Continuité
(version chantier)

Marc SAGE

19 décembre 2005

Table des matières

sur la rigueur : Darboux en 1875 publie un *Mémoire sur la théorie des fonctions discontinues*, cf http ://www.proba.jussieu.fr/

Def intuitive de Bertrand Russell dans *Introduction to mathematical philosophy* :

When a function is what we call "continuous", the rough idea for which we are seeking a precise definition is that *small differences in x shall correspond to small differences in fx, and if we make the differences in x small enough, we can make the differences in fx fall below any assigned amount.* We do not want, if a function is to be continuous, that there shall be sudden jumps, so that, any change , however small, will make a change in fx whchi exceeds some assigned finite amount.

pour retenir les graphes des fonctios usuelles : (erreur pour SIN)

http ://sawb.soup.io/post/121980402/Beautiful-Dance-Moves

exo sans limite : inversion de quantif : si $\forall x, y,\ f(x) = f(y)$ ou $g(x) = g(y)$, alors $\forall x, y,\ f(x) = f(y)$ ou $\forall x, y,\ g(x) = g(y)$.

DEM : supposons f non cst, mettons $f(a) \neq f(b)$. Alors $g(a) = g(b)$. Pour x, on a

$$0 = 0 - 0 = (fx - fa)(gx - ga) - (fx - fb)\underbrace{(gx - gb)}_{gx-ga} = \underbrace{(fb - fa)}_{\neq 0}(gx - ga), \text{ d'où } gx = ga \text{ et } g \text{ cst.}$$

1 Langage topologique des voisinages, limites

définir ***voisinage*** de $a \in R$ et de $\pm\infty$, propriété vraie ***au voisinage de / autour de*** a, ***localement*** (au voisinage de tout point)

un point a est ***intérieur*** à A si $A \in V(a)$, ***adhérent*** s'il est limite de point de A (ie ssi l'intersectino avec tout voisiange est nulle)

(***ouvert*** comme voisiange de ses points, ***fermé*** comme stable par lim ?)

(prendre pour I que des intervalles ?)

(en parlant des limites) Mon prof de maths de première avait expliqué ça sous la forme d'un petit dialogue.

A : « Donne-moi un nombre A, aussi grand que tu veux, et je te montrerai que f(x) est plus grand que A. »

B : « Voici un A > 0. »

A : « Eh bien, si tu prends x compris entre l-e et l+e, avec e=..., alors f(x) est plus grand que A (et je le prouve). »

définir les ***limites*** l'aide de voisinges (pour un point adhérent), puis donner le critère pratique avec un dessin (et le nier !)

donner tout de suite le **critère séquentiel** : $\lim_a f = l$ ssi $\forall a_n \longrightarrow a,\ f(a_n) \longrightarrow l$. Utiliser à gogo pour les démo !

Retrouver la convergence des suites en ∞.

unicité lim !

si lim finie en a, alors bornée au voisinage de a.

analogie des sous-suites : limite selon une partie : $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) := \lim_a f_{|B}$ (si fait sens, ie si a adhrent à B)

si lim en a, alors lim en a selon toute partie.

ceg : $\lim_{\in\mathbb{Q}} \chi_{\mathbb{Q}} = 1$, mais $\lim_{\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \chi_{\mathbb{Q}} = 0$

Mais réciproque ok si la partie est un voisiange de a (intersecté avec A) -> *caractère local des limite* (parallèle avec "les premiers termes d'une suites n'influent pas sur sa convergence)

th recollement : f définie sur $A = A_1 \cup ... \cup A_p$, a adhréente à tous les A_i. *Si f tend vers une même limite en a selon n'importe quel A_i, alors f tend vers cette limite en a*

(faux si réunion infinie)

(parallèle avec th recollement des sous-suites)

eg important (seul utilisé en pratique) ; limite ***à droite/gauche*** (sens de a adhrént à droite gauche ?)
si $a \notin A$, lim en a existe ssi $f(a^+) = f(a^-)$ et vaut cette valeur.
si $a \in A$, cette valeur nécessaire doit valoir $f(a)$.

compoisition des limites : avec les voisinages, c'est que du bonheur. Avec les suites aussi. ! ! ! !.. (snif, j'aimais bien les voisinages)
retrouver lim de $|\cdot|$, $+$, $\times$, $\frac{1}{\cdot}$, thé gendarmes (exemple de $\frac{\lfloor \alpha x \rfloor}{x} \longrightarrow \alpha$), comparaison ($f \leq g \longrightarrow -\infty$, $g \geq f \longrightarrow \infty$)
$\lim f < \lim g \implies f < g$ au voisaage
eg important : $\lim \neq 0 \implies$ *ne s'anneule pas au voisinage.*
lim est un opérateur croissant (mais pas strictement : *les inégalités prennent le large*)

pour fonction croissantes :

$$\begin{aligned} f\left(a^+\right) &= \sup_{\substack{x<A \\ x\in A}} f(x) \text{ et } f\left(a^-\right) = \inf_{\substack{x>a \\ x\in A}} f(x) \\ f\left(a^-\right) &\leq f(a) \leq f\left(a^+\right) \end{aligned}$$

(parallèle avec les suites mono : pas besoin de connaitr la limite)

Critère de cauchy : parallèle avec suites de cauchy.

2 Continuité

2.1 Ponctuelle

f est ***continue en*** $a \in A$ si f admet une limite en a, ***discontinue*** sinon.
Rq : cette lmite vaut nécessairement $f(a)$, donc la contuité équivanut à commuter avec lim.
EG : *soit f continue en 0 tq $f(2x) = f(x)$ pour tout x. Mq f constante.*
DEM Soit a un réel. On a $f\left(\frac{a}{2^n}\right)$ constante à $f(a)$, et tend vers $f(0)$, donc f contante (récicprouqe ok).
écrire avec les voisinages, puis les ε (et savoir le nier), et avec les suites (tout retrouver du coup).
DESSIN, ausis pour la négation

l*es fonctions continues en a forment une algèbre (demo par suites) stable par $|\cdot|$ et inverse si sens. aussi par composition*

2.2 Globale

f ets ***continue*** si continue en chacun de ses points/
La contnuié passe à la restrcition.
lacontinuité est une notion ***ponctuelle*** : *f continue ssi f ponctuellement continue* (c'est la défintion !). C'est par conséquent une notion ***locale*** : *f continue ssi f localement continue.*
th recollement : *si tous les $f_{|A_i \setminus \{a\}}$ ont meme limite $f(a)$, alors f coninue en a* (résultat tjs faux pour nombre infini de partie)
cor (seul cas d'utilsiatino) : contunité ***à droite/gauche***, eg $\lfloor \cdot \rfloor$, CO = CO dte et CO gauche

$C^0(A, \mathbb{R})$ forment une algèbre stable par $|\cdot|$ et inverse (si sens) et composition (si domaines font sens)
eg : $R[X]$, cor $R(X)$.

2.3 Exemples

EG :
constantes, Id, $|\cdot|$.
$\chi_{\mathbb{Q}}$ discontinue en tout point (limite distcinte selon $\mathbb{Q}$ et son complémentaire)
$x \mapsto x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ continue en 0 et discontinue ailleurs
$a \mapsto \lfloor a \rfloor + \sqrt{a - \lfloor a \rfloor}$ continue sur $\mathbb{R}$.
Id sur les rationnels de $[0,1]$, partie fractionnaire de $x - \frac{1}{2}$ sur les irrationnels : jamais continue.
(fonction de Weierstrass) $\frac{p}{q} \mapsto \frac{1}{q}$ si $p \wedge q = 1$, 0 sur ${}^c\mathbb{Q}$. Continue sur ${}^c\mathbb{Q}$, discontinue sur $\mathbb{Q}^*$, continue en 0.
(sur $\mathbb{R}^+$) $2k \mapsto k$, $2k-1 \mapsto \frac{1}{2k+1}$, $\frac{1}{n+1} \mapsto \frac{1}{2n}$, Id ailleurs. Bij, continue en 0 mais f^{-1} pas continue (où ? ? ?)

EXO : *construire f continue stabiliant $R\backslash Q$ et Q^* et envoaynt 0 dans $R\backslash Q$.*

DEM : sans la contionde 0, facile (Id). Plus généralmen, si pente rationnellen entre dex points de Q^2, alors la fonction affine en question stabilise Q et $R\backslash Q$. On se donne donc un suite (a_n, b_n) de points rationnels approchant $(0,x)$ où $x \in R\backslash Q$ et on mets des bouts de droites entre (supposer a_n décroissant strict)

EXO : *Montrer qu'il n'y a pas d'application continue $f : R \longrightarrow R$ telle que* $\begin{cases} f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q} \end{cases}$.

DEM : L'hypothèse de travail implique la condition $f(x) \notin \mathbb{Q}x$ pour tout réel x. Cela s'interprète graphiquement : le graphe de f ne rencontre aucune droite de pente rationnelle. Comme f est continue, ce graphe doit même rester *d'un seul* côté d'une telle droite : il ne lui reste plus beaucoup de place au pauvre...

Pour formaliser ceci, on peut considérer un rationnel $r > |f(1)|$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction $f - r\,\mathrm{Id}$ garde un signe constant que l'on détermine en regardant l'image de 1 : on trouve $f < r\,\mathrm{Id}$. On montrerait de même que $-f < r\,\mathrm{Id}$, d'où $|f| < r\,\mathrm{Id}$ et par continuité $f(0) = \lim_0 f = 0$, ce qui est exclu.

2.4 Prolongement continu

def : f ***se pronge par contuité*** en a si f est la restriction d'une application continue en a.
Th : *c'est le cas ssi f admet une limite finie en a.*
On dit alors que f se prolonge ***continûmement*** en a.
eg : $\frac{\sin x}{x}$ se prolonge en 0, comme $\frac{f - f(a)}{\cdot - a}$ dès que f est dérivable en a.
ceg : $\sin\frac{1}{x}$(pas de limite), $\frac{1}{x}$ (limite *in*finie)

EXO : si f C0 et $f \overset{\pm\infty}{\longrightarrow} \infty$, mq $f \circ \mathrm{ath}$ se plge CO sur $[-1,1]$.

2.5 Densité

PROP *une fonction définie sur une partie dense (eg $\mathbb{Q}$) admet au plus un prolongement continu sur tout* $\mathbb{R}$

EXO : montrer qu'il y autant de fonctions $C^0(I,\mathbb{R})$ que de réels.

DEM : en notant $I' := I \cap \mathbb{Q}$, on a des injections (la première vient en voyant une constante comme une application continue, la deuxième de la densité)

$$\mathbb{R} \simeq I \hookrightarrow C^0(I,\mathbb{R}) \hookrightarrow C^0(I',\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{I'} \simeq \left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}} \simeq \mathbb{R}.$$

3 Théorèmes fondamentuax

3.1 TVI

'Trying to prove this seemingly simple theorem is the best way to understand the difference between mathematics and drawing'

(tiré du Greenberg de topo algebrique, en parlant du théoème sur les courbes de Jordan).

<<

La critique que Bolzano portait aux preuves par Gauss du théorème fondamentale de l'algèbre (qui en fit plusieurs) étaient qu'elles étaient toues basées sur une intuition géométrique. La meilleure de ces preuves, selon Bolzano, avait repoussé l'usage de l'intuition géométrique au seul théorème des valeurs intermédiaires : une fonction continue de [a,b] dans R qui n'a pas le même signe en a et en b soit s'annuler sur un point de l'intervalle.

C'est la principale motivation de Bolzano pour fournir une preuve irréprochable du théorème des valeurs intermédiaires, sans appel à l'intuition géométrique.

>>

Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (p. 14-15)

<<Informellement, on peut interdire à une fonction de sauter en imposant une condition du style : si |x-x'| est très petit alors |f(x)-f(x')| doit aussi être très petit. Cette idée naturelle peut cependant se décliner de différentes façons, comme nous l'avons vu dans l'étude des textes de Cauchy [...].>>

Henri Lombardi, *Épistémologie mathématique* (p. 113)

lemme : *f continue, $f(a)\,f(b) \leq 0$ => f s'annule.*

Cor : **TVI** (ou **th de Cauchy Bolzano**) : $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$

Cor : *image intervalle est intervalle* (les bornes peuvent changer : fonction décroissantes)

CP : si f continue et mono, on a égalité

RQ : En fait, TVI équivalent à Im(invevale)=intevalle. En effet, si $f([a,b])$ intervalle, puisqu'il contient $f(a)$ et $f(b)$, il content $[f(a), f(b)]$.

EXO : *quelles sont les applications continues $f : R \longrightarrow R$ telles que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$?*

DEM : rapelle exo précédent, mais argument ne tient plus.On s'en sort par un argument de dénombrabilité. En effet, d'une part l'image de $\mathbb{Q}$ par une application quelconque est toujours au plus dénombrable, d'autre part l'inclusion dont nous disposons ici permet d'affirmer que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est aussi au plus dénombrable. L'image de f est donc au plus dénombrable, donc ne saurait contenir aucun intervalle infini. Puisque f est continue, elle doit (par le théorème des valeurs intermédiaires) être constante.

Attnetion : si f vérifie TVI $[f(a), f(b)] \subset f([a,b])$, est-ce que f continue ?

NON : prendre $\sin \frac{1}{x}$ prolongée par 0 en 0.

Autre idée : on montrera (cf. dérivabilité) que la dérivée d'une fonction dérivable satisfait le TVI. Il suffit de prendre une dérivée non continue : $x \sin \frac{1}{x}$.

EXO : *soit f continue sur $]a,b]$ (définie en a). Mq f vérifie le TVI sur $[a,b]$ ssi il ya une suite (a_n)cva sstt décroissante tq $f(a_n)$cv$f(a)$.*

DEM=> : posons $u_n = a + \frac{1}{n}$. SI $f(u_n) = f(a)$, on pose $a_n = u_n$. Sinon, $[f(a), f(u_n)]$ intervalle infini donc contient un x tq $0 < |f(a) - x| < \frac{1}{n}$. Alors x est dans $f([a,u_n])$, donc un $f(a_n)$ (avec$a_n \neq a$ sinon $x = f(a_n) = f(a)$). Quitte à extraire, OPS a_n sttt décroisant.

DEm<= : par contnuité sur $]a,b]$; il suffit de montrer que $f([a,x])$ est un intervalle $\forall x \geq a$. Soit un tel x. Il y a un rang n audelà suquel $a_n < x$. Alors

$$[a,x] = \{a\} \cup \bigcup_{n>N} [a_n, a_{n-1}] \cup [a_N, x]$$

d'où idem en passant à l'image directe. Tous les $[f(a_n), f(a_{n-1})]$ sont des intervalles, $[f(a_N), f(x)]$ aussi, tous ont un point en commun avec un autre, donc leur runion est intevalle, et $f(a)$ est adhérent à cette intervalle par hypohtèse, donc $f([a,x])$ intervalle.

3.2 continuité, monotonie, injectivité

PROP *f monotone sur I admet limte en $a^{\pm}$ pour tout $a \in \mathring{I}$, et est continue ssi même lim droite/gauche en tout point.*

Aux évntuelles bornes, on a continuité ssi les valeurs coincident avec les limites unilatères correspondantes.

COR : *f homéo croissant sur $]a, b[$ => $\operatorname{Im} f =]f(a^+), f(b^-)[$ (et on peut rajouter les bornes)*

PROP : *f mono est continue ssi $\operatorname{Im} f$ intervalle.*

PROP soit $f : I \longrightarrow J$ intervalles. Alors

bij + (stt) mono => continu

continue+ stt mono => bij et recirproque continue

contiue + inj => stt mono

bij + continue => récip continue

Si l'un des condition ci-dessus est vérifiée, on dit que f est ***bicontinue :*** continue bijecteve d'inverse continue.

On parle aussi d'***homéomorphismes*** : étire les intervalles comme le chewing-gum de "oméomo". Id, stable par $\circ$, inverse.

autre présentation (exo SG, comparer avec cours Miquel)

lemme : *f sttt mono ssi conserve ordre ou ordre inverse sur tout triplet.*

dem. => clair. Supposons f ,conserve ordre ou anti ordre sur tout triplet. Soient $a < b$ tq $f(a) < f(b)$ (quitteà regarder $-f$). Alors f respecte ordre sur $\{a, b\}$, donc sur $\{a, b, x\}$, donc sur $\{a, x\}$, donc sur sur $\{a, x, y\}$ donc sur $\{x, y\}$.

deux des proposition suivantes impliqent la troiise : continue, sttt momo, inj + $\operatorname{Im} f$ intervalle

• si continue sttt mono, alors $\operatorname{Im} f$ intervalle par TVI, et f injec car stt mono

• si stt mono et $\operatorname{Im} f$ intervalle, soit $a \in I$. f est mono, donc $f(a^{\pm})$ existent. Alors $[f(a^-), f(a^+)]$ intervalle de $\operatorname{Im} f$, donc $f(a^{\pm})$ égaux

• si continue, injective, supp abs f non sttt mono. f ne respecte pas l'odre sur un triplet $a < b < c$. Quitte à regarder $-f$, supp $f(a) < f(b)$. DEux places pour $f(c)$: ou bien $f(c) < f(a) < f(b)$, mais alors (TVI) f attient $f(a)$ sur $]b, c[$, absurde par inj ; ou bien $f(a) < f(c) < f(b)$, mais alors $f(c)$ attient sur $]a, b[$.

3.3 imge continue d'un segment

TH : *image continue d'un segment est un segment.*

COR : *f continue sur segment est bornée et attient ses bornes :*

$$f([a, b]) = [\min f, \max f]$$

(**théoème des bornes** ou **théorèmes de Weierstrass**)

Algo dichotomie -> juste prix en $\lg_2$.

4 Divers

max (global) en a si $f \leq f(a)$, strict si $<$ en dehors de a.

extrema global, puis ***extrema local***.

4.1 Continuité uniforme / lipschitz / holder

Parler sans le dire du module de continuité : ok, il y a un δ tq, mais on aimerait bien le prendre le plus grand possible –> sup

unifoméméent continue
UC : c'est la continuité intuitive : dessiner arc croissante concave avec deux rectangles $\delta \times \varepsilon$
critère séquentiel, d'où contre exemle $x \mapsto \frac{1}{x}$ ou $\sin x^2$
UC : coincé dans dans cone écarté au sommet de hauteur epsilon et de pente $\frac{\varepsilon}{\delta}$ –> affinement bornée

EXO : *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uniformément continue. Montrer qu'on peut trouver deux réels* α *et* β *tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leq \alpha |x| + \beta.$$

TH HEINE

Critèère séquentiel : f *uc ssi image de toute suite de cauchy est de cuahcy.*
COR : *tout* f *uc sur* $]a, b[$ *se prolonge contimument sur* $[a, b]$
(souvenir cauchy : parler de limite sans la connaitre –> oa idem avec app uc)
DEM : il suffit de le faire pour a. La suite $f\left(a + \frac{1}{n}\right)$ est de Cauhcy, donc cv vers un l. Mq définir $f(a) = l$ est ok.. Soit $a_n \longrightarrow a$. Alors la suite shuffle $a_n, a + \frac{1}{n}$ cv vers 1, donc est de cuachy, donc son image cv. Comme $f\left(a + \frac{1}{n}\right)$ en est une ss, la limite est l. Comme $f(a_n)$ en est une autre ss, $f(a_n) \longrightarrow l$, CQFD.

lipschitzienne
histoire : thèse de Lipschitz éétudiait convergences des séries de Fourier, pourlesuqlle l'hypohtèse "les taux d'accroissmnt sont unifoméméent bornés" est naturelle, d'où la condition qui porte son nom
lip = k-lip pour un k
rq : 0-lip = constant
lip : coincé dans dans cone de pente $\frac{\varepsilon}{\delta}$. Si C^1, lip <=> der bornée

LIP => UC => C0
(<= fausses : $x \mapsto x^2$ et $\sqrt{x}$)

contractante (!! CEG $t + \frac{1}{1+|t|}$!!)

holderienne.
lip si $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ bornée. Quid si on met une puissance $\alpha \geq 0$ au denom ?
Si $\alpha = 0$, alors bornée.
Si $\alpha = 1$, alors lip.
Si $\alpha > 1$, alors τf majoré par un truc qui tend vers 0, donc f dérivale de dérivée nulle, donc f constante –> pas d'intéret.
DEF : *soit* $\alpha > 0$ réel non entier. f *ets* C^α *si* f *est* $C^{\lfloor \alpha \rfloor}$ *et si* $f^{(\lfloor \alpha \rfloor)}$ *est* $\alpha - \lfloor \alpha \rfloor$ *holder.*
EXO : $t \mapsto t^\alpha$ est β-holde ssi $\beta = \alpha$.
EXO : $t \mapsto t \ln t$ est α-holder $\forall \alpha < 1$ mais n'est pas lip.

rq culturelle : somme de convexes est de classe $\frac{20}{3}$!

4.2 Fontions périodiques

Définitino d'***une période*** (équivalent à passer modulo T, donc à définir une foction sur une cercle), *les périodes forment un groupe*, puis def de ***la période*** (comme inf des péridodes > 1). Sens pour une fonction *continue non constante* (générateur du groupe *discret* des périodes)
PROP *Une application continue périodique est bornée et atteint ses bornes, et est uniformément continue.*
EG de fonction de sg des période dense : $\chi_{\mathbb{Q}}$ (sg des pérides vaut $\mathbb{Q}$)

4.3 Continuité par morceaux

Une ***subdvision*** d'un segment $[a,b]$ est une partie finie contenant a et b. On la note souvent σ (comme **s**ubdivisio) et on l'écrit : $\sigma = (s = s_0 < s_1 < ... < s_{n-1} < s_n = b)$.

On ordonne les subdivions par $\sigma \supset \tau$, et on dit alors que σ est plus ***fine*** que τ.

Le ***pas*** ou le ***module*** de la subdivision est $|\sigma| = \max_{i=1,...,n} |s_i - s_{i-1}|$. C'est une fonction décroissante.

DEF *f ets TRUC **par morceaux** si il y a un σ tq $f_{|]s_{i-1},s_i[}$ se prolonge sur $[s_{i-1}, s_i]$ en une fonction TRUC.*

Une telle subdivision σ est dite ***adaptée*** ou ***comptabitle*** à f (et toute subdiv plus fine que σ est toujours ***adaptée***).

EG : ***en escalier*** (ou ***en gradins***) = constante pm, affine pm, polynomial pm, C0 pm, dérivable pm, C^n_{pm}...

EG COpm : dessin avec trois disconinutés ; EG C0 C1pm

CEG : $\frac{1}{x}$ prolongé par 0 en 0.

CEG : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ plgé par 42 en ± 1.

C^n_{pm} sous-algèbre de C^n

5 Exemples usuels : trigo & polynômes

5.1 exp, ln, puissances, polynômes

$|e^x - 1| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{|x|^n}{n!} \leq x (e-1)$ continue en 0, puis on transporte car morphisme. Croissance : on transporte $e^x \geq 1$.

$e^x \geq 1 + x$, donc limite infinie en ∞, puis $\lim_{-\infty} = \frac{1}{\lim_\infty} = 0$.

DFINTION DU LN

prop immédiate : homéo croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}$.

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln (a_1 ... a_n) = \ln a_1 + ... + \ln a_n$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln \frac{1}{a} = - \ln a$

$\ln a^k = k \ln a$ pour $k \in \mathbb{Z}$

$\lg_a = \frac{1}{\ln a} \ln$ (parralèl avec puissance a), $\lg(\cdot) := \lg_{10}$: nombre de chiffres en base $b = \lfloor \lg_b \rfloor + 1$.

On prolonge λ^z pour $\lambda > 0$ et $z \in \mathbb{C}$. Restreint à $\mathbb{R}$, on obtient constammen 1 si $\lambda = 1$, un homéo de $\mathbb{R}$ sur $]0, \infty[$ qui croit si $\lambda > 1$ et décroit si $\lambda > 1$. Noter $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

à $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto x^\alpha$ est un enmorphisme du groupe multiplicatif R^{++}

Si $\alpha > 0$, se prolonge continûmenet en 0 par $0^\alpha = 0$ −> homéo croissant de R^+ sur R^+

Si $\alpha < 0$, homéo décroissant de R^{++} sur R^{++}

def : un ***fonction polynomiale*** est une combinason linéaire de fonctions puissances entières naturelles, ie un $f : x \mapsto \sum a_n x^n$.

prop : $(x \mapsto \sum a_n x^n) = (x \mapsto \sum b_n x^n)$ ssi $a = b$

(dem : linéaire donc ops $a = 0$, puis si $a \neq 0$ on regarde la valuation, on divise par x, puis$x = 0$; ou encore on regarde le degré, on diise par x, puis on fait $x \to \infty$)

croissance comparée :

$\frac{x^\alpha}{\lambda^x} \longrightarrow 0$ pour $\alpha > 0$ et $\lambda > 1$

$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \longrightarrow 0$ pour $\alpha, \beta > 0$

$x^\alpha |\ln x|^\beta \longrightarrow 0$ en 0

DEM : pour $N > \alpha$, $\lambda^x \geq \frac{x^N}{N!} (\ln \lambda)^N$, d'où $\frac{x^\alpha}{\lambda^x} \leq \frac{N!}{(\ln \lambda)^N} x^{\alpha - N} \longrightarrow 0$. Puis on compose...

5.2 Fonctions trigo circulaires, hyperboliques, réciproques

définir les fonctions trigo circu hyper direc réciproques
$|\cos x - \cos a| \leq |x-a|(e-1)$ pour $|x-a|<1$, donc continu, idem pour sin.

6 qq équation fonctionnelles continues

6.1 morphismes continus pour + & ×

Quels sont les morphismes réels from un sg additif de $\mathbb{R}$?

Fondamental : enmorphisme additifs de $\mathbb{Q}$ sont les homothétie. Ainsi, les endo addtifs continus de $\mathbb{R}$sont les homothéties.

Autre idée : montrer la dérivabilité par un argument d'inégration puis résoudre des équa diff. Intérêt : on peut intégrer à valeurs dans $\mathbb{C}$, là où nos méthodes réelles (les carrés sont positifs) lorque la loi d'arrivée est $\times$ ne foncitonnent plus.

EG $\quad + \longrightarrow +$ Intégrer en $b = 0...,1$ donne $\int_a^{a+1} f = f(a) + \int_0^1 f$, d'où f C^1 et par réc C^∞. Deriver en $a \Rightarrow f'(a) = f'(a+b)$, d'où f' cst et f linéaire ($f(0)=0$ facile)

Récapitulatif

source / but	$\mathbb{C}+$	$\mathbb{C}\times$	
$\mathbb{R}+$	$\lambda\,\mathrm{Id}$	0 ou $e^{\lambda\cdot}$	où λ complexe
$\mathbb{R}_+^*\times$	$\lambda \ln$	0 ou Id^λ	(on pourrait inclure
$\mathbb{R}^*\times$	$\lambda \ln|\cdot|$	0 ou $|\cdot|^\lambda$	$\lambda = -\infty$)
$\mathbb{R}\times$	0	0 ou $|\cdot|^{\lambda\geq 0}$	

On utilise ce qui précéde, afin d'obtenir le tablea suivant :

source / but	$\mathbb{C}+$	$\mathbb{C}\times$		
$\mathbb{C}+$	$\lambda\,\mathrm{Re} + \mu\,\mathrm{Im}$	0 ou $e^{\lambda\,\mathrm{Re} + \mu\,\mathrm{Im}}$	où	λ, μ complexes
$\mathbb{C}^*\times$	$\lambda \ln|\cdot|$	0 ou $|\cdot|^\lambda\,\mathrm{Id}^k$		k entier
$\mathbb{C}\times$	0	0 ou $|\cdot|^{\lambda\geq 0}\,\mathrm{Id}^{k\geq 0}$		

6.2 Equations fonctionnelles continues pour les fonctions trigo

1. **(**cos **et** sin **par les formules d'addition)** : *continues bornées de $\mathbb{R}$ dans$\mathbb{R}$ tq*

$$\begin{array}{l} f(a+b) = f(a)f(b) - g(a)g(b) \\ g(a+b) = g(a)f(b) + f(a)g(b) \end{array} \ ?$$

   REP $\quad \binom{f}{g} = \binom{e^{\lambda\cdot}\cos(\omega\cdot)}{e^{\lambda\cdot}\sin(\omega\cdot)}$, le borné impose $\lambda = 0$

2. **(**ch **et** sh **par les formules d'addition)** : *continues de $\mathbb{R}$ dans$\mathbb{R}$ tq*

$$\begin{array}{l} f(a+b) = f(a)f(b) + g(a)g(b) \\ g(a+b) = g(a)f(b) + f(a)g(b) \end{array} \ ?$$

   REP $\quad \binom{f}{g} = \binom{e^{\lambda\cdot}\,\mathrm{ch}(\omega\cdot)}{e^{\lambda\cdot}\,\mathrm{sh}(\omega\cdot)}$

3. **(**th **par formule addition)** : *trouver les cotinues tq*

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}\,?$$

REP $\quad f=\operatorname{th}(\omega\cdot)$ ou $f=\pm1$

4. **(**tan **par formule addition)** : *trouver les cotinues tq*

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1-f(a)f(b)}\,?$$

REP $\quad f=\tan(\omega\cdot)$ ou $f=\pm i$

6.3 doubles & carrés et dérivabilité en 0

On regarde à présent juste les formues de duplication / carré.

EG : une fonction f tq $f(2a)=F(f(a),a)$ (disons définie sur une partie stable par double/moitité) est la donnée de sa restriction à la couronne de module$[1,2]$. EG si $F(x,y)=2x$ itérer l'homothétie de centre l'orgine et de rapport 2 ou $\frac{1}{2}$). Il y en a beuacoup ! Même avec la continuité (qui équivaudra à celle de cette restriction ainsi qu'à l'égalité $f(|a|=2)=2f\left(\frac{a}{2}\right)$, EG on fait ce qu'on veut de continu et raccordable sur $[1,2]$ ou sur une uniion finie de demi droites). En revanche, la *dérivablité en* 0 va éliminer sréisuement les candidats

On note $\mathbb{P}^{1/2}$ (rzsp. $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$) une partie de $\mathbb{C}$ contenant 0 (resp 1) et stable par moitié (resp racine principale). EG :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{1/2}&=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}^+,\left\{\frac{1}{2^n}\right\},...\\ \mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}&=\mathbb{R},]0,1],[1,\infty[,\{\operatorname{Re}>0\},\{\operatorname{Im}\geq0\}...\end{aligned}$$

(observer que les $\mathbb{P}^{1/2}$ et les $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$ sont échangés par les applicatios "(pré)image par exp", mais pas de manière bij car exp pas inj)

Rq : un $\mathbb{P}^{1/2}$ (resp $\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$) rcontient toujours une suite tendant vers 0 (resp. 1) (itérer les moitiés/racine d'un point deds).

On va obtenir le tableau suivant pour les fonction dérivables en

source/but	$\mathbb{C},+$	$\mathbb{C}^*,\times$	
$\mathbb{P}^{1/2}$ (der en 0)	$\lambda\,\mathrm{Id}$	$e^{\lambda\cdot}$	
$\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}$ (der en 1)	$\lambda\,\mathrm{Ln}$	$e^{\lambda\,\mathrm{Ln}}$	(restrction : $a,a^2\in\mathbb{P}^{\sqrt{\cdot}}\implies\operatorname{Re}a>0$
$\mathbb{R}^*$ (der en 1)	$\lambda\ln\lvert\cdot\rvert$	$\lvert\cdot\rvert^{\lambda}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ $\pm_\lambda\lvert\cdot\rvert^{\lambda}$ sur $\mathbb{R}_-^*$	

rq : rajouter 0 ou pas au début ne change rien : si apparait l'éqiation fonctielle donne $f(0)=2f(0)$ d'où $f(0)=0$, et cela n' aucune inflcuence sur les autres complexes

rq : on a toujours les solutions additives $\lambda\operatorname{Re}+\mu\operatorname{Im}$ et les multiplicatives $|a|^{\lambda}a^k$; mais d'une part $\mathbb{C}$dériavalbe en 1ssi $\mu=i\lambda$ et $k=\lambda$, d'autre part les mltilplicatifs sur $\mathbb{R}^*$ dvienennt $|a|^{\lambda}$ ou $|a|^{\lambda}a$ (cas particuliter où $\pm_\lambda$ cst)

RQ : $\ln|\cdot|$ satisfiat l'équation fontionnellr, est différentiable en 1 mais qui n'est pas dérivable au sens complexe car $\ln|1+z|=\operatorname{Re}z+o(z)$ où l'application tangente n'est pas une $\mathbb{C}$-homohétie (sur $\mathbb{R}$ elle est dérivable mais alors le module est jsute un signe)

6.4 Caractérisation des fonctions trigo usuelles par formules duplication + dérivabiltié en 0

1. ($\sin$ **ou** sh **par duplication et dérivabilité en** 0) *trouver les* f *dérivables en* 0 sur un $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot) = \pm 2f\sqrt{\pm(1-f^2)}$$

REP si $f(0)^2 \neq \frac{3}{4}$, alors autour de 0 on a $f = \operatorname{sh}(\omega\cdot)$ pour un certain complexe ω.
Sinon, ? ? ? ? (peut-être faire système dynamiaque comme pour les cosinus)

2. ($\sin$ **ou** sh **par duplication et dérivabilité en** 0) *trouver les* f *dérivables en* 0 sur un $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot) = 2f\cos \qquad \text{ou } = 2f\operatorname{ch}$$

REP $f = \sin$ ou sh

3. (th **par duplication et dérivabilité en** 0) *Trouver les* f *der en* 0 *défine sur un* $\mathbb{P}^{1/2}$ *tq*

$$\left(1+f^2\right) f(2\cdot) = 2f.$$

REP $f = \operatorname{th}(\omega\cdot)$ ou $f = \pm 1$ pour un $\omega \in \mathbb{C}$

4. ($\tan$ **par duplication et dérivabilité en** 0) *quelle sont les* f *der en* 0 *définie sur* un $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot) \times \left(1-f^2\right) = 2f\,?$$

REP $f = \tan(\omega\cdot)$ ou $f = \pm i$ pour un $\omega \in \mathbb{C}$

5. ($\cos$ **ou** ch **par duplication et** DL_2 **en** 0) *trouver les* f *réelles admettant un* $DL_2(0)$ *sur un* $\mathbb{P}^{1/2}$ tq

$$f(2\cdot) = 2f^2 - 1.$$

Que se passe-t-il si on supose juste $DL_1(0)$ *?*
REP $\cos$, ch, 1, $-\frac{1}{2}$. Si seulement DL_1,alors tout graphe dupliqué est solution.
EG On a aussi les superpos des deux (eg à l'aide d'une parittionde $\mathbb{R}$ en deux parties stables par double.moitié, eg $f = \chi_{\mathbb{Q}}\cos + \chi_{^c\mathbb{Q}}\operatorname{ch}$).
Mieux, on partionne $\mathbb{Q}$ selon la valuation 3-adique (inchange par double/moitité), d'où unefamilel dénombrablbe de $\operatorname{ch}, 1, \cos$ (le $-\frac{1}{2}$pose pb de continuité) Le DL_2 impose un seul élément de la famille.

6. ($\cos$ **et** $\sin$ **par les formules de duplication**) *trouver les* f, g *der en* 0 *bornés tq*

$$\begin{array}{c} f(2a) = f(a)^2 - g(a)^2 \\ g(2a) = 2f(a)\,g(a) \end{array} \;? \quad \text{Variante2} \; \begin{array}{c} f(2a) = 1 - 2g(a)^2 \\ g(2a) = 2f(a)\,g(a) \end{array} \; ?????\quad \text{Variante3} \; \begin{array}{c} f(2a) = 2f(a)^2 - 1 \\ g(2a) = 2f(a)\,g(a) \end{array}$$

REP1 $\binom{f}{g} = \binom{e^{\lambda\cdot}\cos(\omega\cdot)}{e^{\lambda\cdot}\sin(\omega\cdot)}$, le borné imposse $\lambda = 0$.

REP2 ? ? ? ? ?
REP3 En supposant de plus f DL_2, on trouve $\binom{f}{g} = \binom{\cos(\omega\cdot)}{\sin(\omega\cdot)}$ ou $\binom{\operatorname{ch}(\omega\cdot)}{\operatorname{sh}(\omega\cdot)}$

7. (ch **et** sh **par les formules de duplication**) : *fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans*$\mathbb{R}$ *der en* 0 *tq*

$$\begin{array}{c} f(2a) = f(a)^2 + g(a)^2 \\ g(2a) = 2g(a)\,f(a) \end{array}$$? Variantes ? ? ? ? ? déjà couveres par variantes ci-desssus ? ?

REP $\binom{f}{g} = \binom{e^{\lambda\cdot}\operatorname{ch}(\omega\cdot)}{e^{\lambda\cdot}\operatorname{sh}(\omega\cdot)}$

8. (cos **et** sin **par les formules des carrés)** *trouver les f admettant un $DL_2(0)$* et g *tq*

$$\begin{array}{l} f^2(a) = \frac{1+f(2a)}{2} \\ g^2(a) = \frac{1-f(2a)}{2} \end{array}$$

REP $\binom{f}{g} = \binom{\cos(\omega\cdot)}{\pm\sin(\omega\cdot)}$ (signe indéterminé)

9. (ch **et** sh **par les formules des carrés)** : *trouver les f admettant un $DL_2(0)$* et g *tq*

$$\begin{array}{l} f^2(a) = \frac{f(2a)+1}{2} \\ g^2(a) = \frac{f(2a)-1}{2} \end{array}$$

REP $\binom{f}{g} = \binom{\mathrm{ch}(\omega\cdot)}{\pm\,\mathrm{sh}(\omega\cdot)}$ (signe indéterminé)

10. (sin **et** sh **par les formules duplication avec dérivées)** *trouver les f dérivables tq ? ? ? ?*

$$f(2\cdot) = 2ff'$$

11. (cos **et** ch **par les formules duplication avec dérivées)** *trouver les f dérivables tq ? ? ? ?*

$$f(2\cdot) = f^2 \pm f'^2$$

12. (cos **et** ch **par formule d'addition)** *continue tq*

$$f(a+b) + f(a-b) = 2f(a)f(b) \text{ ?}$$

REP 0 ou $\mathrm{ch}(\omega\cdot)$ pour $\omega \in \mathbb{C}$

13. (sin **par formule d'addition & dérivée)** *continue bornée tq*

$$f(a+b) = f(a)f'(b) + f'(a)f(b) \text{ ?}$$

REP $f = 0$ ou $f = \frac{\sin(\omega\cdot)}{\omega}$

14. (cos **par formule d'addition & dérivée)** *continue bornée tq*

$$f(a+b) = f(a)f(b) - f'(a)f'(b) \text{ ?}$$

REP $f = 0, 1, \cos$

15. (tan **par ED ordre** 1) *trouver les f dérivable tq* $f' = f^2 + 1$ et $f(0) = 0$.
REP $f = \tan$

16. (tan **par ED ordre** 2) *trouver les f dérivable tq* $\frac{f''}{2} = f^3 + f$ *et* $(f, f')(0) = (0, 1)$
REP $f = \tan$

17. (th **par ED ordre** 2) *trouver les f dérivable tq* $\frac{f''}{2} = f^3 - f$ *et* $(f, f')(0) = (0, 1)$

REP $f = \mathrm{th}$

18. (cos **et** sin **par conservation énergie**) *trouver les f deux fois dérivable (autrse solutions si juste dérivable ?) tq*
$$f^2 + f'^2 = cste.$$

REP $f = C\cos(\cdot - \varphi)$. Si juste D^1, on prend sur un intervalle un $C\cos(\cdot - \varphi)$ entre deux valeurs extrèmes ± 1 , on en prend d'autres, puis on relie les valeurs etrmès par des dorites horizontales $f = \pm 1$ (la liaison est C^1 mais pas D^2).

! ! ! Toutes ces equa fonction peuvent avoir d'autres solution sans hyhtèse d econtinuité. ! ! ! !
On part de $\varphi : R \longrightarrow R$ additive non linéaire (eg : projecteur sur $\mathbb{Q}$ dans le $\mathbb{Q}$eev $\mathbb{R}$), on forme exp := exp $\circ\varphi$ et ln := $\varphi \circ$ ln, puis ch := $\frac{\exp+\exp(-\cdot)}{2}$ etc.... qui vérifient tout ce qu'on veut (sansêtre les bonnes fonctions)
RQ culturelle : on peut avec ZF et AC_dep exlcure cela, au sens où il y a des moèdle de ZF+ACD où toute forme Qlinrée sur R est une homothéi.

Eq Boltzmann physicien cours MALET
très bons exemples...
(isootrpopie + limite null en l'infini)

? *Involutions contines de $\mathbb{R}$ (donc inj, donc mono, donc homéo) (stable par conjugation) ?*
Quitte à conuguer par translation par $f(0)$, OPS $f(0) = 0$. Alors ou bien f décroît sur $\mathbb{R}^-$ (puis symétrique sur $\mathbb{R}^+$ par rapport à première bissectrice) ou bien $f = \mathrm{Id}$.
Involution de $\mathbb{R}^{++}$: idem (pas besoin de conjuguer)

7 Sytèmes dynamiques

On étudie $u_{n+1} = f(u_n)$ où f stabilise un intervalle.
DESSIN ESCALIER ! ! !

f croissante => u_n mono
I borné => u_n bornée
f décroissate => u_{2n} et u_{2n+1} mono
$f \geq \mathrm{Id}$ => u croit
$f \leq \mathrm{Id}$ => u décroit

TH : $u_n \longrightarrow l$ où f continue => $f(l) = l$
Eg : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^\alpha}$ (avec $u_0 > 0$), mono, pas cv sinon point fixe $l = l + \frac{1}{l^\alpha}$.

Rq : si $I = [a, b]$, $f - \mathrm{Id}$ vérifie TVI, donc s'annule, d'où un point fixe (DESSIN ! !)
Peut-on généraliser ?

th point fixe :
*Une application contractante a au moins un point fixe. S'il est unique, alors $f^{\circ n}(a_0)$ converge vers ce point fixe en k^n (si f est k-lipschitzienne) –> point fixe **stable** ou **attractif**.*
Eg : $f(a) = a$ et $|f'(a)| < 1$ => point attractif.
CFchaptitre dérivation

Th point fixe bis :
même conclusion si $I = [a, b]$ avec $|f(b) - f(a)| < |b - a|$
FAUX si pas segemnt : $x + \frac{1}{x+1}$ sur $\mathbb{R}^+$ et 1 sur $\mathbb{R}^-$.
Eg : $u_{n+1} = 1 - u_n^2$ (sur $[0, 1]$) : $u_{2n} \longrightarrow 0$ et $u_{2n+1} \longrightarrow 1$ points fixes ***instables*** ou ***répulsifs***

recherche de zéros (–> cf cours francinou)
dichotomie en $O\left(\frac{1}{2^n}\right)$
Lagrange : sécantes, assez stupide erruer en $\frac{l(S)^2}{8} \frac{\max f''}{\min f'}$
Newton : vraiment bien, cv en K^{2^n} où $|K| < 1$
transformatio du pb en point fixe (Newton est un exemple)

8 l'infini n'est qu'une borne comme une autre

homéo th, fonction "continue" en $\pm\infty$, etc... Idéal pour ramener à du fini.
EG : fonction continue admettant limite finie en $\pm\infty$ est bornée.

9 Diversion : Critère séquentiel et AC

rappel : on a $(\forall x, P(x) \iff Q(x)) \implies ([\forall x, P(x)] \iff [\forall x, Q(x)])$. L'implication est strice.

Fixons $f : I \longrightarrow R$. Pour montrer

$$\begin{array}{rl} \forall a \in & I, \\ & (\forall \varepsilon, \exists \delta, |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \\ \iff & (\forall a_n \longrightarrow a,\ f(a_n) \longrightarrow f(a)) \end{array}$$

on a besoin de $\mathrm{AC}_{\text{dén}}$ pour la réciproque. (démo)
Mais pour montrer

$$\begin{array}{rl} & (\forall a \in I, \forall \varepsilon, \exists \delta, |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon) \\ \iff & (\forall a \in I, \forall a_n \longrightarrow a,\ f(a_n) \longrightarrow f(a)), \end{array}$$

pas besoin !
Sens direct comme ci-dessus (contraposée). Pour la réciproque, on utilise juste, à a_0 fixé,

$$\forall a \in V(a_0), (\forall r_n \in \mathbb{Q} \longrightarrow a,\ f(r_n) \longrightarrow f(a)).$$

On commence par montrer

$$\forall a \in V(a_0), \forall \varepsilon, \exists \delta, \forall r \in Q, \left(|r-a| < \delta \implies |f(r) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}.\right)$$

Raisonnons par l'absurde en prenant un tel a : $\exists \varepsilon_0, \forall \delta, \exists r \in Q, \begin{array}{c} |r-a| < \frac{\delta}{2} \\ |f(r) - f(a)| > \frac{\varepsilon_0}{2} \end{array}$. Prendre un tel r minimal pour $\delta = \frac{1}{n}$ (pour l'ordre hérité de N) permet d'obtenir une suite $(r_n) \longrightarrow a$, et l'hypothèse est contredite.

Raisonnons alors par l'absrude : $\exists \varepsilon_0, \forall \delta, \exists x, \begin{array}{c} |x-a_0| < \frac{\delta}{2} \\ |f(x) - f(a_0)| > \frac{\varepsilon_0}{2} \end{array}$. Pour ce ε_0, et pour $a = a_0$, on a un δ_0 tel que

$$\forall r \in Q, \left(|r-a_0| < \delta_0 \implies |f(r) - f(a_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}\right).$$

Pour ce δ_0, il y a un x_0 tel que $\begin{array}{c} |x_0-a_0| < \frac{\delta_0}{2} \\ |f(x_0) - f(a_0)| > \varepsilon_0 \end{array}$. Or, pour $|r-x_0| < \frac{\delta_0}{2}$, on obtient d'une part, $|r-a_0| < \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2}$, d'où $|f(r) - f(a_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Mais on sait par ailleurs que $|f(r) - (x_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, d'où $|f(a_0) - f(x_0)| < \varepsilon_0$, contradiction.

La morale c'est que si on a la continuité séquentielle en tout point, les suites de rationnels suffisent, et alors on n'a pas vraiment besoin de fonction de choix. Il y a peut-être aussi une façon intelligente de dire ça avec des images d'ouverts qui soient forcément quelque chose de sympathique, mais je ne sais pas bien : je n'ai jamais compris le sens profond de ce résultat.

RQ (cf JECH, the axiom of choice) : il y a un modèle de ZF (dans lequel AC est faux) dans lequel on peut trouver une fonction de **R** dans **R** et un réel a tq f seq CO en a mais pas CO en a

10 Culture

10.1 Les ensembles de points de continuité sont les intersections dénombrables d'ouverts

L'nesmbles des poits d econtinuité a l'air quelconque, mais il est quqnad même d'un certain type : la propsition suivante montre que c'est une intersection dénombrable d'ouverts (surtout ne pas retenir la tête de ces ouverts !), et l'on peut montrer réciproquement que toute intersection dénomrable d'ouverts est l'ensemble des points de ccnotnutié d'une application réelle (cf. chapitre sur les séries).

On peut en déduire, modulo un argument simple de théorie de Baire (cf. chap...) qu'il n'y pas de fcontion continue sur $\mathbb{Q}$ exactement.

PROP (culture)
Soit f de I dans $\mathbb{R}$. L'ensmble des points de continuité est l'intersection des

$$\left\{a \in I \ ; \ \exists \delta > 0, \left\{ \begin{array}{l} |x-a| < \delta \\ |y-a| < \delta \end{array} \right. \implies |f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} \right\}$$

Démo
Noton Ω_n la grosse bestiole ci-dessus. Le résultat s'intuite bien en faisant un dessin pour comprendre qui sont les Ω_n.

Soit a un point de continuité de f et n un entier. Par définition de la continuité, on a

$$\exists \delta > 0, |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \frac{1}{2n},$$

d'où les implications

$$\left\{ \begin{array}{l} |x-a| < \delta \\ |y-a| < \delta \end{array} \right. \implies |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}.$$

Ceci montre bien que $a \in \Omega_n$, et ce pour tout n.

Soit réciproquement a dans tous les Ω_n et fixons un $\varepsilon > 0$. Il y a un entier $n \geq 1$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$, et l'appartenance $a \in \Omega_n$ fournit un $\delta > 0$ tel que

$$|x-a| < \delta \implies \left\{ \begin{array}{l} |x-a| < \delta \\ |a-a| < \delta \end{array} \right. \implies |f(x) - f(a)| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ce qui traduit exactement la continuité de f en a.

10.2 Toute fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur une partie dense

Soit $f : R- > R$, alors il existe D dense dans R tel que f restreinte à D soit continue.

C'est un **théorème de Henry Blumberg** : *New Properties of all Real Functions*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 3 (1922), 113-128. On a même donné le nom d'« espace de Blumberg » à un espace vérifiant cette propriété (pour les fonctions vers R). Voir <URL : http ://eom.springer.de/B/b110650.htm > pour une discussion plus détaillée.

(évidememnt, ya du baire dessous car c'est un théoèrme qui limite les pathologies)

Demo : 14 08 2011 00h55 GroTsen (maths)

10.3 discontinuituéis de première espèces sont au plus dénombrables

https ://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Froda
version de blumberg http ://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183424539