \lim_{a \rightarrow a_0} \tau_a.$$

énoncé : soit  $f \in D^1$  sur  $I \setminus \{a\}$ . Si  $f'$  admet une limite en  $a$  (éventuellemnt infine), alors  $f$  dér en  $a$  (au sens généralisé) et  $f'(a) = \lim_a f'$ .

$\Leftarrow$  fausse!  $x^2 \sin \frac{1}{x}$  se dérive en  $o(1) - \cos \frac{1}{x}$  pas de limite, mais TA converge vers 0.

EG : tangente verticale pour  $\sqrt[3]{\cdot}$  et asn.

DICUSSION : ainsi, la fausseté de la réciproque empêche d'écrire  $f'_d(a) = f'(a^+)$ .

## 4 Dérivées successives

DEF de  $C^1$  :

sur un intervalle ( $D^1$  de dérivée continue)

sur un point ( $D^1$  **autour** de ce point et de dérivée continue en ce point)

$C^1$  sur segment  $\Rightarrow$  lip

$D^\infty = C^\infty$ . Notation  $\frac{d^n}{dx^n}$

$f \in D^{a+b}$  ssi  $f^{(a)} \in D^b$ , et alors  $f^{(a+b)} = [f^{(a)}]^{(b)}$ .

$D^0$  = aucune condition,  $C^0$  = continue

$f$   $C^1$ -difféo  $C^n \Rightarrow f^{-1} C^n (-\rightarrow C^n$ -difféo)

formule Leibiz : gén comme multinôme et pour toute forme multilinéaire.

EG :  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathbb{C}(X)$ ,  $x \mapsto x^\alpha$ ,  $x \mapsto \lambda^x$ , exp, ln (exp dér en 0 puis on transporte)

cor :  $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$ .

prop :  $[f^\alpha]' = \alpha f^{\alpha-1} f'$

EG : asn, acs, atn, ach, ash, ath (résolution trinôme, ou bien dérivée constante)

GAFFE AUX BORNES!

$\sqrt{\cdot}$  est  $C^0$  sur  $R^+$ , mais  $C^\infty$  sur  $R^{++}$

asn est  $C^0$  sur  $[-1, 1]$  mais  $C^\infty$  sur  $] -1, 1[$

Rolle :  $f^{(n)}$  s'annule si  $f$  s'annule  $n$  fois

EXO : Rolle multiplicatif

prolongement  $C^k$  : ok si toutes les dérivées ont des limites, ied si les dérivées se prolongent par continuité

praticulier : prolongement  $C^\infty$

$C_{pm}^k$  : il y a une subdivision  $s_i$  tq  $f$  sur  $]s_{i-1}, s_i[$  soit restriction de  $C^k$  sur  $[s_{i-1}, s_i]$ , ied prolongement  $C^k$

## 5 TY TL TI

TY, TL, TI : 2++ info, donc hypothèse 2++ contraignantes!

TY = les  $n$  premières dérivées apparaissent  $\rightarrow C^n$

TL = un  $f^{(n+1)}$  (c) apparaît, donc il faut du  $D^{n+1}$

TI = on intègre du  $f^{(n+1)}$ , donc  $f^{(n+1)} C^0$  raisonnable  $\rightarrow C^{n+1}$

connaître une fonction et ses dérivées en un point, c'est approximer  $f$  au voisinage de ce point (par Taylor).

Interprétation physique : conditions initiales!

TL à l'ordre 1 : c'est FAF

RQ : on a une version plus fine de TY (cf exo)

## 6 fonctions pallie

Un Raccord  $C^\infty$  :  $e^{-\frac{1}{x}}$  et 0 pour  $x \leq 0$  est  $C^\infty$  : mq rec  $\forall n, \exists P, f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ . On en déduit  $f^{(n)}(0^+) = 0$ ; CQFD.

on en déduit un  $C^\infty$  à support borné :  $e^{\frac{1}{x^2-1}}$  (poser  $x = \pm\sqrt{1-h}$ )

Pour avoir un pallier  $C^\infty$ , on intègre ce qui précède (cf gourdon pour autre solution)

EG : pour rendre  $\sin \frac{1}{x} C^\infty$  en 0, on multiplie par  $e^{-\frac{1}{x}}$   $\rightarrow$  mq la  $n$ -ième dérivée est de la forme  $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n}} (P \sin \frac{1}{x} + Q \cos \frac{1}{x})$

## 7 approche numérique

On donne  $f(\varepsilon) = a + b\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\varepsilon^2 + o(\varepsilon)$ .

soit à calculer  $b = f'(0)$ . Le calcul de  $f(\varepsilon) - a$  se fait avec une erreur d'environ  $2\delta a$  où  $\delta$  précision de l'instrument (disons  $10^{-15}$ ), d'où une erreur de  $\tau_0 f(\varepsilon)$  en  $\frac{2\delta a}{\varepsilon}$  qui explose. Or, on a  $b - \tau_0 f \simeq \frac{\varepsilon}{2}$ . Donc l'erreur entre  $b$  et la valeur mesurée pour  $\tau_0 f(\varepsilon)$  est borné par  $\frac{2\delta a}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}$  qui est minimale pour  $\varepsilon = 2\sqrt{\delta ac}$ . Retenir  $\varepsilon$  de l'ordre de  $\sqrt{\delta}$ .

autre idée : prendre la dérivée symétrique  $\frac{\tau_0 f(\varepsilon) - \tau_0 f(-\varepsilon)}{2}$ . Si  $f \in C^3$ , l'erreur est de  $\frac{2\delta a}{\varepsilon} + \varepsilon^2 d$ , minimale pour  $\varepsilon$  de l'ordre de  $\sqrt[3]{\delta}$  et vaut alors  $\delta^{\frac{2}{3}}$ .

Pour la dérivée seconde, on prend  $f^{[2]}$ . Si  $f \in C^4$ , on a une erreur  $\leq \frac{3\delta a}{\varepsilon^2} + 2\varepsilon^2 e$  minimal pour  $\varepsilon \simeq \sqrt[4]{\delta}$  et alors de l'ordre de  $\sqrt{\delta}$ .

## 8 Pour aller plus loin

Toute fonction dérivée est continue sur un ensemble dense. On utilise le théorème suivant (cf. suite fonctions) :

Soit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions continues qui cs. Alors la limite est continue sur un ensemble dense de réels.

Puisque  $f' = \lim_n n[f(\cdot + \frac{1}{n}) - f]$ , on en déduit donc que toute fonction dérivée est continue sur un ensemble dense de réels.

Réciproquement, si  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est limite simple d'app continue et est Darboux, alors il y a un homéo croissant  $\varphi$  tq  $f \circ \varphi$  soit une dérivée. (Source : footote<sup>2</sup>)

Théorème dû à I. Maximoff<sup>3</sup> en 1940, proprement prouvée par D. Preiss<sup>4</sup> en 1979, dont un cas par G. Choquet à la fin de sa thèse<sup>5</sup>.

EXO :  $\cos \frac{1}{\cdot}$  (en 0) est une dérivée, mais pas son carré  $\rightarrow$  amène la....

QUESTION : que vaut l'algèbre  $\mathbb{R}[\Delta']$  engendrée par les dérivées  $\Delta'$  ?

Réponse : ce sont exactement  $B_1$  les fonctions de classe I de Baire (limite simple de fonction continue), prouvée par D. Preiss<sup>6</sup>. Mieux : une telle fonction s'écrit  $f' + g'h'$ , autrement dit  $\mathbb{R}[\Delta'] = \mathbb{R}\Delta' + \mathbb{R}\Delta'\Delta'$ .

Suite sur produit de dérivée<sup>7</sup> : *ON TRANSFORMATIONS OF DERIVATIVES*, A. M. BRUCKNER :

si  $f$  dérivée, alors  $f \circ \varphi$  est une dérivée pour tout homéo  $\varphi$  ssi  $f$  est continu.

la classe des  $f$  dérivée dont carré est aussi dérivée est stable par composition à droite par un homéo bi-lip

Th Rademacher : une fonction lip sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est dérivable presque partout

<sup>2</sup>[http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/126042/MathBohem\\_121-1996-4\\_5.pdf](http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/126042/MathBohem_121-1996-4_5.pdf)

<sup>3</sup>Sur la transformation continue de quelques fonctions en dérivées exactes, Bull. Soc. Phys. Math. Kazan (3) 12 (1940), 57-81

<sup>4</sup>Maximoff's theorem, Real Anal. Exchange 5 (1979/80), 92-104

<sup>5</sup>Application des propriétés descriptives de la fonction contingente à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes, J. Math. Pures Appl. 26 (1947), 115-256

<sup>6</sup>Algebra generated by derivatives, Real Anal. Exchange 8 (1982/83), 208-216.

<sup>7</sup>PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, Volume 48, Number 1, March 1975